

Cvičení z Matematické analýzy 3
Antonín Česík
2020/2021

Soustavy diferenciálních rovnic (lineární s konstantními koeficienty)

A) Homogenní úloha $y' = Ay$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je zadaná matice a $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce.

Postup řešení:

1) A -matici $\lambda I - A$ přerodíme do horního trojúhelníkového tvaru

2) Soustavu řešíme „odzadu“, tzn. vyřešíme rovnici pro y_n , pak ji dosadíme do rovnice pro y_{n-1} a tu vyřešíme, pak $y_{n-2} \dots y_1$.

Dostáváme úlohy tvaru $a_k y_i^{(k)} + \dots + a_1 y_i' + a_0 y_i = f$.

a) Případ $f=0$ (homogenní)

Char. polynom $a_k \lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0 \leadsto k$ komplexních kořenů (včetně násobn.)

$\leadsto$ Fundamentální systém $w_1, \dots, w_k \Rightarrow y_i$ je tvaru $y_i = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k, c \in \mathbb{R}^k$

b) obecné f Bud'te $w_1, \dots, w_k$ jako v a). Máme 2 možnosti:

i) variace konstant:

Položíme $y_i = c_1 w_1 + \dots + c_k w_k$, kde c_i jsou neznámé funkce(!).

Dosadíme do rovnice, vyřešíme soustavu pro $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$.

ii) „uhodneme partikulární řešení“: ze spec. tvaru f víme, že existuje y_p řešení ve spec. tvaru (až na nějaké parametry, dopočítáme po dosazení)
 y_i je pak tvaru $y_i = y_p + \underbrace{c_1 w_1 + \dots + c_k w_k}_{y_H}$.

3) Máme řešení tvaru $y = a_1 \phi_1 + \dots + a_n \phi_n$, pro každé $a \in \mathbb{R}^n$, $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ je fundamentální systém, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ je fundamentální matice soustavy $y' = Ay$.

B) Nehomogenní úloha $y' = Ay + b$, kde matice $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zadaná fce.

Možnosti: i) A -matice správnou stranou $(\lambda I - A | b)$, postupujeme analogicky

ii) variace konstant: Vyřešíme případ $b=0$ ^{pomocí A_p jako v A)} $\leadsto$ fund. matice ϕ .

y hledáme tvaru $y = \phi c$, kde $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce

Dosadíme tento tvar $\rightarrow$ soustavu pro c !

$$\boxed{1} \quad \begin{cases} y' = 4y + z \\ z' = 5z \end{cases} \quad , \quad \text{tzn.} \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \dots \text{u\AA} \text{ je v po\AA} \text{zadovan\AA} \text{m tvaru}$$

$$\underline{2. \text{t.}}: z' - 5z = 0, \text{ char. poly nom je } \lambda - 5, \text{ kořen } 5$$

$$\hookrightarrow \text{Fun. syst\AA} \text{m } e^{5t} \longrightarrow z(t) = a \cdot e^{5t}, t \in \mathbb{R}, \text{ libovoln\AA} \text{ } a \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{1. \text{t.}}: y' - 4y = z = \underline{a e^{5t}}$$

$$\text{Char. poly nom } \lambda - 4 \leadsto \text{Fun. syst. } e^{4t}$$

$$\underline{\text{i) variace konstant:}} \quad y := \underline{c e^{4t}}, \quad c \text{ je funkce}$$

$$y' = 4c e^{4t}$$

$$\Rightarrow y' - 4y = \underline{c' e^{4t}} + \underbrace{4c e^{4t} - 4c e^{4t}}_{=0} = a e^{5t}$$

$$c' = a e^t$$

$$\leadsto c = a e^t + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = a e^{5t} + b e^{4t}$$

Tedy r\AA} \text{ešení je}

$$y(t) = a e^{5t} + b e^{4t}$$

$$z(t) = a e^{5t}$$

, $t \in \mathbb{R}$, pro každ\AA} \text{ } a, b \in \mathbb{R}.

ii) spec. pr\AA} \text{v\AA} \text{ strana:}

$$a e^{5t} = e^{\mu t} (P(t) \cos vt + Q(t) \sin vt)$$

$$v = 0, P(t) = a, Q(t) = 0, \mu = 5$$

$\mu = 5$ nem\AA} \text{ koř\AA} \text{en char. poly.} \leadsto \text{partikul\AA} \text{rn\AA} \text{ r\AA} \text{ešení}

$$\text{m\AA} \text{ tvar } y_p = e^{5t} \cdot (c \cdot 1 + 0)$$

Dosad\AA} \text{me do rovnice} \leadsto

$$y_p' - 4y_p = 5c e^{5t} - 4c e^{5t} = c e^{5t} = a e^{5t}$$

$$\Rightarrow y_p = a e^{5t}$$

$$c = a$$

$$\text{Tedy } y \text{ je tvaru } y = \underline{a e^{5t}} + \underline{b e^{4t}}$$

$$\boxed{2} \quad \begin{aligned} y' &= 2y + z \\ z' &= y + 2z \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda - 2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ \lambda - 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ 0 & (\lambda - 2)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Char. polynomial rovnice pro z je $(\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 =$
 $= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \longrightarrow$ Fun. sys. pro $z'' - 4z' + 3z = 0$

je e^{3t}, e^t

$$\hookrightarrow z = ae^t + be^{3t}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Dosažením do 1. rovnice:

$$y = z' - 2z = ae^t + 3be^{3t} - 2ae^t - 2be^{3t} = -ae^t + be^{3t}$$

Řešením je $y(t) = -ae^t + be^{3t}$
 $z(t) = ae^t + be^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ pro } a, b \in \mathbb{R}.$

$$\boxed{3} \quad y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} y$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 6 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ (\lambda+1)(\lambda-4)+6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda+1)(\lambda-4)+6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

Rovnice pro y_1 je $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0$

Řešení: $y_1 = ae^t + be^{2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}$

1. rovnice: $y_2 = y_1' + y_1 = ae^t + 2be^{2t} + ae^t + be^{2t}$

Řešení je $y(t) = \begin{pmatrix} ae^t + be^{2t} \\ 2ae^t + 3be^{2t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \text{ pro } a, b \in \mathbb{R}.$

4

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_A y$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

Rovnice pro y_1 je $y_1'' - 4y_1' + 4 = 0$, char. polynomial $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$
 $\rightarrow$ Fun. sys: $e^{2t}, t e^{2t} \rightarrow y_1 = a e^{2t} + b t e^{2t} = (a + b t) e^{2t}$
 $a, b \in \mathbb{R}$

1. rovnice: $y_2 = y_1' = b e^{2t} + 2(a + b t) e^{2t} = (2a + b + 2b t) e^{2t}$

3. rovnice: $y_3' - 2y_3 = -2y_1 + y_2 = \underbrace{(-2a - 2b t + 2a + b + 2b t)}_{= b e^{2t}} e^{2t}$

Fun. sys. pro y_3 je (char. polynomial je $\lambda - 2$) e^{2t} .

Variace konstant: $y_3 = c e^{2t}$, c je funkce

$$y_3' = c' e^{2t} + 2c e^{2t}$$

Posadíme do rovnice:

$$c' e^{2t} + \underbrace{2c e^{2t} - 2c e^{2t}}_{=0} = b e^{2t}$$

$$\Rightarrow c' = b \Rightarrow c = b t + d, d \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow y_3 = (b t + d) e^{2t}$$

Celkem tedy

řešení je $y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} a + b t \\ 2a + b + 2b t \\ b t + d \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$ pro každé $a, b, d \in \mathbb{R}.$

$$[5] \quad y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A y$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(\lambda-1)} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & -2\lambda+3 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2+3\lambda-1 & 2\lambda-3 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & -2\lambda+3 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2+3\lambda-1 & 2\lambda-3 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 5 & 0 & -2\lambda+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda+1} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2+7\lambda-7 & -5 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & -10\lambda+15 & 5\lambda+5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2+7\lambda-7 & -5 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & P(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = -10\lambda + 15 + (\lambda+1)(-\lambda^2+7\lambda-7) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 70\lambda + 8 =$$

$$[\lambda=4 \text{ je kořen} \rightarrow \text{vydělíme } (-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 70\lambda + 8) : (\lambda-4) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2]$$

$$= -(\lambda-4)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = -(\lambda-4)(\lambda - (1+i))(\lambda - (1-i)) \text{ je char. polynom}$$

pro y_2

kořeny: $\lambda_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

$\Rightarrow$ Fun. systém pro y_2 : $e^{4t}, e^t \cos t, e^t \sin t$

$$\Rightarrow y_2 = a e^{4t} + b e^t \cos t + c e^t \sin t, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$1. \text{ ř: } y_3 = \frac{1}{5}(-y_2'' + 7y_2' - 7y_2) =$$

$$= \frac{1}{5}(-7(a e^{4t} + b e^t \cos t + c e^t \sin t) + 7(4a e^{4t} + (b+c)e^t \cos t + (-b+c)e^t \sin t) -$$

$$-(16a e^{4t} + \underbrace{(b+c-b+c)}_{2c} e^t \cos t + \underbrace{(-b-c-b+c)}_{-2b} e^t \sin t) =$$

$$= \frac{1}{5}(5a e^{4t} + \underbrace{(-7b+7b+c-2c)}_{5c} e^t \cos t + \underbrace{(-7c-7b+7c+2b)}_{-5b} e^t \sin t =$$

$$= a e^{4t} + c e^t \cos t - b e^t \sin t$$

$$2. \text{ ř: } y_1 = -y_2' + 2y_2 + 2y_3 = -(\cancel{4a e^{4t}} + \underbrace{(b+c)}_{c-b} e^t \cos t + \underbrace{(-b+c)}_{c-b} e^t \sin t)$$

$$+ \cancel{2a e^{4t}} + \underbrace{2b e^t \cos t} + \underbrace{2c e^t \sin t} + \cancel{2a e^{4t}} + \underbrace{2c e^t \cos t} - \underbrace{2b e^t \sin t} =$$

$$= (b+c) e^t \cos t + \underbrace{(-c+b+2c-2b)}_{c-b} e^t \sin t$$

$$\boxed{6} \quad y' = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} y$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -6 & 15 \\ -1 & \lambda-1 & 5 \\ -1 & -2 & \lambda+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda-2} \begin{pmatrix} \lambda-2 & -6 & 15 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ -1 & -2 & \lambda+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} \lambda-2 & -6 & 15 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ -1 & -2 & \lambda+6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & -2\lambda-2 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ -1 & -2 & \lambda+6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ -1 & -2 & \lambda+6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \rightarrow \underline{y_3(t) = (a + bt)e^{-t}}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\underline{2.1.} \quad y_2' + y_2 = y_3' + y_3 = (a + bt - a - bt + b)e^{-t} = be^{-t}$$

$$\text{Var. konst: } y_2(t) = c_2(t)e^{-t}$$

$$c_2' e^{-t} - \underbrace{c_2 e^{-t}}_{=0} + c_2 e^{-t} = be^{-t}$$

$$t \geq 0. \quad c_2' = b$$

$$\hookrightarrow c_2 = bt + c$$

$$, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{y_2 = (bt + c)e^{-t}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{nebo: spec.} \\ \text{pravidla} \\ y_2 = (k + lt)e^{-t} \end{array} \right\}$$

$$\underline{y_1} = -2y_2 + y_3' + 6y_3 = (-2bt - 2c - a - bt + b + 6a + 6bt)e^{-t} = (3bt + 5a + b - 2c)e^{-t}$$

$$\rightarrow y(t) = \begin{pmatrix} 5a + b - 2c + 3bt \\ c + bt \\ a + bt \end{pmatrix} e^{-t}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{7} \quad y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} y.$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ 2\lambda-7 & -\lambda^2+6\lambda-9 & 0 \end{pmatrix}$$

1. ř: $y_1 = a e^{3t}, a \in \mathbb{R}$

3. ř: $y_2'' - 6y_2' + 9y_2 = 2y_1' - 7y_1 = -a e^{3t}$

Fun. sys: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 \leadsto e^{3t}, t e^{3t}$

y_2 hledáme ve tvaru $p t^2 e^{3t}$ ($\mu=3$ je 2-más. kořen)

$$y_2 = p t^2 e^{3t}, \quad y_2' = 2p t e^{3t} + 3p t^2 e^{3t} = (2t + 3t^2) p e^{3t}$$

$$y_2'' = (2 + 6t + 6t + 9t^2) p e^{3t}$$

$$y_2'' - 6y_2' + 9y_2 = 2p e^{3t} = -a e^{3t} \leadsto p = -\frac{a}{2}$$

$$y_2 = -\frac{a}{2} t^2 e^{3t} + b e^{3t} + c t e^{3t}$$

2. ř: $y_3 = 2y_1 - y_2' + 2y_2 = 2a e^{3t} + a t e^{3t} + \frac{3}{2} a t^2 e^{3t} - b e^{3t}$

$$- c e^{3t} - 3c t e^{3t} - a t^2 e^{3t} + 2b e^{3t} + 2c t e^{3t}$$

$$= \frac{1}{2} a t^2 e^{3t} + (a - c) t e^{3t} + (2a - b - c) e^{3t}$$

$$\boxed{8} \quad \begin{cases} x' = -x + y - 2e^{-t} \\ y' = -6x + 4y - 4e^{-t} \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -4e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b.$$

Řešme nejprve $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (homogenní rovnice):

$$\lambda - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 6 & \lambda-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\lambda+1)(\lambda-4)+6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\leadsto x = ae^t + be^{2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$y = x' + x = ae^t + 2be^{2t} + ae^t + be^{2t} = 2ae^t + 3be^{2t}$$

Fundamentální systém soustavy je $\begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$.

Partikulární řešení $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$ dostaneme variací konstant:

$$x = ae^t + be^{2t}, \quad a, b \text{ různá funkce}$$

$$y = 2ae^t + 3be^{2t}$$

$$\begin{aligned} x' &= \underbrace{ae^t + 2be^{2t}}_{= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} + \underbrace{a'e^t + b'e^{2t}}_{\text{chceme } \vec{b}} \\ y' &= \underbrace{2ae^t + 6be^{2t}}_{= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} + \underbrace{2a'e^t + 3b'e^{2t}}_{\text{chceme } \vec{b}} \end{aligned}$$

Řešíme:

$$a'e^t + b'e^{2t} = -2e^{-t}$$

$$2a'e^t + 3b'e^{2t} = -4e^{-t}$$

$$\hookrightarrow b'e^{2t} = 0 \Rightarrow b' = 0$$

$$\Rightarrow b \stackrel{c}{=} 0$$

$$\hookrightarrow -a'e^t = 2e^{-t}$$

$$\Rightarrow a' = -2e^{-2t} \Rightarrow a \stackrel{c}{=} e^{-2t}$$

Stačí nám jedno partikulární řešení... konstanty $v(\pm)$ můžeme položit $= 0$

$$\Rightarrow \underline{b = 0}, \underline{a = e^{-2t}}$$

Celkem řešením je

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{Ae^t + Be^{2t}}_{\text{homogenní řeš.}} + \underbrace{e^{-t}}_{\text{partikulární řešení}} \\ y &= \underbrace{2Ae^t + 3Be^{2t}}_{\text{homogenní řeš.}} + \underbrace{2e^{-t}}_{\text{partikulární řešení}} \end{aligned}$$

homogenní řeš.

partikulární řešení

9 $x' = x + y + e^t \sin t$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$
 $y' = -x + y$

Homogenní rovnice: $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 + 2\lambda - 2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$

$$-\lambda^2 + 2\lambda - 2 = -(\lambda - (1+i))(\lambda - (1-i))$$

$\Rightarrow$ Fun. sys. pro y : $e^{(1+i)t}, e^{(1-i)t} \rightarrow y = a e^{(1+i)t} + b e^{(1-i)t}$, $a, b \in \mathbb{R}$

2. r: $x = y - y' = a e^{(1+i)t} + b e^{(1-i)t} - a e^{(1+i)t} - a e^{(1+i)t} - b e^{(1-i)t} + b e^{(1-i)t}$

$$= b e^{(1+i)t} - a e^{(1-i)t}$$

$\Rightarrow$ Fun. systém celé soustavy je $\begin{pmatrix} -e^{(1-i)t} \\ e^{(1+i)t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice - variace konstant:

$x = b e^{(1+i)t} - a e^{(1-i)t}$, a, b funkce.

$y = a e^{(1+i)t} + b e^{(1-i)t}$

$x' = \boxed{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -a' e^{(1-i)t} + b' e^{(1+i)t} \\ + a' e^{(1+i)t} + b' e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$

$y' = \boxed{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -a' e^{(1-i)t} + b' e^{(1+i)t} \\ + a' e^{(1+i)t} + b' e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$

Řešíme $-a' e^{(1-i)t} + b' e^{(1+i)t} = e^t \sin t$ $/ \sin t$

$a' e^{(1+i)t} + b' e^{(1-i)t} = 0$ $/ \cos t$

$-a' e^{(1-i)t} \sin t + b' e^{(1+i)t} \sin^2 t = e^t \sin^2 t$

$a' e^{(1+i)t} \sin t \cos t + b' e^{(1-i)t} \cos^2 t = 0$

$0 + b' e^t \cdot 1 = e^t \sin^2 t$

$\Rightarrow b' = \sin^2 t$

$b \stackrel{c}{=} \int \sin^2 t dt = \sin t (-\cos t) - \int \cos t (-\cos t) dt = -\sin t \cos t + \int (1 - \sin^2 t) dt =$

$\stackrel{c}{=} -\sin t \cos t + t - \int \sin^2 t dt \Rightarrow b \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} (-\sin t \cos t + t)$

$a \stackrel{c}{=} \int -\sin t \cos t = \cos^2 t - \int \cos t (-\sin t) dt \Rightarrow a \stackrel{c}{=} \frac{\cos^2 t}{2}$

Konstanty můžeme položit 0 $\Rightarrow$ Řešení $x = -a e^{(1-i)t} + b e^{(1+i)t} + \boxed{(*)}$
 $y = a e^{(1+i)t} + b e^{(1-i)t} + \boxed{(*)}$

$\boxed{(*)}$:
 $-\frac{\cos^2 t}{2} e^{(1-i)t} + \frac{1}{2} (-\sin t \cos t + t) e^{(1+i)t}$
 $+\frac{\cos^2 t}{2} e^{(1+i)t} + \frac{1}{2} (-\sin t \cos t + t) e^{(1-i)t}$

$a' e^{(1-i)t} \cos^2 t - b' e^{(1+i)t} \sin t \cos t = 0$

$a' e^{(1+i)t} \sin^2 t + b' e^{(1-i)t} \sin t \cos t = 0$

$a' e^t \cdot 1 = -e^t \sin t \cos t$

$a' = -\sin t \cos t$

10

$$x' = y + te^{2t}$$

$$y' = -4x + 4y - e^{2t}$$

$$z' = -2x + y + 2z + 3e^{2t},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{11} \quad \begin{aligned} x' &= x + y + z + t \\ y' &= -x + y + 2t \\ z' &= x + z + 3t \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Řešme úpravní rozšířenou λ -matice $(\lambda I - A | B)$:

$$\begin{aligned} (\lambda I - A | B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & -1 & -1 & t \\ 1 & \lambda-1 & 0 & 2t \\ -1 & 0 & \lambda-1 & 3t \end{array} \right) \xrightarrow{\lambda-1} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & -1 & -1 & t \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 5t \\ -1 & 0 & \lambda-1 & 3t \end{array} \right) \sim \\ &\xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1+(\lambda-1)^2 & t+(3t)-3t \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 5t \\ -1 & 0 & \lambda-1 & 3t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \lambda^2-2\lambda & -2t+3 \\ 0 & 0 & P(\lambda) & 5t+(-2)-(-2t+3) \\ -1 & 0 & \lambda-1 & 3t \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \lambda^2-2\lambda & -2t+3 \\ 0 & 0 & P(\lambda) & 7t-5 \\ -1 & 0 & \lambda-1 & 3t \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = \lambda-1 + (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda) = (\lambda-1)(1+\lambda^2-2\lambda) = (\lambda-1)^3$$

je char. polynom rovnice pro z : $z''' - 3z'' + 3z' - z = 7t - 5$

$\Rightarrow$ Fun. systém pro z je e^t, te^t, t^2e^t .

Partikulární řešení budeme hledat tvaru $z = pt + q$, hledáme p, q .

$$\text{Pak } z' = p, \quad z'' = z''' = 0$$

$$\text{Dosadíme do rovnice: } 0 + 3p - (pt + q) = 7t - 5$$

Porovnáním koeficientů polynomů dostaneme:

$$-p = 7, \quad 3p - q = -5$$

$$p = -7, \quad q = 3(-7) + 5 = -16$$

Dostáváme tedy řešení pro z :

$$\Rightarrow z = ae^t + bte^t + ct^2e^t - 7t - 16, \quad \text{pro } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$3. \text{ rovnice } \Rightarrow x = z' - z - 3t = \dots$$

$$1. \text{ rovnice } \Rightarrow y = z'' - 2z + 2t - 3 = \dots$$

$$\boxed{12} \quad y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & 6 & -2\lambda+3 \\ \lambda-1 & 0 & -\lambda^2+\lambda+1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -2\lambda+3 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\ & \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) \Rightarrow y_3 = ae^t + be^{2t}, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{2. r.: } y_1' - y_1 = 2y_3' - 3y_3 = -ae^t + be^{2t}$$

$$\text{Hledáme } y_{1,a}: y_{1,a}' - y_{1,a} = -ae^t \leadsto y_{1,a} := pte^t$$

$$\Rightarrow p e^t + p t e^t - p t e^t = -a e^t \Rightarrow y_{1,a} = -a t e^t$$

$$y_{1,b}: y_{1,b}' - y_{1,b} = b e^{2t} \leadsto y_{1,b} := q e^{2t}$$

$$2q e^{2t} - q e^{2t} = b e^{2t} \leadsto q = b \Rightarrow y_{1,b} = b e^{2t}$$

tedy $y_{1,a} + y_{1,b}$ je partikulární řešení, tedy

$$y_1 = -a t e^t + b e^{2t} + c e^t, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{3. r.: } y_2 &= y_1 - y_3' + y_3 = -a t e^t + b e^{2t} + c e^t \\ &\quad - a e^t - 2b e^{2t} + a e^t + b e^{2t} = -a t e^t + c e^t \end{aligned}$$

Obecné řešení y je tedy

$$y(t) = \begin{pmatrix} -a t e^t + b e^{2t} + c e^t \\ -a t e^t + c e^t \\ a e^t + b e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \text{poč. podmínka } y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dává:}$$

$$\begin{pmatrix} b+c \\ c \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tedy } \begin{matrix} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{matrix}$$

$$a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = \begin{pmatrix} -t e^t + e^t \\ -t e^t + e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

METRICKE PROSTORY

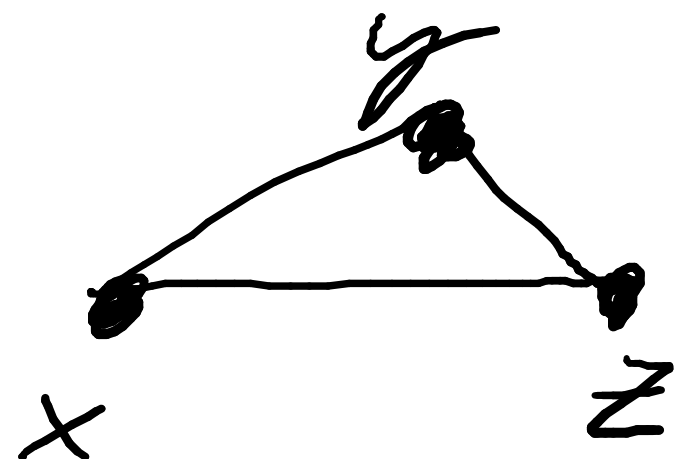
Přípovědi: (P, ρ) je metrický prostor, pokud $\rho: P \times P \rightarrow [0, \infty)$

splňuje: $\forall x, y \in P: \rho(x, y) = \rho(y, x)$

$\forall x, y \in P: \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

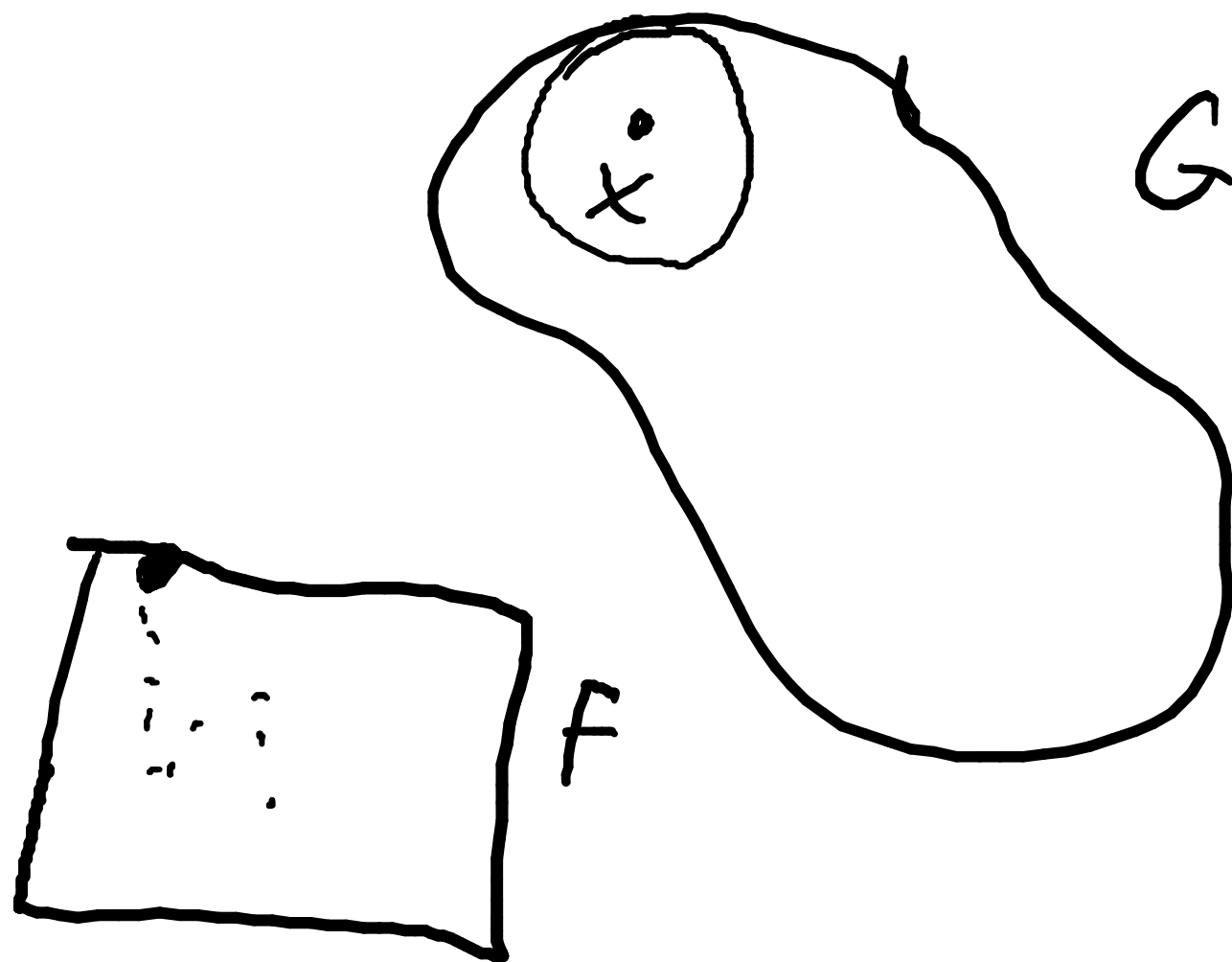
$\forall x, y, z \in P: \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

(Δ -nerovnost)



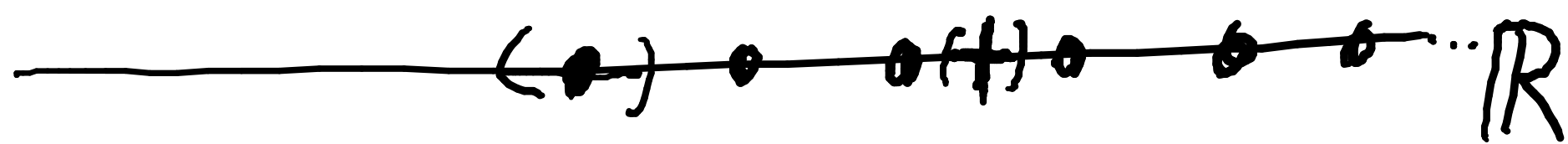
$G \subset P$ je otevřený pokud
 $\forall x \in G \exists \delta > 0: B(x, \delta) \subset G$

$F \subset P$ je uzavřený pokud
 $(x_n \in F \text{ a } \lim x_n = x) \Rightarrow x \in F$



1 V $\mathbb{R}$ máme metricku $\rho(x, y) = |x - y|$

(a) $\mathbb{N}$



$\text{int } \mathbb{N} = \emptyset$: Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $\delta > 0$ je

$$B(n, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = (n - \delta, n + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow n \notin \text{int } \mathbb{N}$.

$\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$: Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Pak $B(n, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \neq \emptyset$ jakoukoliv δ .

Dále $B(n, \delta) \cap \mathbb{N} \supset \{n\}$. Tedy $B(n, \delta) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Celkem $n \in \partial \mathbb{N}$. Tedy $\partial \mathbb{N} \supset \mathbb{N}$

Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, položíme $\delta := \min(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x)$

Pak $B(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta) \subset (\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil)$, k čemuž

neobsahuje žádný celočíselný čísla, tedy $B(x, \delta) \cap \mathbb{N} = \emptyset \Rightarrow x \notin \partial \mathbb{N}$

Tedy $\partial \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.

$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$: protože $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \partial \mathbb{N}$.

N není otevřený protože $\text{int } N = \emptyset \neq N$
je uzavřený, protože $\overline{N} = N$.

(b) $\mathbb{Q}$:

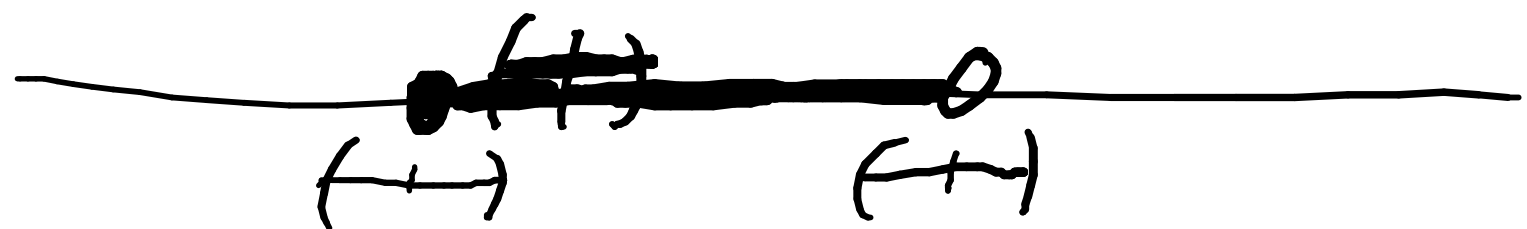
$\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset$ Pro každé $q \in \mathbb{Q}$ a $\delta > 0$, máme $(q-\delta, q+\delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$
 $\Rightarrow q \notin \text{int } \mathbb{Q}$.

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ Pro každé $x \in \mathbb{R}$, každé $\delta > 0$ máme
 $(x-\delta, x+\delta) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, $(x-\delta, x+\delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ (vím z MA1)
tedy $x \in \partial \mathbb{Q}$.

$$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ není otevřený ani uzavřený.

(c) $[0, 1)$



$\text{int } [0, 1) = (0, 1)$: Zvolme $x \in (0, 1)$. Položme $\delta := \min(x, 1-x)$

Pak $B(x, \delta) = (x-\delta, x+\delta) \subset [0, 1) \Rightarrow x \in \text{int } [0, 1)$

Pro 0 platí: $\forall \delta > 0: B(0, \delta) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$, tedy
 $0 \notin \text{int } B$.

$\partial [0, 1) = \{0, 1\}$: $0 \in \partial [0, 1)$... vzhledem
 $1 \in \partial [0, 1)$... $\forall \delta > 0: (1-\delta, 1+\delta) \cap [0, 1) \neq \emptyset$ a $1 \notin [0, 1)$
 $\forall x \in (0, 1): x \in \text{int } [0, 1)$, tedy $x \notin \partial [0, 1)$.

$\forall x \in (-\infty, 0)$: Položme $\delta := -x$, pak $B(x, \delta) = (-2\delta, 0)$
tedy $B(x, \delta) \cap [0, 1) = \emptyset$.

$x \in (1, \infty)$... podobně.

$$\overline{[0, 1)} = [0, 1]$$

$[0, 1)$ není ot. ani uz.

$$(d) \quad \emptyset$$

$$\frac{\text{int } \emptyset = \emptyset}{\partial \emptyset = \emptyset}$$

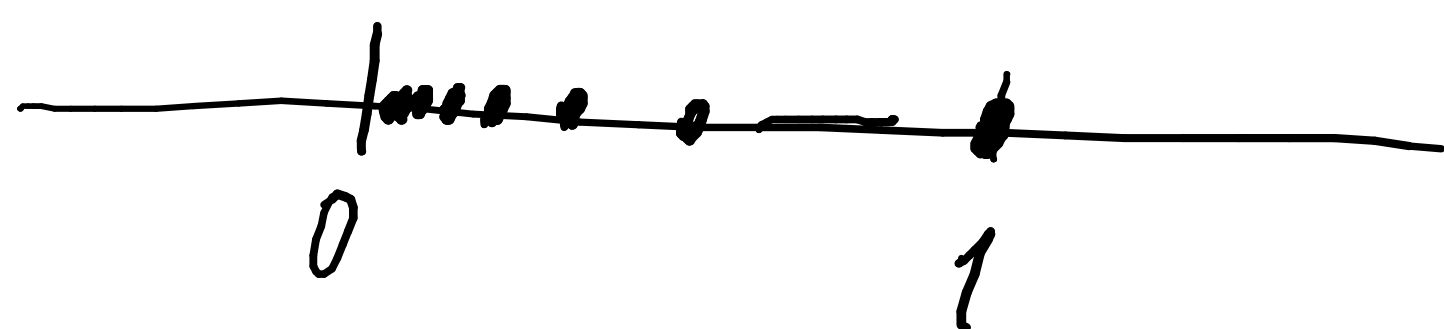
$$\underline{\bar{\emptyset} = \emptyset}$$

$\Rightarrow \emptyset$ je otevřená i uzavřená

$$(e) \quad \mathbb{R}, \quad \begin{array}{l} \text{int } \mathbb{R} = \mathbb{R} \\ \partial \mathbb{R} = \emptyset \\ \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}$ je otevřená i uzavřená.

$$(f) \quad \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = M$$



$$\underline{\text{int } M = \emptyset} \quad \text{podobně jako } \mathbb{N}$$

[nebo $M \subset \mathbb{Q}$, $\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset \Rightarrow \text{int } M = \emptyset$.]

$$\underline{\partial M = M \cup \{0\}} \quad \text{Dokažeme, ^{povz} že } 0 \in \partial M: \text{ zvolme } \delta > 0.$$

Pak $B(0, \delta) = (-\delta, \delta)$. Najdeme $n \in \mathbb{N}$

tak, aby $n > \frac{1}{\delta}$, potom $\frac{1}{n} \in (-\delta, \delta)$, tedy

$B(0, \delta) \cap M \neq \emptyset$. Je-li $0 \notin M$, máme $0 \in \partial M$.

(ostatní body to zkusíme podobně jako
u $\mathbb{N}$)

2 (a) $\rho(x, y) = x - y$, NE: $\rho(0, 1) = -1 < 0$

(b) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$

• $\rho(x, y) \geq 0$ ✓

• $\rho(x, y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = \rho(y, x)$ ✓

• $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$ ✓ Δ -nerovnost pro $|\cdot|$.

• $\rho(x, z) = |x^3 - z^3| = |x^3 - y^3 + y^3 - z^3| \leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$ ✓ (Δ -nerovnost)
 $\rightarrow \rho$ je metrika

Poznamka: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ je metrika na $\mathbb{R}$

(c) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ NE: $\rho(1, -1) = |1 - (-1)^2| = 0$.

(d) $\rho(x, y) = (x - y)^2$

NE: $\rho(0, 2) = 4 > \rho(0, 1) + \rho(1, 2) = 1 + 1 = 2$

$\Rightarrow$ neplatí Δ -nerovnost

3 Prípomenki: • $f: X \rightarrow Y$ spojitá: $G \subset Y$ otevřená $\Rightarrow f^{-1}(G) \subset X$ otevřená
 $F \subset Y$ uzavřená $\Rightarrow f^{-1}(F) \subset X$ uzavřená

• $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, spojitě $\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$ spojitá.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1\} = f^{-1}(\underbrace{(-\infty, 1)}_{\text{otevřená v } \mathbb{R}})$,

kde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Je f spojitá? • $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x, y) = x^2$ je spojitá

• $g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(x, y) = 2y^2$ je spojitá

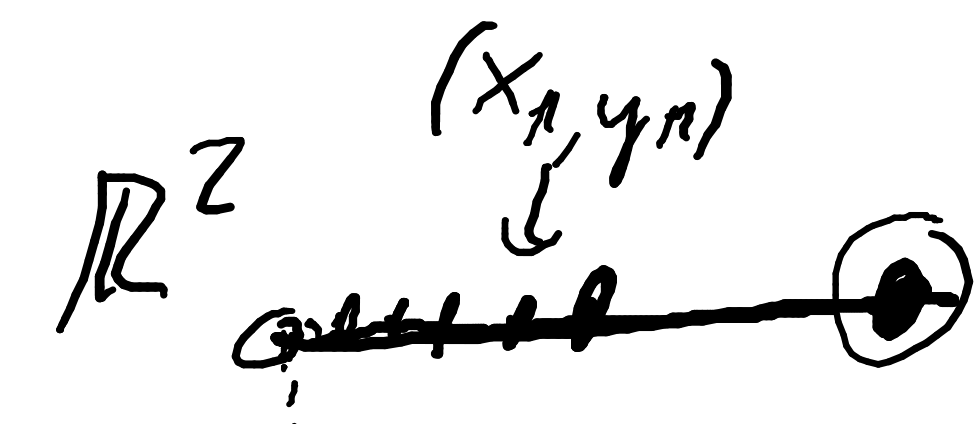
$\Rightarrow g = (g_1, g_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je spojitá

• $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(z, w) = z + w$ je spojitá.

$\Rightarrow f = h \circ g$ je spojitá, $(-\infty, 1)$ otevřená $\Rightarrow A$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$.

$$(b) B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \leq 0\} = \underbrace{f^{-1}([0, \infty))}_{\text{uz.}} \cap \underbrace{g^{-1}((-\infty, 0])}_{\text{uz.}}$$

Položme $f(x, y) = x$... spojitě
 $g(x, y) = y$ Průnik uzavřených je uzavřen

$$(c) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y \leq 0\}$$


• C není uzavřená: Zvolme $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, 0) \in C$.
 Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0) \notin C$.

• C není otevřená: Zvolme $(x, y) := (1, 0)$. Pak
 pro každé $\varepsilon > 0$ máme $B((1, 0), \varepsilon) \ni (1, \frac{\varepsilon}{2}) \notin C$.
 $\Rightarrow (x, y) \notin \text{int } C. \Rightarrow C$ není otevřená.

$$(d) \{x, y \in \mathbb{R}^2: x^3 + y^2 + e^x = 5\} = f^{-1}(\{5\}) = D$$

$f(x, y) = x^3 + y^2 + e^x$ je spojitá $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (součet spojitých)

Jednohodnotová množina je uzavřená (každá posloupnost jejích prvků je konstantní, tedy její limita je ten samý prvek)

$\{5\}$ uzavřená, f je spojitá $\Rightarrow D$ je uzavřená.

$$(e) \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 3y = 2, z \geq 0\} = \underbrace{f^{-1}(\{2\})}_{\text{uz.}} \cap \underbrace{g^{-1}([0, \infty))}_{\text{uz.}}$$

$$f(x, y, z) = x + 3y$$

$$g(x, y, z) = z$$

jsou spojitě

$$\underbrace{\underbrace{\text{uz.}}_{\text{uz.}} \cap \underbrace{\text{uz.}}_{\text{uz.}}}_{\text{uz.}}$$

[4] Obecně neplatí pro $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitost:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0, \infty)) = \overline{f^{-1}((0, \infty))} = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}}.$$

Například: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



Pak $f^{-1}([0, \infty)) = \mathbb{R} \neq \overline{f^{-1}((0, \infty))} = \overline{(0, \infty)} = [0, \infty)$

[5] $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(xyz)$. Je spojitá?

• $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá

• $+$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá

• $\cdot$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

• $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt{x}$ je spojitá

• $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$

$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$ je spojitá

$\Rightarrow g \circ \varphi$ je spojitá

$$f(x, y, z) = \underbrace{g \circ \varphi(x, y, z)}_{\text{spoj.}} \cdot \underbrace{\sin(xyz)}_{\text{spoj.}} \Rightarrow f \text{ je spojitá na } \mathbb{R}^3.$$

$\Rightarrow f$ je spojitá na $\mathbb{R}^3$.

[6]

[7]

$$\boxed{8} \quad \mathcal{C}([0,1]) = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ spojité} \},$$

$\mathcal{C}([0,1])$ je vektorový prostor,

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ jsou normy na $\mathcal{C}([0,1])$, kde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$\Rightarrow \rho_1(f,g) = \|f-g\|_1, \rho_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$ jsou metricky na $\mathcal{C}([0,1])$

(a) $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, dokažeme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ v prostoru $(\mathcal{C}([0,1]), \rho_1)$.

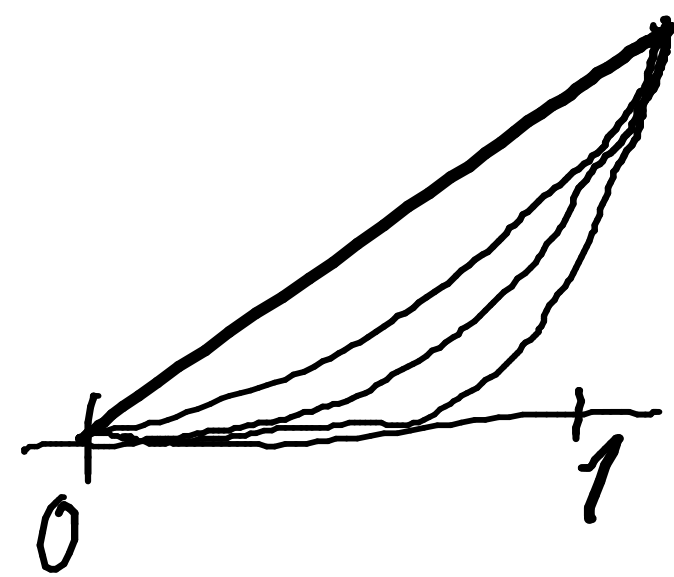
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(f_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |x^n - 0| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\rho_1} 0.$$

(b) $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, dokažeme, že $(f_n)_{n=1}^\infty$ nemá limitu v prostoru $(\mathcal{C}([0,1]), \rho_\infty)$.

Dokažeme, že $(f_n)_{n=1}^\infty$ nemá Cauchyovství:

$$\rho_\infty(f_n, f_{2n}) = \sup_{x \in [0,1]} |x^n - x^{2n}| =$$



$$= \sup_{x \in [0,1]} x^n(1-x^n) = \sup_{t \in [0,1]} t(1-t) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Tedy pro n_0 máme $n_1 = n_0, n_2 = 2n_0$, že $\rho_\infty(f_{n_1}, f_{n_2}) \geq \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow (f_n)_{n=1}^\infty$ nemá Cauchyovství. $\Rightarrow$ nemá limitu.

V úlohách 9.-11. máme metricku ρ_∞ .

[9] $I: \mathcal{C}([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(f) = \int_0^1 f(x) dx$ je spojitá

Důkaz: Zvolme $f \in \mathcal{C}([0,1])$. $\varepsilon > 0$.

Položme $\delta := \varepsilon$. Pak pro $g \in B(f, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} |I(f) - I(g)| &= \left| \int_0^1 f - \int_0^1 g \right| \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|}_{= \|f-g\|_\infty < \delta = \varepsilon} dx \leq \int_0^1 \varepsilon dx = \varepsilon. \Rightarrow I \text{ je spojitá v } f. \end{aligned}$$

f bylo libovolné $\Rightarrow I$ je spojitá na $\mathcal{C}([0,1])$.

[10] $a \in [0,1]$. Definujme $F_a: \mathcal{C}([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$, $F_a(f) = f(a)$,
 F_a je spojitá $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Důkaz Zvolme $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\varepsilon > 0$.

Položme $\delta := \varepsilon$ Pak pro $g \in B(f, \delta)$

$$\begin{aligned} |F_a(f) - F_a(g)| &= |f(a) - g(a)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = \|f-g\|_\infty < \delta = \varepsilon. \\ \Rightarrow F_a \text{ je spojitá v } f &\stackrel{f \text{ libovolné}}{\Rightarrow} F_a \text{ spojitá na } \mathcal{C}([0,1]) \end{aligned}$$

[11] (a) $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : 0 < \int_0^1 f < 1\} = I^{-1}(\underbrace{(0,1)}_{\substack{\text{ot.} \\ \text{observováno v } \mathcal{C}([0,1])}})$
 I spojitá

(b) $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \int_0^1 f \geq 0, f(1) = 1\} = \underbrace{I^{-1}([0, \infty))}_{\text{spoj. uz.}} \cap \underbrace{F_1^{-1}(\{1\})}_{\substack{\text{spoj. uz.}}}$
 $\Rightarrow$ uzavřená.

LIMITY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Podíváme se na přímku $x=0, t \in \mathbb{R}$
 počítáme limitu $y=t$
 $\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t^2}} =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \text{sign } t \dots$

Tedy limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ neexistuje, protože jinak
 byctoměli: $\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x,y)$.
 limita neexistuje

▷ Platí podobně jako pro jeden proměnnou

- aritmetika limit ($+$, $\cdot$, jsou spojitá na $\mathbb{R}^2$)
- věta o limitě složené funkce
- věta o dvou polích
- součin omezené fce a fce s limitou 0 má limitu 0.

2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{0 \leq \leq 1 \text{ omezená}} \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow 0} = 0$

3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Po přímce $y=0$
 $x=t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2+0} = 0$

Po přímce $x=y=t$: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$

Limity se nerovnájí $\Rightarrow$ limita v zadaném bodě neexistuje

$$\boxed{4} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Po přímce $x=t, y=0 \} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$

Po přímce $x=0, y=t \} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1$

$\Rightarrow$ limita neexistuje.

$$\boxed{5} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\substack{\text{omezená} \\ 0 \leq \leq 1}} x^2 + \underbrace{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}_{\substack{\text{omezená} \\ 0 \leq \leq 1}} y^2 = 0$$

$$\boxed{6} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{x}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{omezená}}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{y^2}{x^2 + y^2}}}_{\substack{-1 \leq \leq 1 \\ \text{omezená}}} \cdot \text{sgn } y = 0$$

Alternativní řešení:

Použijeme nerovnost $\pm xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, tedy máme:

Dk: $0 \leq (x \mp y)^2 = x^2 \mp 2xy + y^2$, upravím

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\substack{\text{spojitá} \\ \uparrow (0,0), \\ \text{limitu spočtené dosazemí}}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$\Rightarrow$ Věta o dvou polích $\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

$$\boxed{7} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan x^2 \sin x}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad \varphi(x) \psi(x) = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

kde $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x^2}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

... Víme, že φ, ψ jsou spojitě (viz MA1)

tedy; $(x,y) \mapsto \varphi(x)$
 $(x,y) \mapsto \psi(x)$ jsou spojitě

aritmetika limit
(spojitosť násobení)

$$\boxed{8} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{x^2y^2 \log(x^2+y^2)}$$

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2y^2 \log(x^2+y^2) \quad (*)$$

Použijeme opět $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$:

$$|x^2y^2 \log(x^2+y^2)| \leq \underbrace{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 \log(x^2+y^2)}_{\substack{p \rightarrow 0 \text{ } \|(x,y)\| < 1 \text{ máme } \log(x^2+y^2) < 0}} = f(g(x,y))$$

$$\text{Označme } g(x,y) = x^2+y^2$$

$$f(z) = -\frac{1}{4}z^2 \log z \quad \left| \begin{array}{l} \text{Pak máme, spočítáme limitu:} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(g(x,y)) = \lim_{z \rightarrow 0^+} f(z) = \text{MA1} \end{array} \right.$$

$$\text{VOLSF} = \lim_{z \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4}z^2 \log z \stackrel{MA1}{=} 0$$

$\Rightarrow$ limita (*) vyjde 0, zvětví o dvou polích:

$\Rightarrow$ zespjitosti: exponenciely vyjde limita v zátěži $e^0 = 1$.

$$\boxed{9} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\substack{-1 \leq \sin \leq 1 \text{ omezená}}}$$

$$\boxed{10} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \cos x - \cos y}{x^2+y^2} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2+y^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{o(y^2)}{x^2+y^2}}_{\rightarrow 0} = \frac{1}{2}$$

METRIKÉ PROSTORY II.

$$l_2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

[1] $\overline{B}(0,1)$ není kompaktní v l_2 :

Označme $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-tá složka}}{1}, 0, \dots)$ Pak $\|e_i\|_2 = \sqrt{1^2} = 1$

Tedy $\{e_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}(0,1)$.

Ukážeme, že $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ nemá konvergentní podposloupost:

Platí $\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, pro $i \neq j$.

Takže žádná podposloupost není Cauchyovská, tedy nemá konvergentní.

$\Rightarrow \overline{B}(0,1)$ není kompaktní.

[2] V $\mathbb{R}^n$ máme $\lim_{N \rightarrow \infty} (x_{1,N}, x_{2,N}, \dots, x_{n,N}) = (\lim_{N \rightarrow \infty} x_{1,N}, \dots, \lim_{N \rightarrow \infty} x_{n,N})$
limita v $\mathbb{R}^n$.

Pokud existuje limita vpravo

V l_2 replate: $\lim_{N \rightarrow \infty} (x_{i,N})_{i=1}^{\infty} = (\lim_{N \rightarrow \infty} x_{i,N})_{i=1}^{\infty}$

Vezměme např. $x_N := e_N$

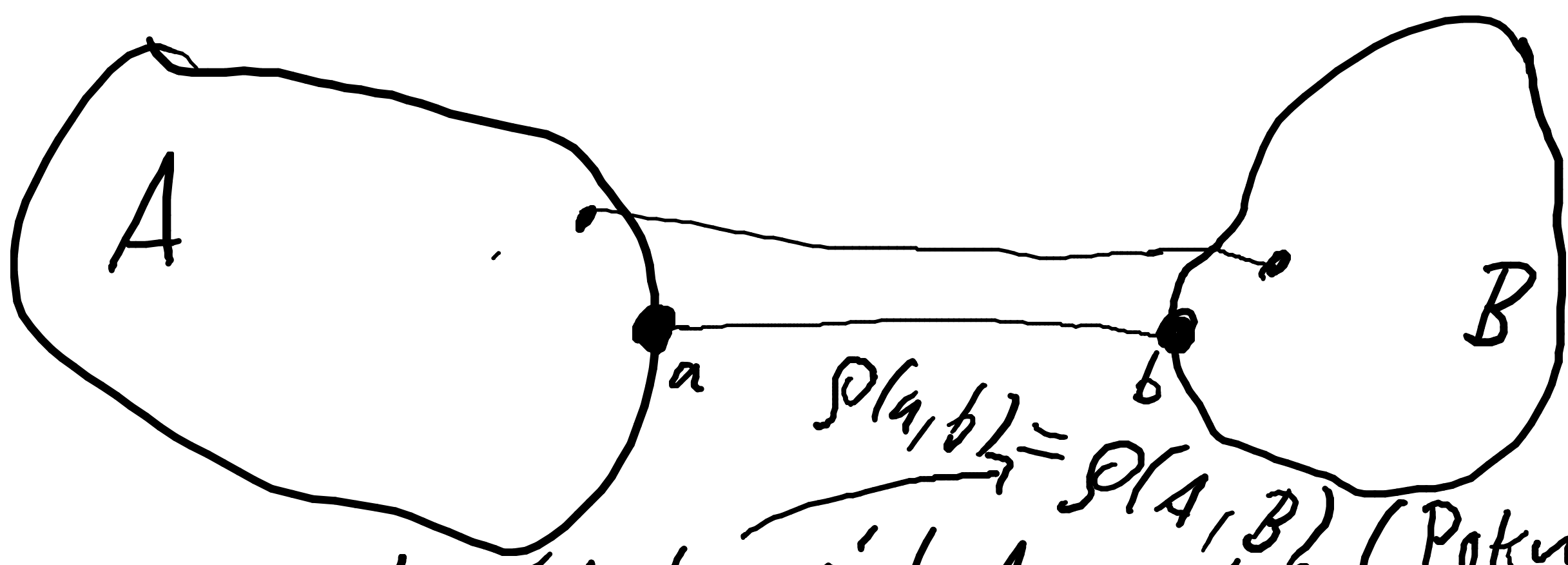
$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \dots)$$

Limita po složkách je $(\lim_{N \rightarrow \infty} (e_N)_i)_{i=1}^{\infty} = (0, 0, 0, \dots)$, ale limita v l_2 neexistuje

[3] (X, ρ) metrický, $A, B \subset X$, vzdálenost množin
můžeme definovat $\rho(A, B) = \inf \{ \rho(a, b) : a \in A, b \in B \}$



Existují takové body a, b ? (Pokud ano, vzdálenost množin A, B je realizována)

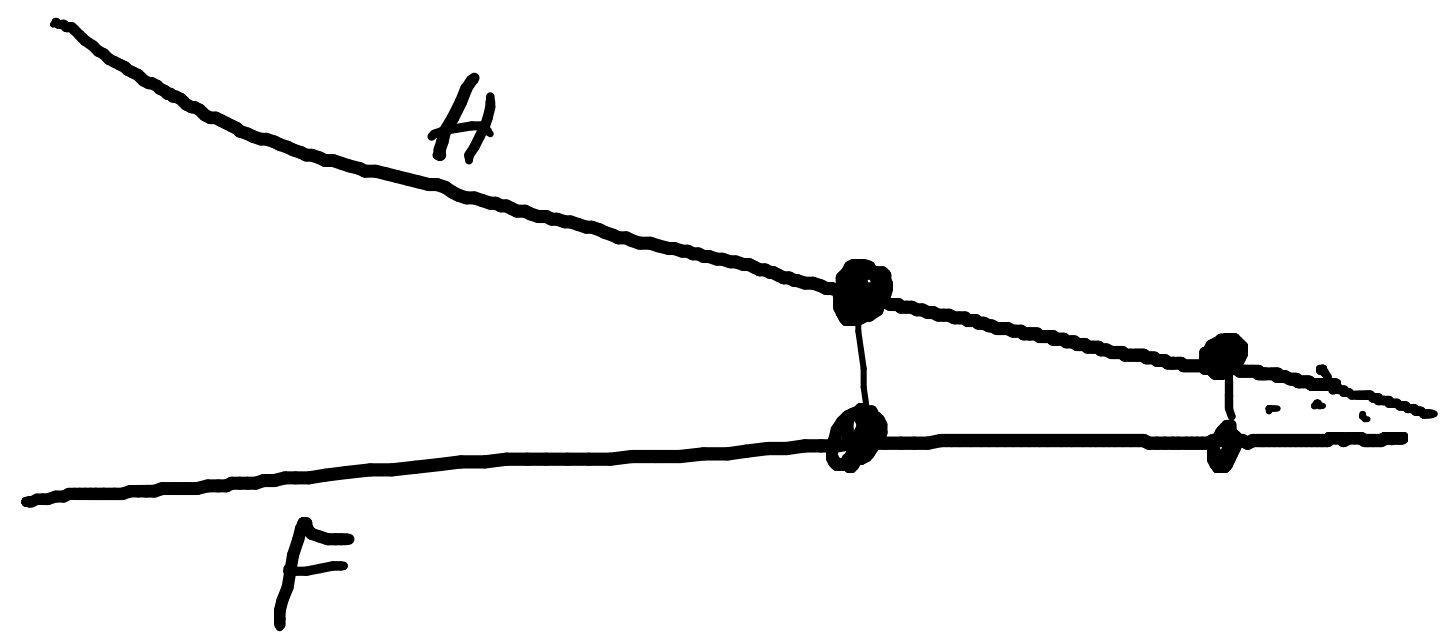
Obecně ne, např.: $\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$

Pak $\rho((0, 1), (2, 3)) = 1$ (protože $1 - \varepsilon, 2 + \varepsilon$
ale neexistují $a \in (0, 1)$, mají vzdálenost $1 + 2\varepsilon$,
 $b \in (2, 3)$, $|a - b| = 1$... libovolně malé)
... vzdálenosti se nemohou blížit

(a) $F, H \subset \mathbb{R}^2$ uzavřené, $\rho(F, H) = 0$, vzdálenost není realizována

$$F = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$H = \{ (x, e^{-x}) : x \in \mathbb{R} \}$$



• $\rho(F, H) = 0$: $\| (x, 0) - (x, e^{-x}) \| = e^{-x}$... libovolně malé
($\inf \{ e^{-x} : x \in \mathbb{R} \} = 0$)

$F = \pi_2^{-1}(\{0\})$... uzavřená
↑
projekce na 2. složku, spojitá

$H = g^{-1}(F)$, kde $g(x, y) = (x, y - e^{-x})$... spojitá
tedy H též uzavřená.

(b) $K \subset \ell_2$ kompaktní, $F \subset \ell_2$ uzavřená,
jejichž vzdálenost není realizována

$$K = \{0\}, \text{ zde } 0 = (0, 0, \dots)$$

$$F = \{(1 + \frac{1}{n})e_n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ zde } e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n-tá pozice}}}{1}, 0, \dots)$$

• K je kompaktní, protože je jednobodová

• F je uzavřená: $\forall x, y \in F, x \neq y: \|x - y\|_2 = \|(1 + \frac{1}{n})e_n - (1 + \frac{1}{m})e_m\|_2$
 $= \sqrt{(1 + \frac{1}{n})^2 + (1 + \frac{1}{m})^2} \geq \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ každá konvergentní posloupnost prvků z F je
odněkud konstantní $\Rightarrow F$ je uzavřená

$$\rho(K, F) = \inf \{ \underbrace{\|0 - (1 + \frac{1}{n})e_n\|_2}_{= 1 + \frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \} = \underline{\underline{1}}$$

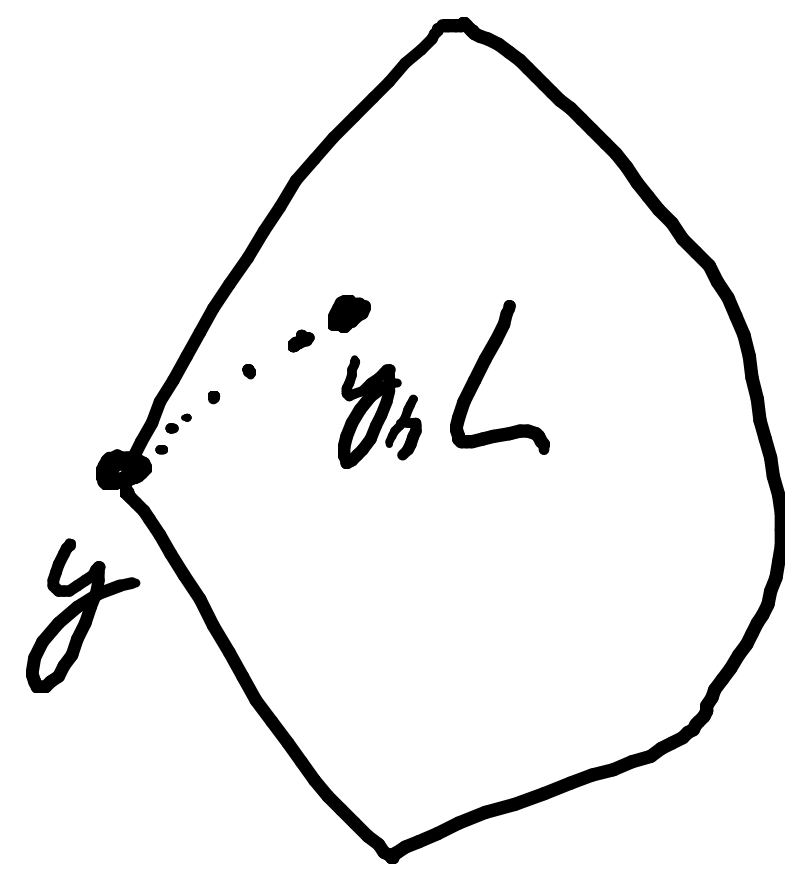
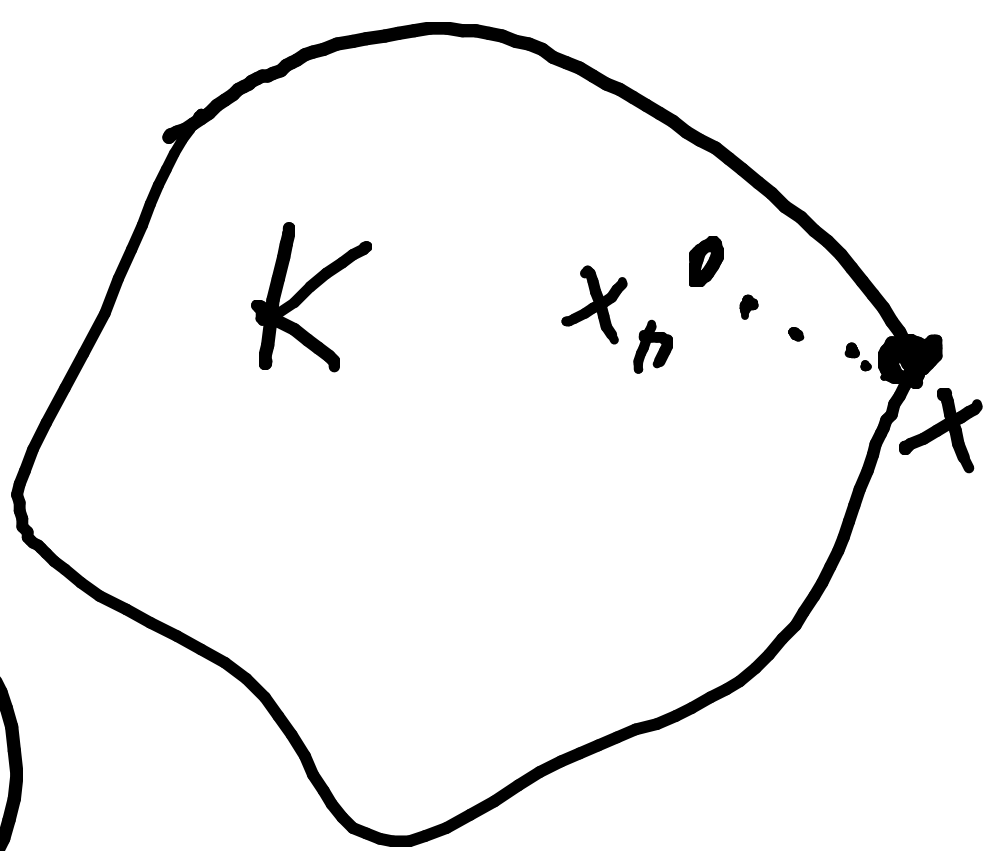
• Vzdálenosti se nenabývá, protože $\|0 - (1 + \frac{1}{n})e_n\| =$
 $= 1 + \frac{1}{n} > 1.$

(c) $K, L \subset X$ kompaktní (X, ρ) metrický

$\Rightarrow$ vzdálenost je realizována

Důkaz

Vezmeme $x_n \in K$
 $y_n \in L$, t.č.



$$\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(K, L)$$

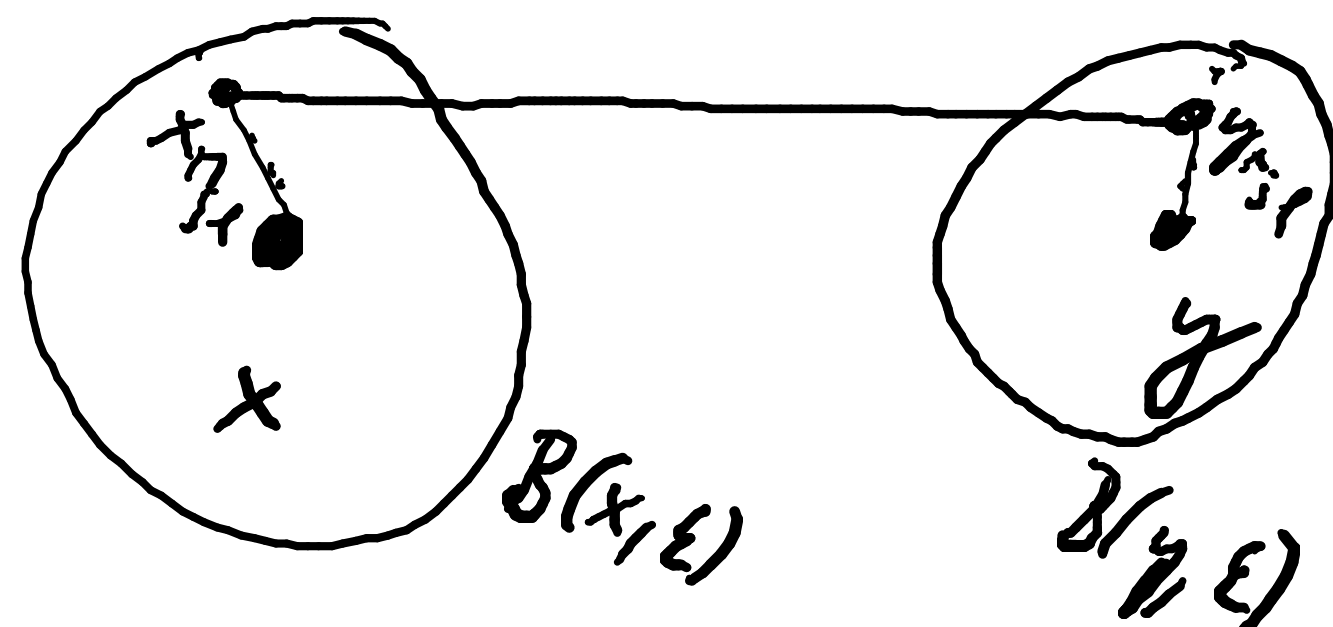
K kompaktní $\Rightarrow$ $\overline{\{x_n\}}$ vybereme $x_{n_{j_l}} \rightarrow x \in K$.

L kompaktní $\Rightarrow$ $\overline{\{y_{n_{j_l}}\}}$ vybereme $y_{n_{j_{l_2}}} \rightarrow y \in L$.

Pak platí $x_{n_{j_{l_2}}} \rightarrow x \in K$.

Tvrdíme, že $\rho(x, y) = \rho(K, L)$:

Platí:



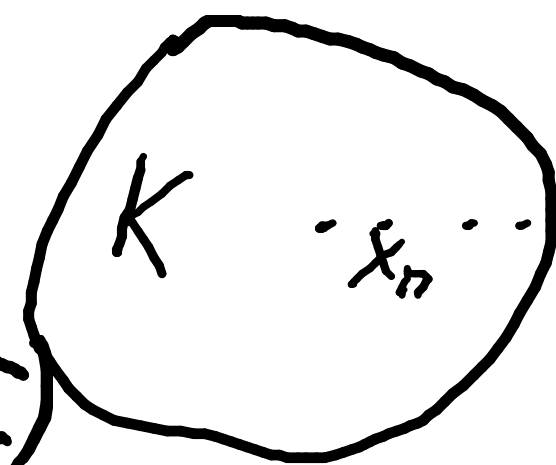
$$\rho(x, y) \leq \underbrace{\rho(x, x_{n_{j_{l_2}}})}_{\xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\rho(x_{n_{j_{l_2}}}, y_{n_{j_l}})}_{\xrightarrow{l \rightarrow \infty} \rho(K, L)} + \underbrace{\rho(y_{n_{j_l}}, y)}_{\xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0}$$

Navíc $\rho(x, y) \geq \rho(K, L)$ je zřejmé z definice.

(d) $F \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená
 $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní $\} \Rightarrow$ jejich vzdálenost:
 se nabývá.

Důkaz

Vezme $x_n \in K$ t.ž. $\lim p(x_n, y_n) = p(K, F)$
 $y_n \in F$,



Z kompaktnosti K vybereme $x_{n_j} \rightarrow x \in K$.

Pokažeme, že $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$ je omezená ✓

$$\|y_{n_j} - x\| \leq \underbrace{\|y_{n_j} - x_{n_j}\|}_{\leq p(K, F) + 1} + \underbrace{\|x_{n_j} - x\|}_{\leq 1 \text{ pro } j \text{ dost velké}}$$

pro j dost velké

$\Rightarrow$ Z (y_{n_j}) vybereme konvergentní podposloupcost
 (Iže, z omezenosti a toho, že jsme v $\mathbb{R}^n$.)

$y_{n_{j_k}} \rightarrow y \in \mathbb{R}^n$, F je uzavřená $\Rightarrow y \in F$.

• $\|x - y\| = p(K, F)$... jako v (c)

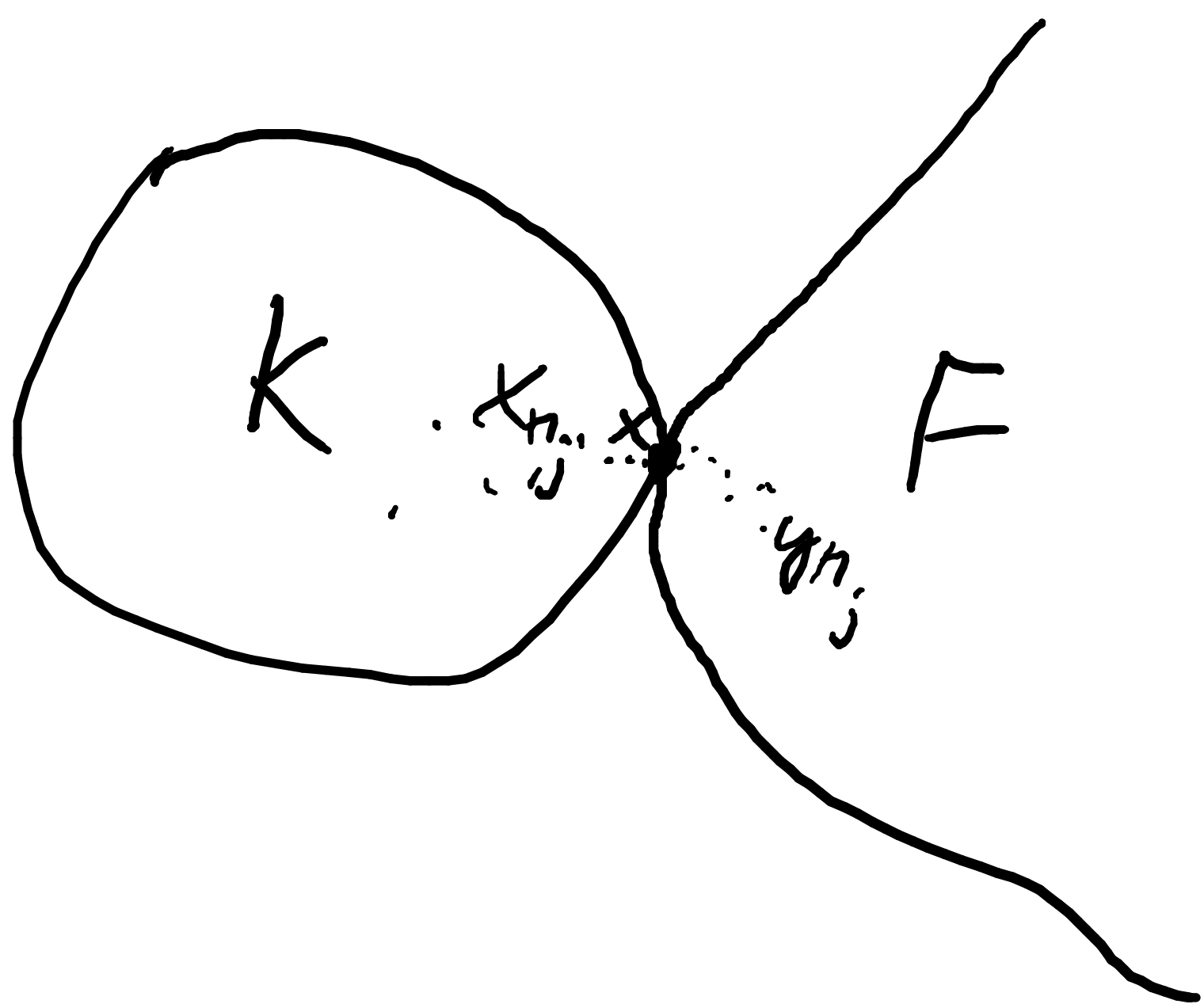
(c) $K \subset X$ kompaktní (X, ρ) metrický,
 $F \subset X$ uzavřená
 $\rho(K, F) = 0 \Rightarrow$ vzdálenost se snižuje, tzn. $K \cap F \neq \emptyset$.

Důkaz $\rho(K, F) = 0 \Rightarrow$ vezmeme $x_n \in K$
 $y_n \in F$, $\lim \rho(x_n, y_n) = 0$.

Vezmeme $x_{n_j} \rightarrow x \in K$. Pak ukážeme, že $\rho(x, F) = 0$:

$$\rho(x, F) \leq \rho(x, y_{n_j}) \leq \underbrace{\rho(x, x_{n_j})}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho(x_{n_j}, y_{n_j})}_{\rightarrow 0}$$

F je uzavřená $\Rightarrow$ obsahuje všechny body nulové vzdálenosti:
 $\Rightarrow x \in F \Rightarrow F \cap K \neq \emptyset$.

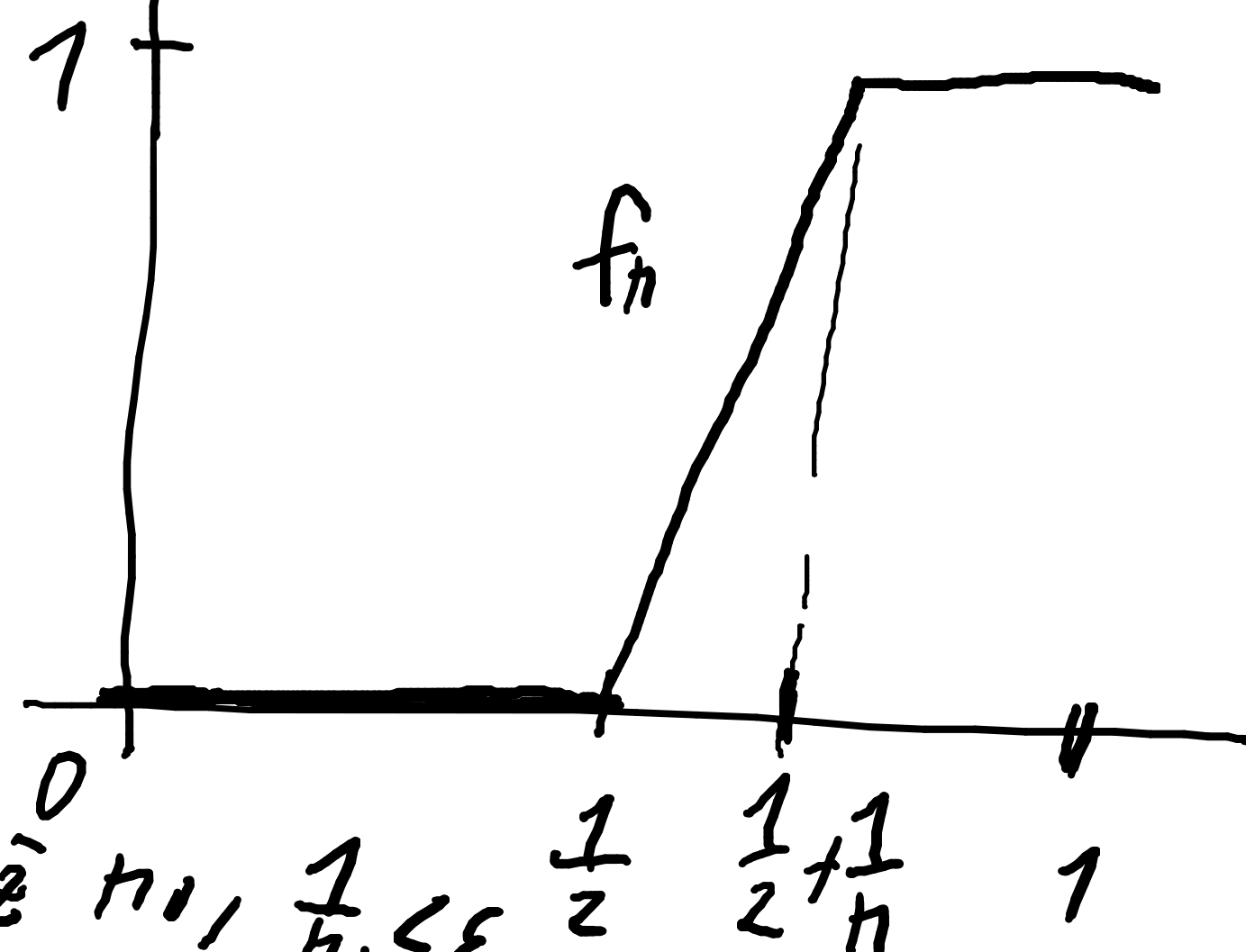


4 $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ není úplný.

Důkaz: Najdeme Cauchyovskou posloupnost $(f_n) \subset C([0,1])$

kteří nemá limitu:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(x - \frac{1}{2}) & x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



• (f_n) je Cauchyovská: Zvolme $\epsilon > 0$, položme n_0 , $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Pak pro $n, m \geq n_0$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{n_0}$

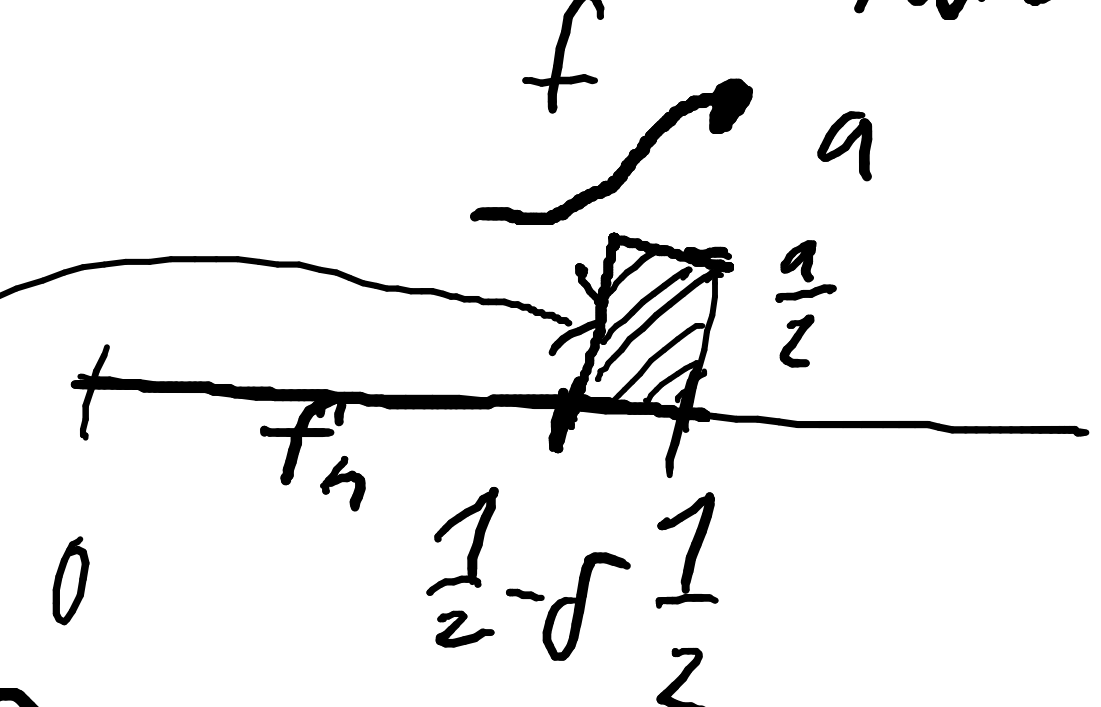
$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n_0}} 1 dx = \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

$\Rightarrow (f_n)$ je Cauchy ✓

• (f_n) nemá limitu: Zvolme $f \in C([0,1])$, dokážeme $f_n \not\rightarrow f$.

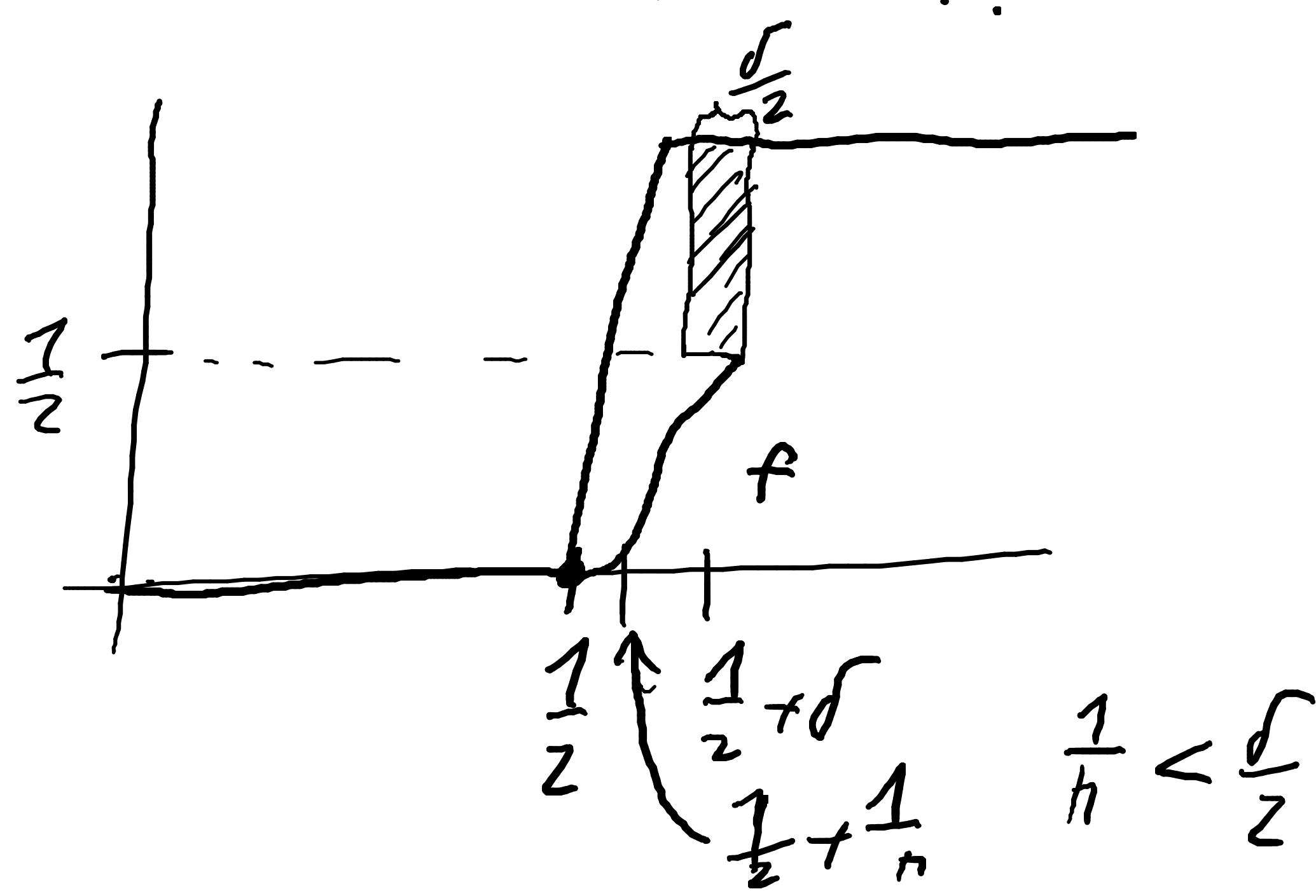
i) Pokud $f(\frac{1}{2}) = a > 0$: Pak $f(x) \geq \frac{a}{2}$ na $[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}]$ (ze spojitosti) pro nějaké $\delta > 0$.

$$\Rightarrow \|f - f_n\|_1 = \int_0^1 |f - f_n| \geq \int_{\frac{1}{2} - \delta}^{\frac{1}{2}} (f_n - f) \geq \frac{\delta a}{2} \Rightarrow f_n \not\rightarrow f.$$



ii) Pokud $f(\frac{1}{2}) = 0$:

Podobně, obrázkem:

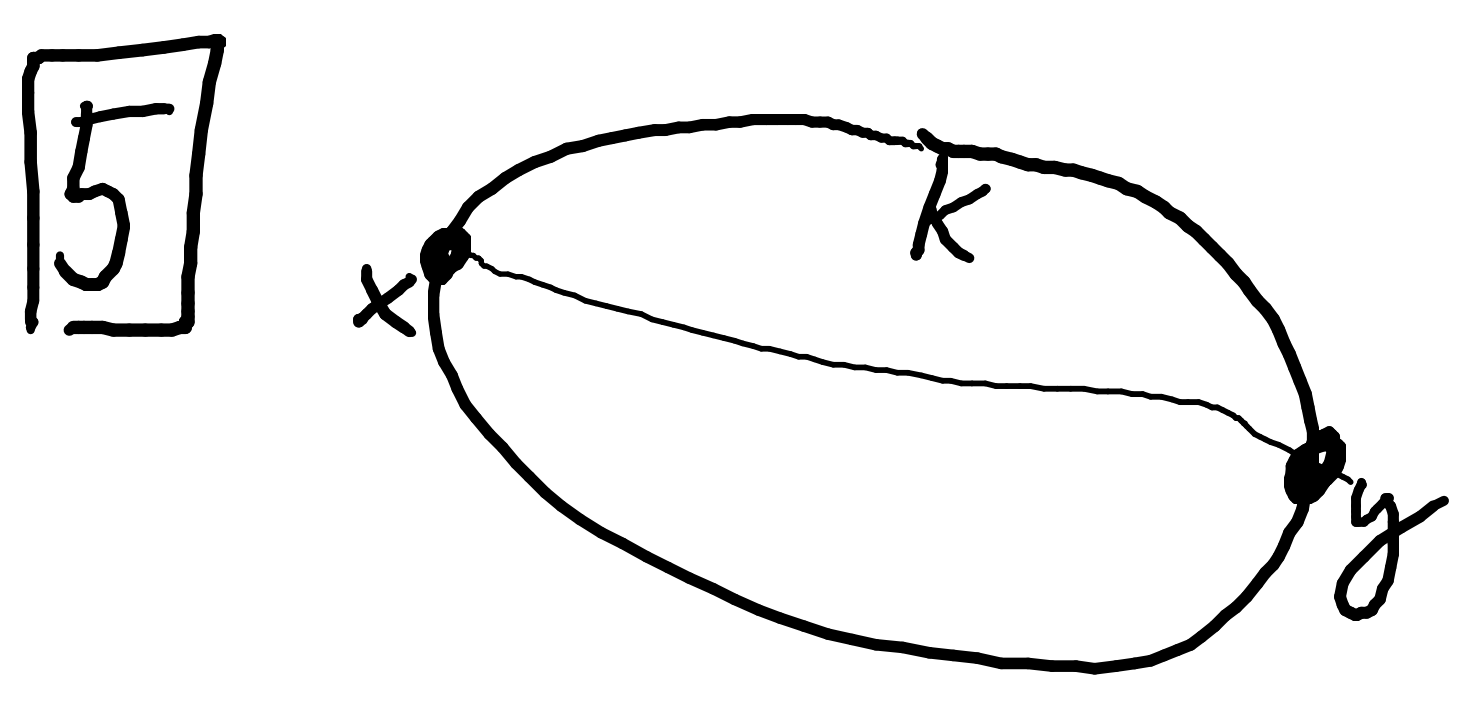


$$\|f - f_n\|_1 = \dots$$

Pozorámka Zúplněný prostor $C([0,1])$ v normě $\|\cdot\|_1$ je prostor $L^1([0,1])$.

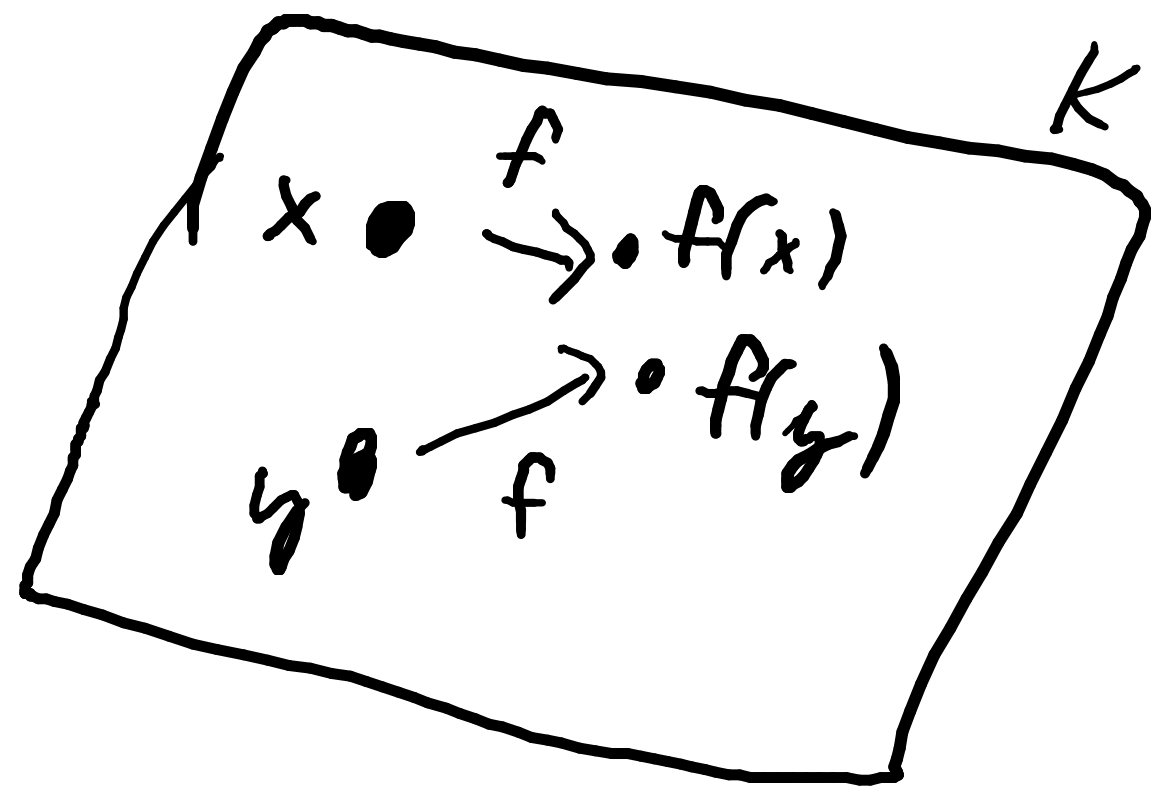
(tzn. $\overline{C([0,1])}^{\|\cdot\|_1} = L^1([0,1])$)

Viz Teorie míry a integrálu.



Podobný argument jako 2(c).

[6] $f: K \rightarrow K$, K kompaktní, $\forall x, y \in K, x \neq y: \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ (*)



(a) f má pevný bod... pro zájeme ve skriptech

(b) Pokud $f: X \rightarrow X$, X úplný, pak f nemusí mít pevný bod:

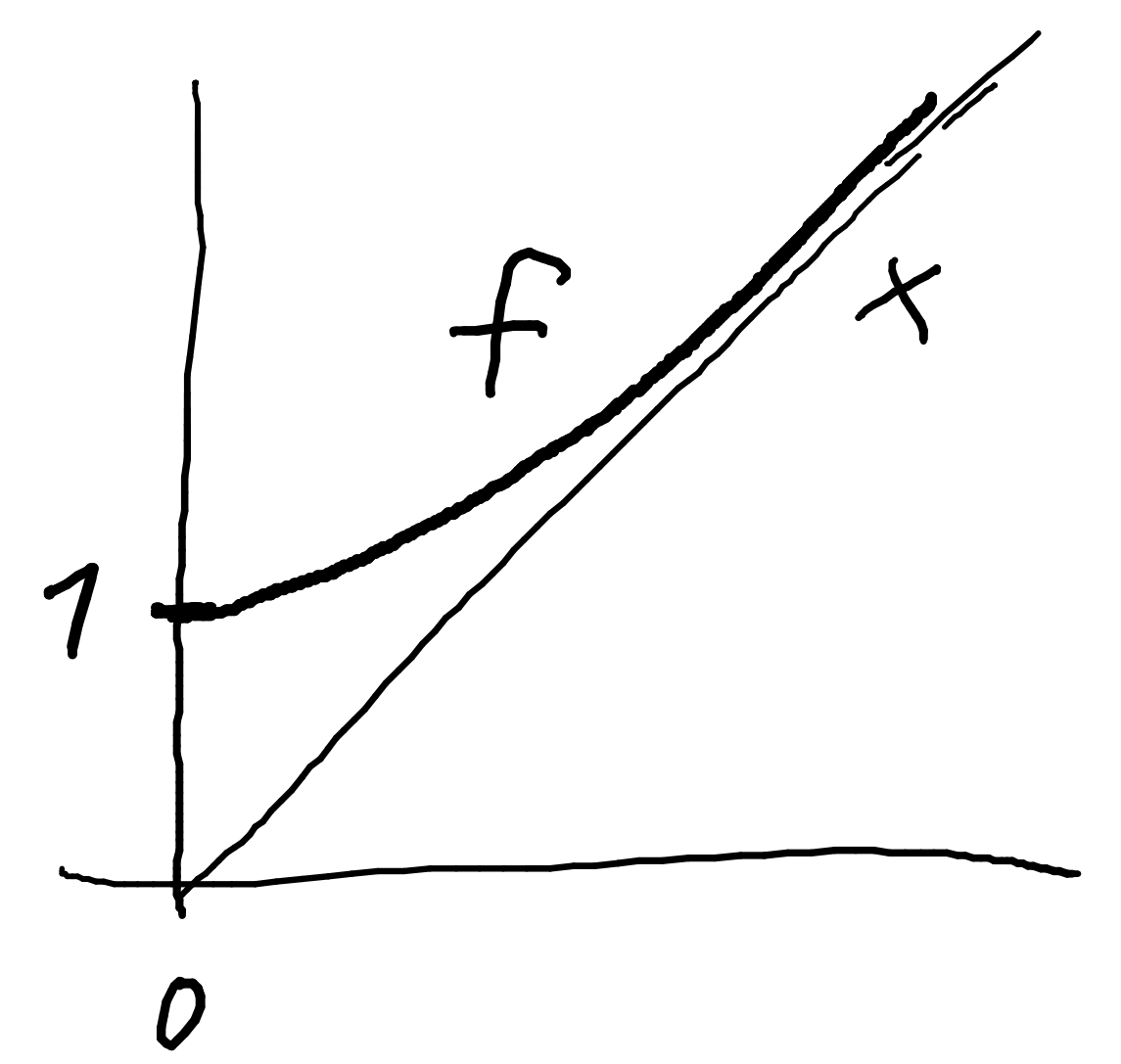
Např: $X = [0, \infty)$... úplný prostor ($X \subset \mathbb{R}$ uzavřený a $\mathbb{R}$ úplný)

$$f(x) = x + e^{-x}$$

• $f(x) \neq x \quad \forall x \in X$... nemá pevný bod

• $x, y \in X$: $\swarrow$ Buď $0 \leq x \leq y$

$$|f(x) - f(y)| = \underbrace{x - y}_{< 0} + e^{-x} - e^{-y} < x - y = |x - y| \dots (*) \text{ platí.}$$



DERIVACE FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

$$\boxed{1} \quad \frac{\partial}{\partial x} (x^m y^n) = m x^{m-1} y^n, \quad \frac{\partial}{\partial y} (x^m y^n) = n x^m y^{n-1} \\ x, y \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} = y e^{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = x e^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{3} \quad \frac{\partial}{\partial x} (xy + yz + zx) = y + z \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (xy + yz + zx) = x + z$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (xy + yz + zx) = y + x$$

$$\boxed{4} \quad f(x, y) = |xy| = xy \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y$$

$$i) \quad x \neq 0, y \neq 0: \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y = |y| \operatorname{sgn} x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y = |x| \operatorname{sgn} y.$$

$$ii) \quad x \neq 0, y = 0: \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \frac{d}{dt} f(t, 0) \Big|_{t=x} = \frac{d}{dt} 0 \Big|_{t=x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{d}{dt} f(x, t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} x \cdot |t| \Big|_{t=0}$$

• derivace funkce $t \mapsto |t|$ pro $t=0$ neexistuje.

• $x \neq 0$

$$iii) \quad x = 0, y \neq 0: \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \text{ neexistuje (jako ii)} \quad \text{)}$$

$$iv) \quad x = y = 0:$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{d}{dt} f(t, 0) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} 0 \Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{analogicky}$$

$$\boxed{5} \quad f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z = e^{z \log \frac{x}{y}} \quad D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: xy > 0\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{z \log \frac{x}{y}} \cdot z \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 \quad \begin{matrix} z \in \mathbb{R} \\ xy > 0, \end{matrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^{z \log \frac{x}{y}} \cdot z \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^{z \log \frac{x}{y}} \cdot \log \frac{x}{y}$$

$$\boxed{6} \quad f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}} = e^{\frac{y}{z} \log x} \quad D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x > 0, z \neq 0\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{\frac{y}{z} \log x} \cdot \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^{\frac{y}{z} \log x} \cdot \frac{1}{z} \log x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^{\frac{y}{z} \log x} \cdot \frac{-y}{z^2} \log x$$

$$\boxed{7} \quad f(x, y) = \sqrt{x + y^2} \quad D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y^2 \geq 0\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x + y^2}} \cdot 2y$$

$$x + y^2 > 0$$

Pro $x + y^2 = 0$ parc. derivácie

neexistujú (nemáme definitívny

jednosmerný / nevlastný vektor).

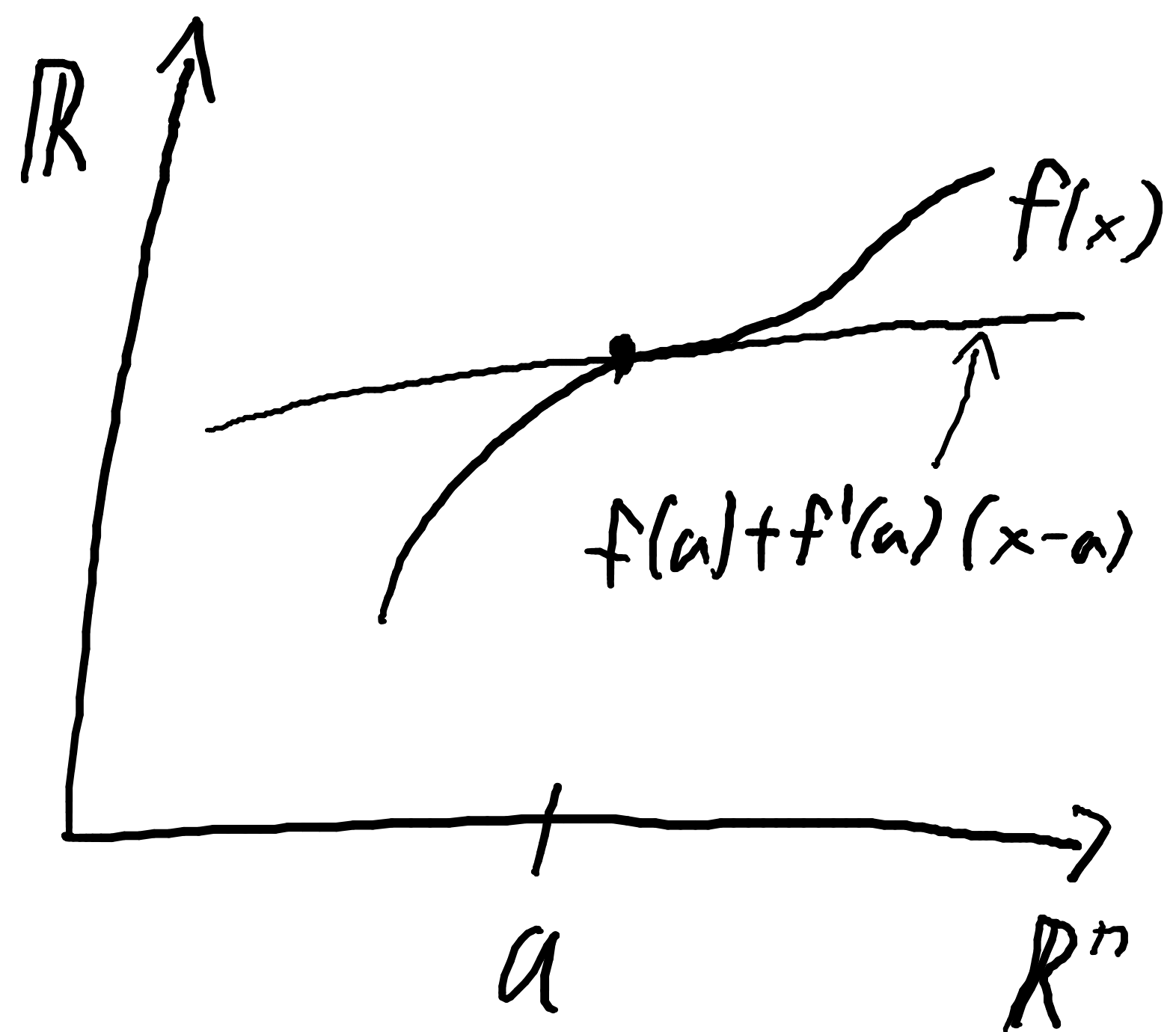


Točková diferenciál

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^n$$

$\rightarrow f'(a)$ je lineární zobr. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t. z.:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)}{\|h\|} = 0$$



Víme: I) Pokud $f'(a)$ existuje, má tvar: $f'(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h$ (věta 12.1)

II) $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ spojitě $\forall a \Rightarrow f'(a)$ existuje
 $\Leftarrow$

$$\boxed{8} \quad f(x, y) = x^2 y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Partiální derivace jsou spojitě na $\mathbb{R}^2$ (spec. v $(0,0)$)
 $\Rightarrow f'(0,0)$ existuje

$$I) \Rightarrow f'(0,0)(h) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_0 \cdot h_1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_0 \cdot h_2 = 0, \quad h \in \mathbb{R}^2.$$

V obecném bodě $a \in \mathbb{R}^2$: $f'(a)$ existuje, protože

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojitě $\forall a$ (II). $a = (a_1, a_2)$

Tvar $f'(a)$: $h \in \mathbb{R}^2$.

$$I) \Rightarrow f'(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 = 2a_1 a_2^3 h_1 + 3a_1^2 a_2^2 h_2.$$

9) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ je spojitá v $(0,0)$

$\left[\forall \text{me } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \right]$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dt} f(t,0) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} 0 \Big|_{t=0} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dt} f(0,t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} 0 \Big|_{t=0} = 0.$$

Značíme:
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g'(a) = \frac{d}{dt} g(t) \Big|_{t=a}$

Zatím vlně z I): Pokud existuje $f'(0,0)$,

ma' tvar: $f'(0,0)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0.$

Tedy stačí ověřit, zda $L(h) = 0$ splňuje

definici tot. diferenciálu; tedy zda existuje limita a je nulová:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - L(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} =$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1^2 h_2}{\underbrace{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}_{g(h_1, h_2)}} =$$

$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = 0 \rightarrow$ nerozraji se $\Rightarrow$ limita neexistuje
 $\Rightarrow L$ není tot. d. f. f. v $(0,0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f'(0,0) \text{ neexistuje.}$$

Alternativní argumentace, proč $f'(0,0)$ neexistuje:

$$\left[\text{III) } D_v f(a) = f'(a)(v), \quad v \in \mathbb{R}^n, \text{ pokud } f'(a) \text{ existuje.} \right]$$

$\uparrow$ derivace f ve směru v .

$$D_{(1,1)} f(0,0) = \frac{d}{dt} f(t,t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{t^3}{2t^2} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{t}{2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

Pokud by $f'(0,0)$ existoval, tak:

$$\frac{1}{2} = D_{(1,1)} f(0,0) \stackrel{\text{III)}}{=} f'(0,0)(1,1) \stackrel{\text{I)}}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_0 \cdot 1 + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_0 \cdot 1 = 0.$$

$\Rightarrow f'(0,0)$ neexistuje.

10 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ spojitá.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dt} f(t,0) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} 0 \Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dt} f(0,t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{t^3}{|t|} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} t^2 \cdot \operatorname{sgn} t \Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \operatorname{sgn} h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn} h}_{\text{omez.}} = 0.$$

$\mathbb{I}_2$

$\Rightarrow$ Potenci $f'(0,0)$ existuje, má tvar $L(h_1, h_2) = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0$.

Ověříme, že splňuje definici:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - L(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_2^3}{h_1^2 + h_2^2} = 0. \quad (\text{viz příklady na limitě})$$

$\Rightarrow f'(0,0)$ existuje a $f'(0,0) = L$.

$$\boxed{11} \quad f(x, y) = |xy|$$

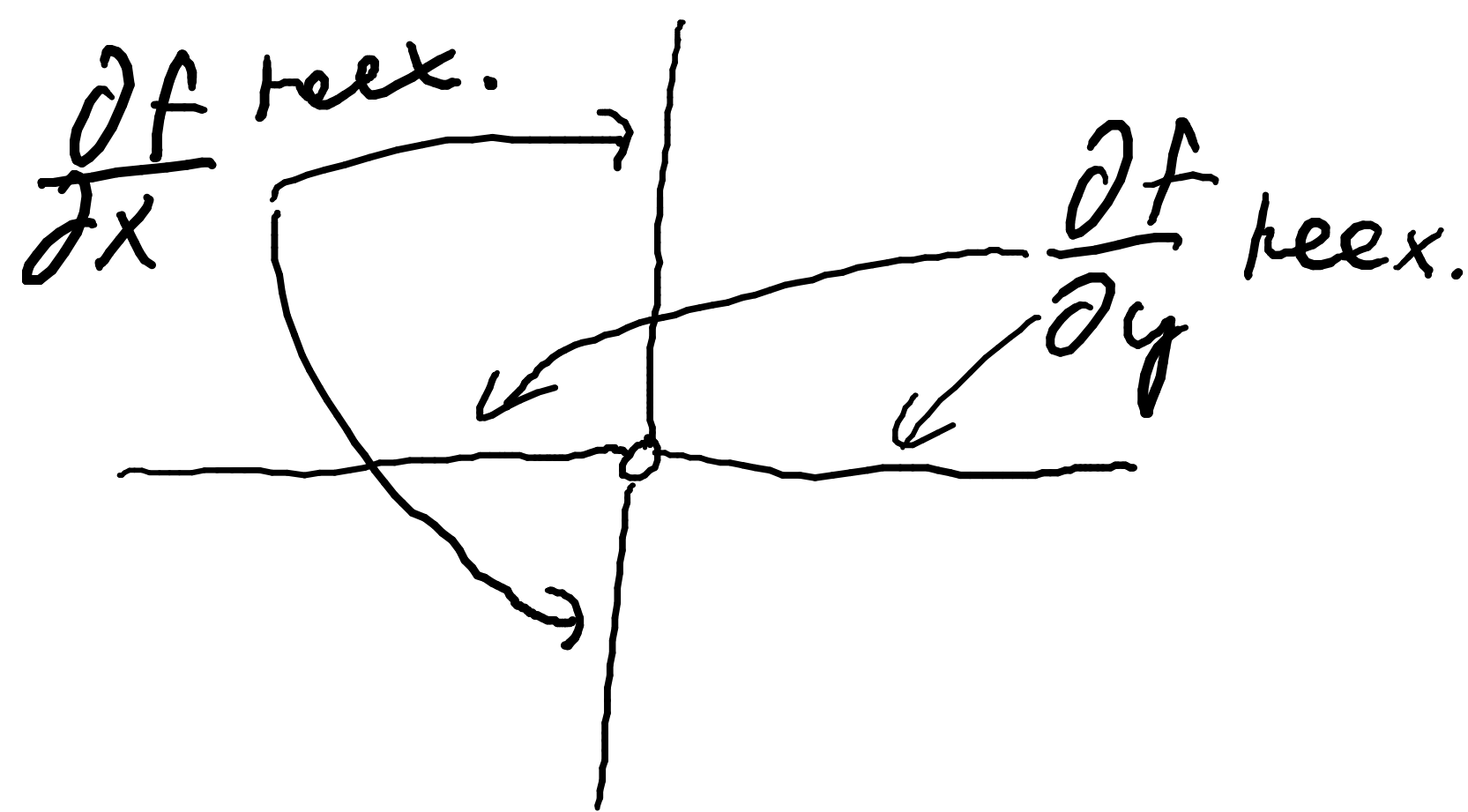
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Overline{f}'ine, že $L(h_1, h_2) = 0$ je tot. dif:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_1 h_2| - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \quad \leftarrow (\text{limity } \boxed{6})$$

$\Rightarrow f'(0,0)$ existuje, přestože $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ neexistují
na žádném (celém) okolí $(0,0)$.



$$\boxed{13} \quad f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dt} \sqrt[3]{t^3 + 0^3} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} t \Big|_{t=0} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dt} \sqrt[3]{0^3 + t^3} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} t \Big|_{t=0} = 1.$$

$$D_{(1,1)} f(0,0) = \frac{d}{dt} \sqrt[3]{2t^3} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} t \sqrt[3]{2} \Big|_{t=0} = \sqrt[3]{2}$$

Pokud by $f'(0,0)$ existoval, pak

$$\sqrt[3]{2} = D_{(1,1)} f(0,0) = f'(0,0)(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot 1 = 2$$

což neplatí $\Rightarrow f'(0,0)$ neexistuje.

Komentář. Zde $D_v f(0,0)$ existuje ve všech směrech $v \in \mathbb{R}^n$.

Důvod neexistence $f'(0,0)$ je ten, že zobrazení

$v \mapsto D_v f(0,0)$ není lineární. Geometricky řečeno:

V bodě $(0,0)$ existují tečné přímky ve všech směrech, avšak tyto přímky dohromady netvoří rovinnu.

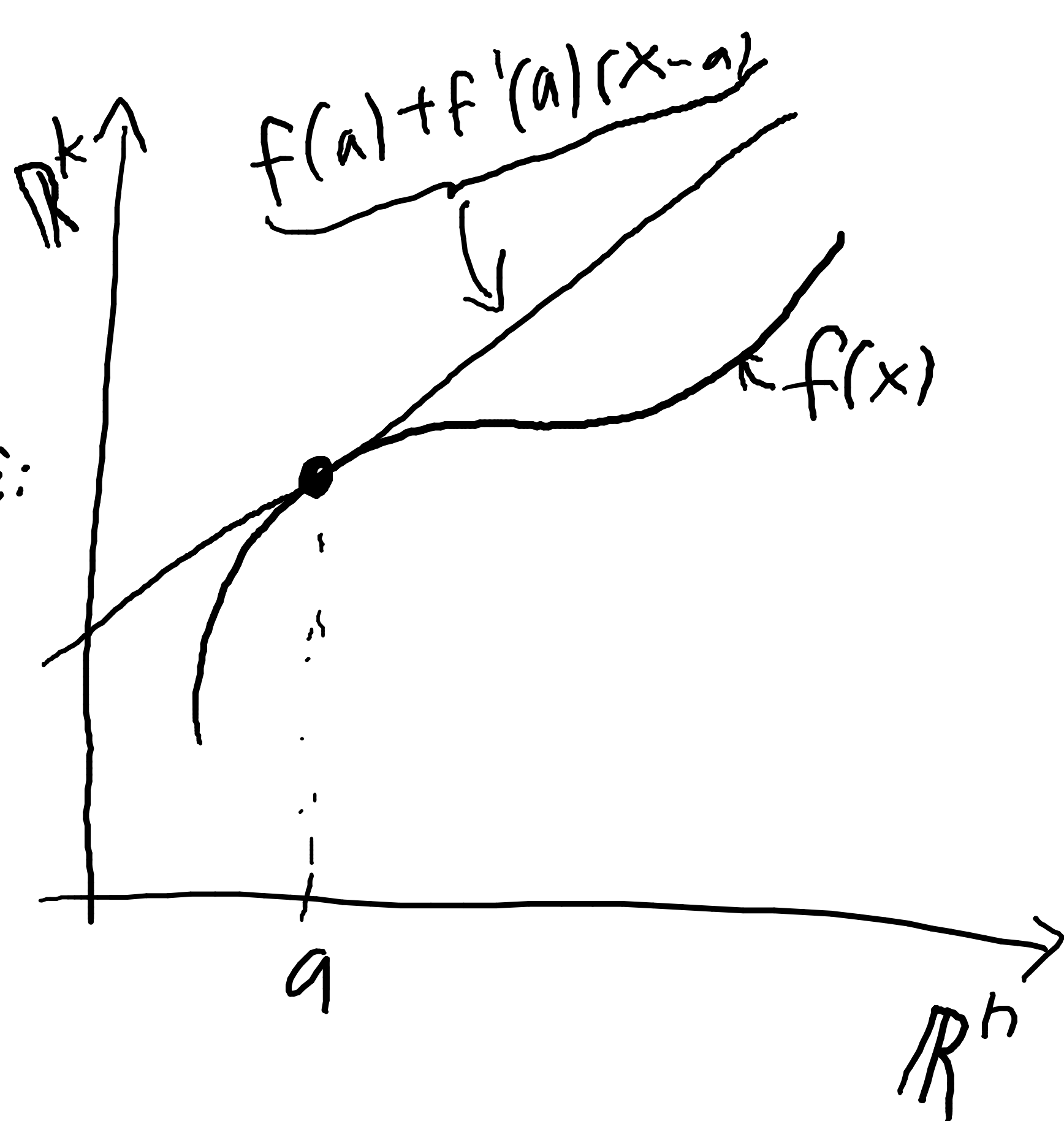
Alternativně: Overit, že $L(h_1, h_2) = 1 \cdot h_1 + 1 \cdot h_2$ nesplňuje definici tot. dif.

Derivace zobrazení: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, a \in \mathbb{R}^n$$

$\hookrightarrow f'(a)$ je lin. zobr. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ t.ž:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)\|}{\|h\|} = 0$$



Při powerbii:

▷ lineární zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \approx$ matice $L \in \mathbb{R}^{k \times n}$
(se sloupci: $L(e_1), \dots, L(e_n)$)

▷ matice $A \in \mathbb{R}^{k \times n} \approx$ lineární zobrazení $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $A(x) := Ax.$

▷ skládání lin. zobr. $\times$ násobení matic

Víme: $f'(a)$ existuje $\Rightarrow f'(a) \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$

Úmluva: značím „ $\approx$ “ značím:
„má reprezentující matici“.

Derivace složeného zobrazení: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s, a \in \mathbb{R}^n$

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a), \text{ pokud existují}$$

skládání lin. zobr. ($\approx$ násobení matic)

Řetězové pravidlo Příklad $s=1$, maticové násobení rozepsáno

po složkách:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial g(f(a))}{\partial x_1} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g(f(a))}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_i}$$

15 $h(x_1, x_2) = g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, $\frac{\partial h}{\partial x_1}(1, 0) = ?$, $\frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = ?$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad f = (f_1, f_2) \quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

$$h = g \circ f$$

$$g(y_1, y_2) = y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + e^{y_2}$$

Vnitřní fce: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1 \end{array} \right\} \text{spojitě v } (1, 0)$$

$$\Rightarrow f'(1, 0) \text{ existuje, má matici } \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1, 0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1, 0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vnější fce: $\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1, y_2) = 2y_1 y_2 + y_2^2$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2}(y_1, y_2) = y_1^2 + 2y_1 y_2 + e^{y_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{spojitě} \\ \text{v } f(1, 0) = (0, 2) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow g'(0, 2) \text{ existuje, má matici } \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(0, 2) \quad \frac{\partial g}{\partial y_2}(0, 2) \right) = (4 \quad e^2)$$

(řádkový vektor)

$$\Rightarrow \text{existuje } h'(1, 0) = g'(0, 2) \circ f'(1, 0) \approx (4 \quad e^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2e^2 \quad 4 + e^2) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(1, 0) \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) \right)$$

Alternativně, pomocí řetězového pravidla:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(0, 2) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(0, 2) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1, 0) = 4 \cdot 0 + e^2 \cdot 2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(0, 2) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(0, 2) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1, 0) = 4 \cdot 1 + e^2 \cdot 1$$

16 $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, $\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = ?$, $\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = ?$

$$u(x,y) = x \cos y - 1$$

$$v(x,y) = y \sin x$$

• $f'(0,0)$ existuje,

• $\nabla f(0,0) = (2, 7)$

tzn. $\frac{\partial f}{\partial z_1}(0,0) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial z_2}(0,0) = 7$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \sin x$$

} spojitě
 $\Rightarrow$ existuje
 $(u,v)'(1,0)$

$$u(1,0) = 0$$

$$v(1,0) = 0$$

Můžeme použít řetězové pravidlo:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(0,0) \frac{\partial u}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial z_2}(0,0) \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) =$$

$$= 2 \cdot \cos 0 + 7 \cdot 0 = 2$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(0,0) \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial z_2}(0,0) \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) =$$

$$= 2 \cdot (-1 \cdot \sin 0) + 7 \cdot \sin 1 = 7 \sin 1$$

12 $h(x,y) = g(\overbrace{x^2 - y^2, e^{xy}, \sin x + \cos y}^{=: f(x,y)}), \quad \nabla h(0,0) = ?$

• $g'(0,1,1)$ existuje, $\nabla g(0,1,1) = (3, -2, 1)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \cos x$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -\sin y$$

spočítajte

$$\Rightarrow \exists f'(0,0)$$

$$f(0,0) = (0, 1, 1)$$

$\Rightarrow$ Fetižkaní pravidlo lze použít

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) =$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) =$$

19 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $g'(1,0) \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
 $(g \circ f)'(0,0,0)$?

• $f'(0,0,0)$? $f(x,y,z) = (x^2 + e^y + z, \sin x + z^2)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \cos x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^y \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 2z$$

Spojitě

$\Rightarrow \exists f'(0,0,0)$,

$$f'(0,0,0) \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Derivace složeného zobrazení:

$$(g \circ f)'(0,0,0) = g'(\underbrace{f(0,0,0)}_{(1,0) \text{ existují}}) \circ \underbrace{f'(0,0,0)}_{\uparrow} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

$$\left[(g \circ f): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \right]$$

20 $f(x,y,z) = ((x+1)(y+1)^2(z+1)^3, \sin x \cos(y+2z))$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$g'(1,0) \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (a) $(g \circ f)'(0,0,0)$?

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = (y+1)^2(z+1)^3 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2(x+1)(y+1)(z+1)^3 \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 3(x+1)(y+1)^2(z+1)^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \cos x \cos(y+2z) \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\sin x \sin(y+2z) \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -2\sin x \sin(y+2z)$$

So, $f'(0,0,0) \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) $(g \circ f)'(0,0,0) = g'(\underbrace{f(0,0,0)}_{(1,0)}) \circ \overset{\text{existência}}{\underbrace{f'(0,0,0)}} \approx$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $D_{(2,0,1)} f_1(0,0,0) = ?$

f_1 má total diferencial $\vee (0,0,0)$

$$\begin{aligned} D_{(2,0,1)} f_1(0,0,0) &\Downarrow (2,0,1) \cdot \nabla f_1(0,0,0) = \\ &= (2,0,1) \cdot (1,2,3) = 2 + 0 + 3 = 5. \end{aligned}$$

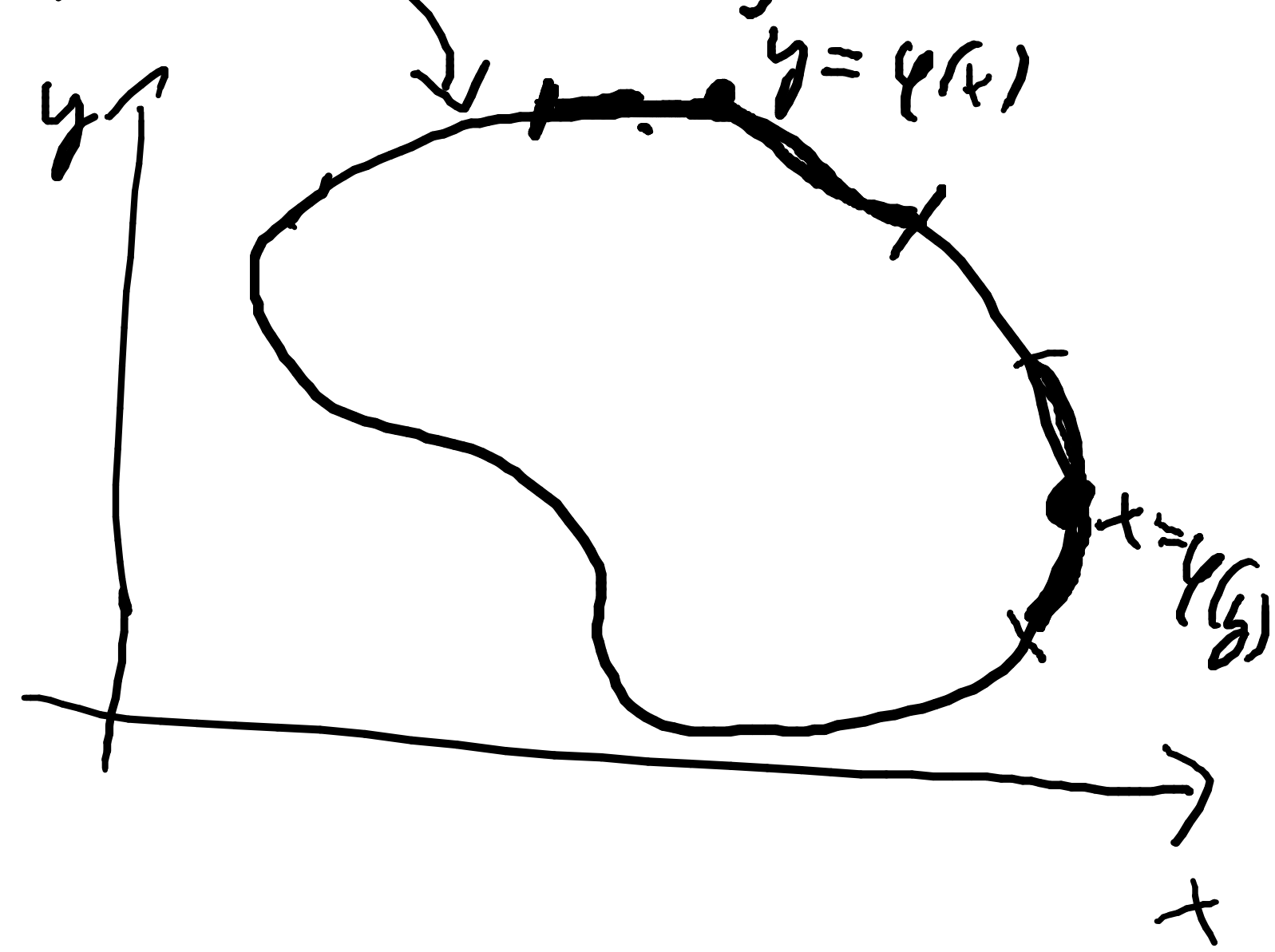
IMPLICITNĚ ZADANÉ FUNKCE

Mějme $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $N=n+1$

Otázka Lze množinu $M := \{z \in \mathbb{R}^N : F(z) = 0\}$ popsat jako graf funkce (n proměnných)? $M = \{F=0\}$

Ano, za jistých podmínek, alespoň lokálně

Např: $\mathbb{R}^2$:



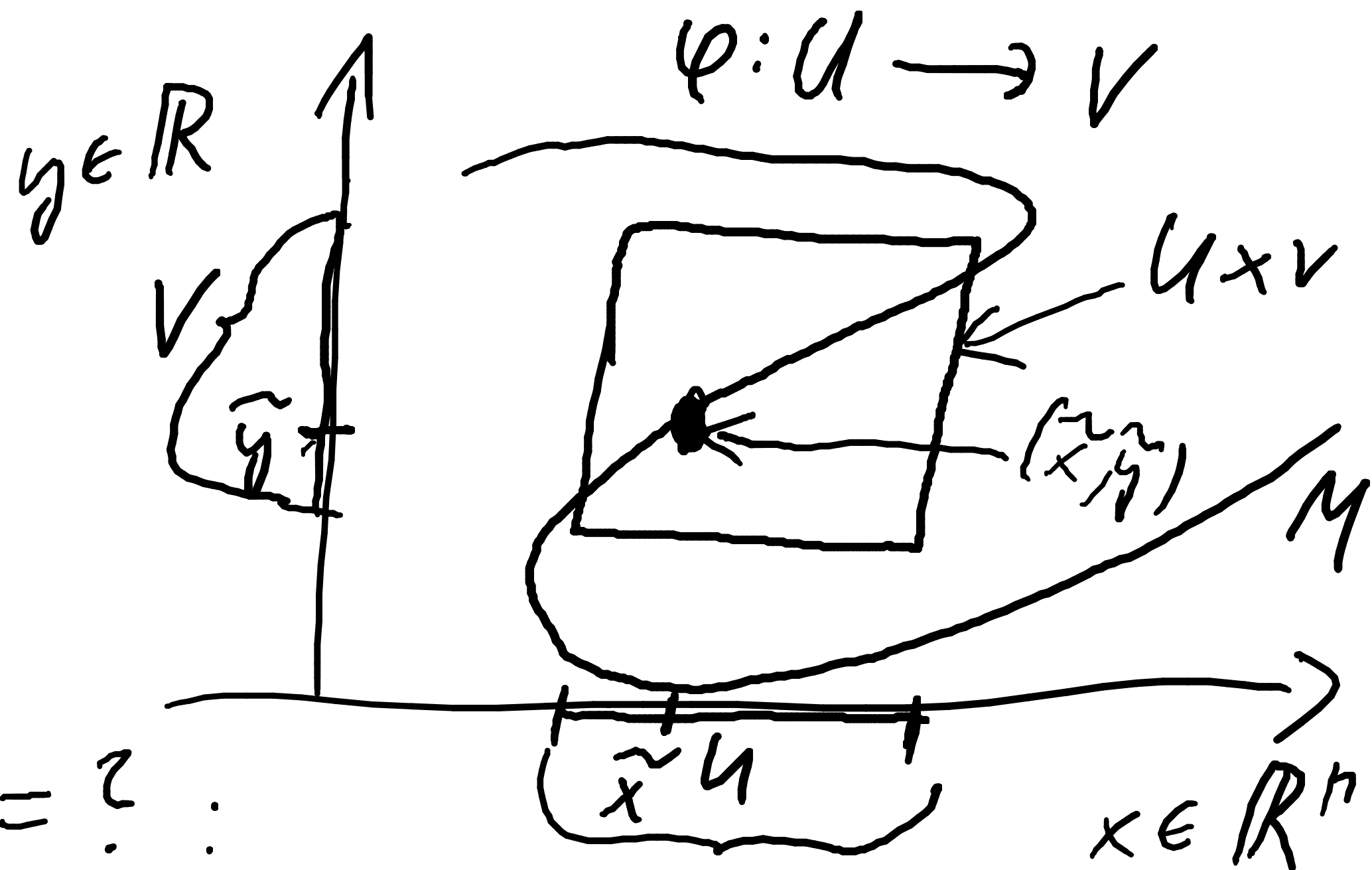
VOIF: (i) F je C^1

$$(ii) \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{\tilde{x}}, \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{\tilde{y}} = 0$$

$$(iii) \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ okolí U bodu $\tilde{x}$,
 $\exists$ okolí V bodu $\tilde{y}$:

$M \cap (U \times V)$ je
graf nějaké funkce



Můžeme spočítat $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tilde{x}) = ?$:

$$\text{Takto: } F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \in U \quad / \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = 0$$

$$\text{Dosaďme } x := \tilde{x}, \text{ tzn. } \varphi(\tilde{x}) = \tilde{y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tilde{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}$$

$$\boxed{1} \quad \underbrace{x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5}_{F(x,y)} = 0, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 1)$$

i) Dokažte, že existuje okolí U bodu $\tilde{x}$, V bodu $\tilde{y}$,
a funkce $\varphi: U \rightarrow V$ t.ž: $F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ (*)
 $\forall x \in U, \forall y \in V:$

Ověříme předpoklady VOLF:

• F je C^1 na okolí $(0, 1)$: $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 4xy + 4y^3 - 5y^4$
spojité na $\mathbb{R}^2$

• $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(0, 1) = 0$ ✓

• $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 0 + 4 \cdot 1 - 5 = -1 \neq 0$ ✓

VOLF $\Rightarrow$ existuje funkce φ splňující (*).

ii) Spočítejte $\varphi'(\tilde{x})$, $\varphi''(\tilde{x})$: (z předpok. $F \in C^2$)

Ze vzorce na předchozí straně: $\varphi'(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = \frac{-2}{-1} = 2.$

Pokud si vzorec nepřipomeneme: zopakujme jeho odvození:

$$F(x, \varphi(x)) = x^2 + 2x\varphi(x)^2 + \varphi(x)^4 - \varphi(x)^5 = 0, \quad x \in U \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

$$(**) \quad 2x + 2\varphi(x)^2 + 2x \cdot 2\varphi'(x)\varphi(x) + 4\varphi(x)^3\varphi'(x) - 5\varphi(x)^4\varphi'(x) = 0$$

Dosadíme $x := \tilde{x} = 0$, $\varphi(x) := \tilde{y} = 1$: $0 + 2 + 0 + 4\varphi'(0) - 5\varphi'(0) = 0$
 $\Rightarrow \varphi'(0) = 2.$

Druhá derivace $\varphi''(0)$: Zderivujeme vztah (**) podle x :

$$2 + 4\varphi(x)\varphi'(x) + 4\varphi'(x)\varphi(x) + 4x\varphi''(x)\varphi(x) + 4x\varphi'(x)^2 +$$

$$+ 12\varphi(x)^2\varphi'(x)^2 + 4\varphi(x)^3\varphi''(x) - 20\varphi(x)^3\varphi'(x)^2 - 5\varphi(x)^4\varphi''(x) = 0$$

Dosadíme: $x=0$, $\varphi'(x)=2$, $\varphi(x)=1$: $2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 0 + 0 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot \varphi''(0) - 20 \cdot 4 - 5\varphi''(0) = 0 \Rightarrow \varphi''(0) = -14$

Poznámka V úlohách pro přehlédnost
můžeme místo $y = y(x)$ psát $y = y(x)$.

$$\boxed{2} \quad e^{xy} + \sin y + y^2 = 1, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (2, 0)$$

$$F(x, y) = e^{xy} + \sin y + y^2 - 1$$

• $F \in C^1$ na okolí $(2, 0)$: $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y e^{xy}$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x e^{xy} + \cos y + 2y$$

• $F(2, 0) = 0$ ✓

• $\frac{\partial F}{\partial y}(2, 0) = 2 \cdot 1 + 1 + 0 = 3 \neq 0$ ✓

$\nabla F \neq 0 \Rightarrow$ na okolí bodu $(2, 0)$ lze psát $y = y(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$

Spočítáme $y'(2), y''(2)$: (lze, protože $F \in C^2$)

Derivaci dostaneme: $e^{xy}(1 \cdot y + x \cdot y') + (\cos y)y' + 2y y' = 0$

Dosadíme $\left. \begin{array}{l} x := 2, y := 0 \\ y' = y'(2) \end{array} \right\} \Rightarrow e^0(0 + 2y'(2)) + 1 \cdot y'(2) + 0 = 0$
 $\Rightarrow y'(2) = 0$.

Druhá derivace: $e^{xy}(y + x y')^2 + e^{xy}(y' + y' + y'') +$
 $-\sin y (y')^2 + (\cos y) y'' + 2y' + 2y y'' = 0$

Dosadíme $\left. \begin{array}{l} x := 2 \\ y = 0 \\ y' = y'(2) = 0 \\ y'' = y''(2) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \cdot (0 + 2 \cdot 0)^2 + 1(0 + 0 + y''(2))$
 $- 0 + 1 \cdot y''(2) + 0 + 0 = 0$
 $\Rightarrow y''(2) = 0$.

$$\boxed{11} \quad \underbrace{x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9}_{F(x,y,z)} = 0$$

Dokažte že na okolí $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (1, -2, 1)$ lze
 z vyjádřit jako implicitní funkci $z = z(x, y)$,
 $\frac{\partial z}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\frac{\partial z}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = ?$

- $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓

- $F(1, -2, 1) = 0$ ✓

- $\frac{\partial F}{\partial z}(1, -2, 1) = 6z - 1 \Big|_{(x,y,z)=(1,-2,1)} = 5 \neq 0$ ✓

Volíme $\Rightarrow$ Na okolí $(1, -2, 1)$ je $z = z(x, y)$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}:} \quad 2x + 6z \frac{\partial z}{\partial x} + y - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\text{Dosadíme: } \left. \begin{array}{l} (x, y) := (1, -2) \\ z := z(1, -2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 6 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) - 2 - \frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}:} \quad 4y + 6z \frac{\partial z}{\partial y} + x - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\text{Dosadíme } \left. \begin{array}{l} (x, y) := (1, -2) \\ z = z(1, -2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -8 + 6 \frac{\partial z}{\partial y}(1, -2) + 1 - \frac{\partial z}{\partial y}(1, -2) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, -2) = \frac{7}{5}$$

Věta o implicitně zadaných funkcích - vektorová verze

$$F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad N = n + m, \quad (\underbrace{\tilde{x}}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{\tilde{y}}_{\mathbb{R}^m})$$

VOIF: $\circ F \in C^1(\text{okolí}(\tilde{x}, \tilde{y}))$

$\circ F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

$\circ \det \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right)_{i,j=1}^m \neq 0$

... derivace zobrazení $F(\tilde{x}, \cdot)$ v bodě $\tilde{y}$.
 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \exists U \text{ okolí } \tilde{x}, V \text{ okolí } \tilde{y}, \text{ t. z. } \{z \in \mathbb{R}^N: F(z) = 0\} \cap (U \times V) = \text{graf } \varphi,$

pro nějaké $\varphi: U \rightarrow V$, t. z. $\varphi \in C^1$.

Lze počítat $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}, \tilde{y})$ derivací vztahu $F(x, \varphi(x)) = 0$

14 $x e^{u+v} + 2uv = 1$
 $y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$

$(\underbrace{\tilde{x}}_{\text{"x"}}, \underbrace{\tilde{y}}_{\text{"y"}}, \underbrace{\tilde{u}}_{\text{"u"}}, \underbrace{\tilde{v}}_{\text{"v"}}) = (1, 2, 0, 0)$

"x" "y" z VOIF

$n = 2, m = 2$

Dokažte, že na okolí bodu $(1, 2, 0, 0)$ lze u, v popsat

jako funkce $u = u(x, y), v = v(x, y)$, spočítejte $\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}), \frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}), \frac{\partial v}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}), \frac{\partial v}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})$

$$F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} x e^{u+v} + 2uv - 1 \\ y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x \end{pmatrix}, \quad \text{bad} \quad (1, 2, 0, 0)$$

$$\bullet G = \mathbb{R}^3 \times (-1, \infty) \quad (1, 2, 0, 0) \in G$$

$$F \in C^1(G) \quad \checkmark$$

$$\bullet F(1, 2, 0, 0) = (0, 0) \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = x e^{u+v} + 2v$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = x e^{u+v} + 2u$$

$$(x, y, u, v) \in G.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = y e^{u-v} - \frac{1}{1+v}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v} = -y e^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$\bullet \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1, 2, 0, 0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1, 2, 0, 0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1, 2, 0, 0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1, 2, 0, 0) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Vollf} \Rightarrow u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad \text{na okoli} (1, 2, 0, 0).$$

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial x}} : 1 \cdot e^{u+v} + x e^{u+v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} v + 2u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F_2}{\partial x}} : y e^{u-v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (1+v) - u \frac{\partial v}{\partial x}}{(1+v)^2} - 2 = 0.$$

$$\text{Deshalb } x=1 \quad u(1,2)=0 \\ y=2 \quad v(1,2)=0:$$

$$1 + \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) + 0 + 0 = 0$$

$$2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) - \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) \right) - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)}{2} - 2 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) + \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -1$$

$$\Rightarrow 3 \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -3 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) - 2 \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 0.$$

$\frac{\partial}{\partial y} \dots$ analogisch

$$\boxed{17} \quad \begin{aligned} u &= \arctg(\pi x) + y^2 z \\ v &= e^{-x} + 2 \frac{y}{z} \\ w &= \cos(2xy) + 2\sqrt{z} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) &= (4, \frac{3}{2}, 5) \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= (0, 1, 4) \end{aligned}$$

? x, y, z $\vee y$ dit zijn functies van x, y, z .

$$\nabla g(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = ?$$

$$F(u, v, w, x, y, z) = \begin{pmatrix} \arctg(\pi x) + y^2 z - u \\ e^{-x} + 2 \frac{y}{z} - v \\ \cos(2xy) + 2\sqrt{z} - w \end{pmatrix}$$

$$G = \mathbb{R}^5 \times (0, \infty), \quad (4, \frac{3}{2}, 5, 0, 1, 4) \in G.$$

$$\bullet F \in \mathcal{C}^1(G) \quad \checkmark$$

$$\bullet F(4, \frac{3}{2}, 5, 0, 1, 4) = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\pi x)^2} \pi \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = y^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -e^{-x} \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{2}{z} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -2 \frac{y}{z^2}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = -2y \sin(2xy) \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = -2x \sin(2xy) \quad \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} & 5 & 0 & 1 & 4 \\ u & v & w & x & y & z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \pi & 8 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \pi & 8 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 8 \right) = \frac{\pi}{4} + 4 \neq 0 \quad \checkmark$$

VOLF $\Rightarrow$ na okolí $(4, \frac{3}{2}, 5, 0, 7, 4)$ máme

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

Dále chceme $\nabla y(a) = ?$
 $(4, \frac{3}{2}, 5)$

Derivujeme:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial u}}: \frac{1}{1+(\pi x)^2} \pi \frac{\partial x}{\partial u} + 2y \frac{\partial y}{\partial u} z + y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - 1 = 0$$

$$-e^{-x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + 2 \frac{\frac{\partial x}{\partial u} z - \frac{\partial z}{\partial u} y}{z^2} - 0 = 0$$

$$-\sin(2xy) 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} y + x \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

Dosadíme: $u=4$ $x=0$

$$v = \frac{3}{2} \quad y=7$$

$$w=5 \quad z=4$$

$$\pi \frac{\partial x}{\partial u}(a) + 8 \frac{\partial y}{\partial u}(a) + \frac{\partial z}{\partial u}(a) - 1 = 0$$

$$- \frac{\partial x}{\partial u}(a) + \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial u}(a) - \frac{1}{8} \frac{\partial z}{\partial u}(a) = 0$$

$$a := (4, \frac{3}{2}, 5)$$

$$0 + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u}(a) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}(a) = 0$$

$$\pi \frac{\partial x}{\partial u}(a) + 8 \frac{\partial y}{\partial u}(a) = 1$$

$$- \frac{\partial x}{\partial u}(a) + \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial u}(a) = 0$$

$\leftarrow +\pi$

$$\left(8 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\partial y}{\partial u}(a) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial u}(a) = \frac{2}{16 + \pi}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial v}}$$

...

Poznámka obecný vzorec pro $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ (píšeme $y(x) := \varphi(x)$)

$$\text{Máme } F(x, y(x)) = 0, \quad x \in U$$

Derivujeme podle $x \in \mathbb{R}^n$ (vlevo je funkce $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \circ \underbrace{y'(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

$$\Rightarrow y'(x) = - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))$$

$$x := \tilde{x}: \quad y'(\tilde{x}) = - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Po složkách tedy:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = - \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right]_{i,k}^{-1} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

... složky inverzní matice,
kterou stejně musíme
spočítat.

$$\boxed{15} \quad \begin{aligned} x &= u \cos \frac{v}{u} \\ y &= u \sin \frac{v}{u} \end{aligned}$$

$$(x, y, u, v) = (1, 0, 1, 0)$$

$$F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} u \cos \frac{v}{u} - x \\ u \sin \frac{v}{u} - y \end{pmatrix}$$

$$\bullet F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \times \mathbb{R})$$

$$\bullet F(1, 0, 1, 0) = (0, 0)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial u} &= \cos \frac{v}{u} + u \left(-\sin \frac{v}{u} \right) \cdot \frac{-v}{u^2} \\ &= \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = -\sin \frac{v}{u}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial u} &= \sin \frac{v}{u} + u \cos \frac{v}{u} \cdot \frac{-v}{u^2} \\ &= \sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v} = \cos \frac{v}{u}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}}: \quad \frac{\partial u}{\partial x} \cos \frac{v}{u} - u \sin \frac{v}{u} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial x} u - u \frac{\partial v}{\partial x}}{u^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sin \frac{v}{u} + u \cos \frac{v}{u} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial x} u - v \frac{\partial u}{\partial x}}{u^2} = 0$$

Posons $x=1$: $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) - 1 = 0$
 $y=0$
 $u=1$
 $v=0$

$$0 + \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) &= 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) &= 0. \end{aligned}$$

EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Máme $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, hledáme maxima a minima f na M .

Připomenutí: $\left. \begin{array}{l} M \text{ kompaktní} \\ f \text{ spojitá} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existují } \min_M f, \max_M f$

Věta (nutná podmínka) f má ^{lokální} extrém v bodě $a \in \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ nebo neexistuje.

(Tedy: pokud $\nabla f \neq 0$ na $\text{int} M$, pak extrém bodem je dle

1 $f(x,y) = x+y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2 \leq 1\}$

- $M = \overline{B}(0,1)$ je uzavřená jednotková koule, tedy je kompaktní.
- f je spojitá na M . $\Rightarrow f$ nabývá maxim i minima.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \Rightarrow f \text{ nemá extrém uvnitř } M, \text{ tedy musí nabývat extrém na}$$

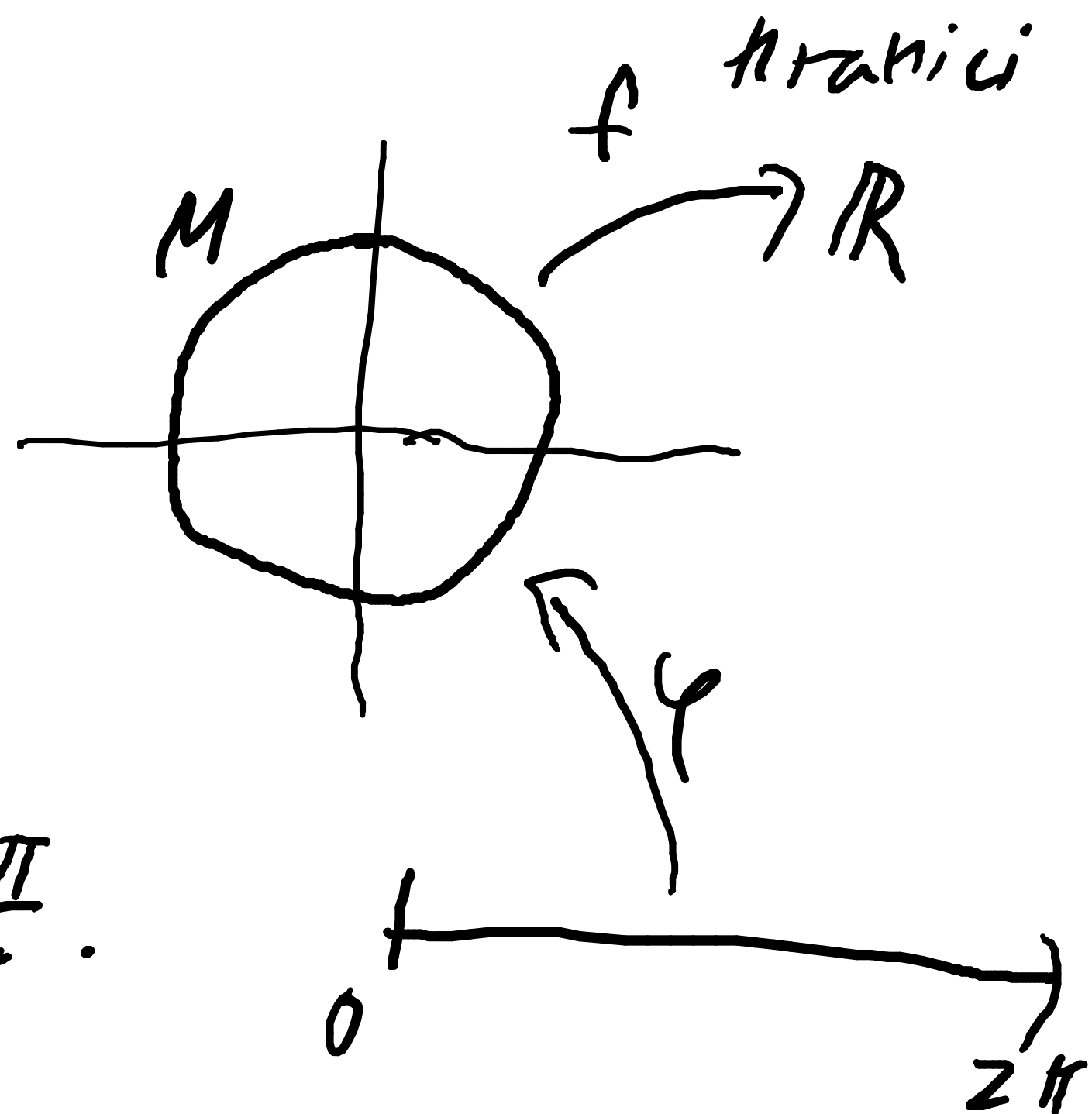
zparametrizujeme hranici

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\text{Položíme } g(t) = f(\varphi(t)) = \cos t + \sin t$$

$$g'(t) = -\sin t + \cos t, \text{ Tedy } g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow g \text{ může nabývat extrém v bodech } 0, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, 2\pi.$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Dosazením zjistíme: } g(0) = 1 \quad \dots \text{ maximum} \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \dots \text{ maximum} \\ g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad \dots \text{ minimum} \end{array} \right\}$$

Závěr: f má v bodě $(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ maximum $\sqrt{2}$
v bodě $(\cos(\frac{5\pi}{4}), \sin(\frac{5\pi}{4})) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ minimum $-\sqrt{2}$.

$$\boxed{2} \quad f(x, y) = e^x, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$

• M je uzavřená $\left[M = g^{-1}([-\infty, 1]) \right]$, M omezená: $M \subset B(0, 1)$
 $g(x, y) = x^2 + 2y^2 \dots$ spoj. $\Rightarrow M$ kompaktní.

• f spojitá $\Rightarrow f$ nabývá extrémů.

$\nabla f(x, y) = (e^x, 0) \neq (0, 0) \dots$ extrém není uvnitř M .

Parametrizujeme hranici $\varphi(t) = (\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$.

$$g(t) = f(\varphi(t)) = e^{\cos t}$$

$$g'(t) = -\sin t e^{\cos t} = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0, \pi.$$

$$t = 0: \quad f(1, 0) = e^1 \quad \dots \text{ maximum}$$

$$t = \pi: \quad f(-1, 0) = e^{-1} \quad \dots \text{ minimum}$$

3 $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

$\nabla f(x,y) = (2x, 1) \neq (0,0)$... extrém
nem' uvnitř.

$M \subset [0,1]^2$
M uzavřená } M komp.
 f spojit. $\Rightarrow \exists$ extrém.

Parametrizace hranice:

$g_1(t) = f(t,0) = t^2$, $t \in [0,1]$

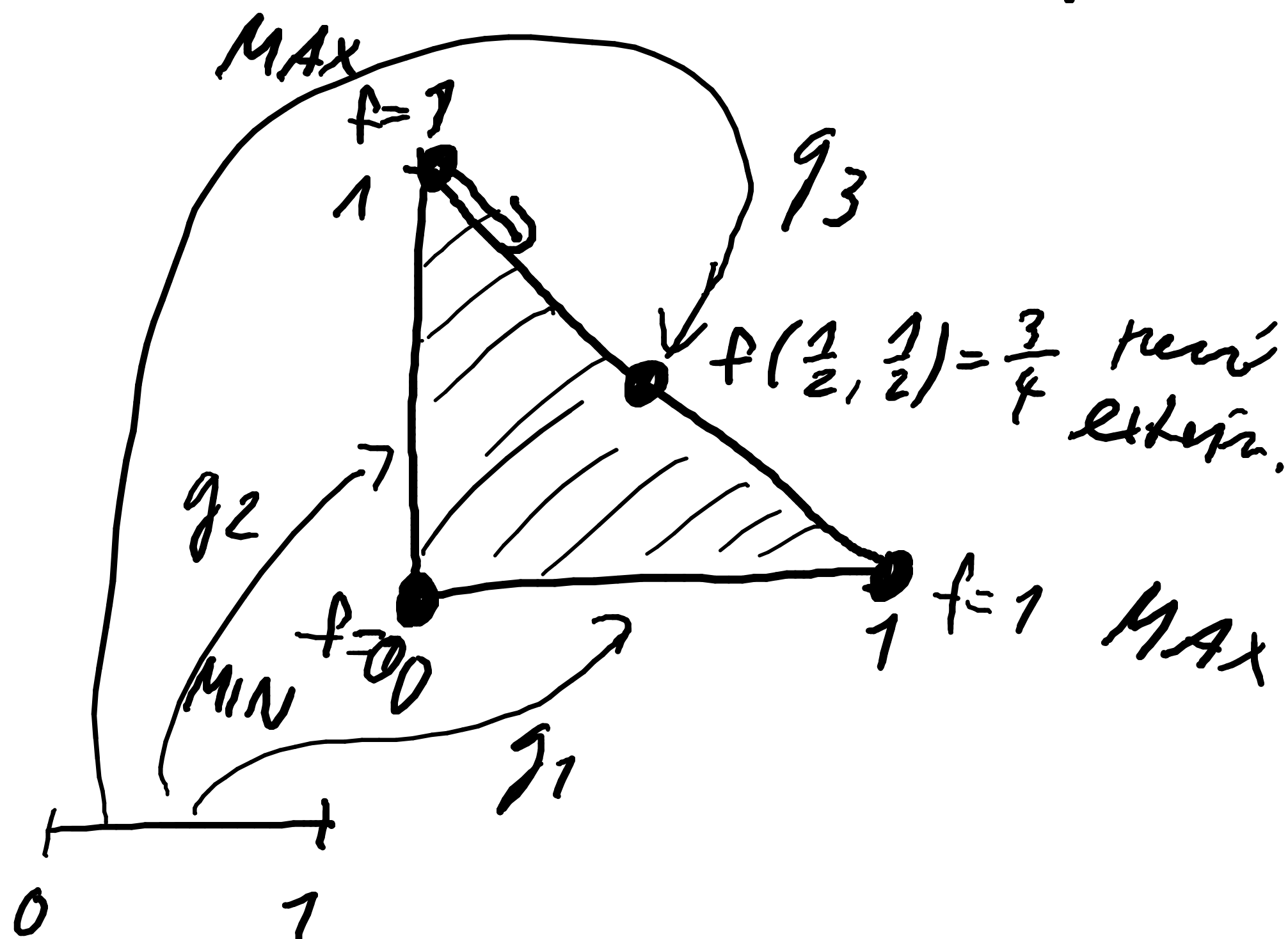
$\rightarrow (0,0), (1,0)$

$g_2(t) = f(0,t) = t$, $t \in [0,1]$

$\rightarrow (0,0), (0,1)$

$g_3(t) = f(t, 1-t) = t^2 + 1 - t$

$g'_3(t) = 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \rightarrow (1,0), (0,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



4 $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$, $M = [-1,1]^3$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1$... tedy zbývá jen s těmi krajními

Max. může být jen pro $z=1$, min. pro $z=-1$.

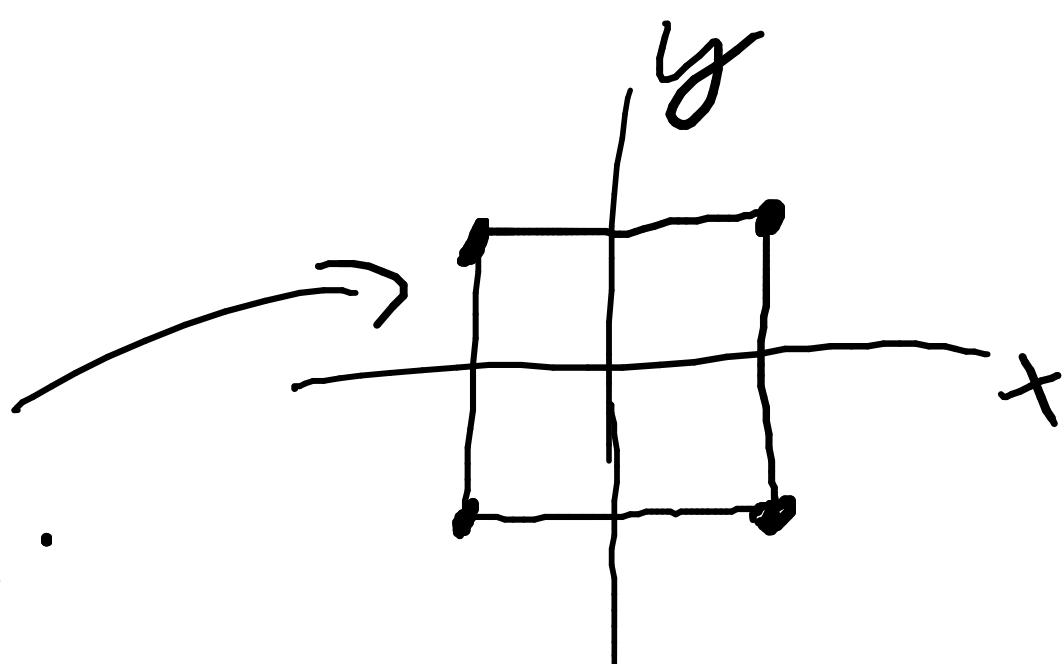
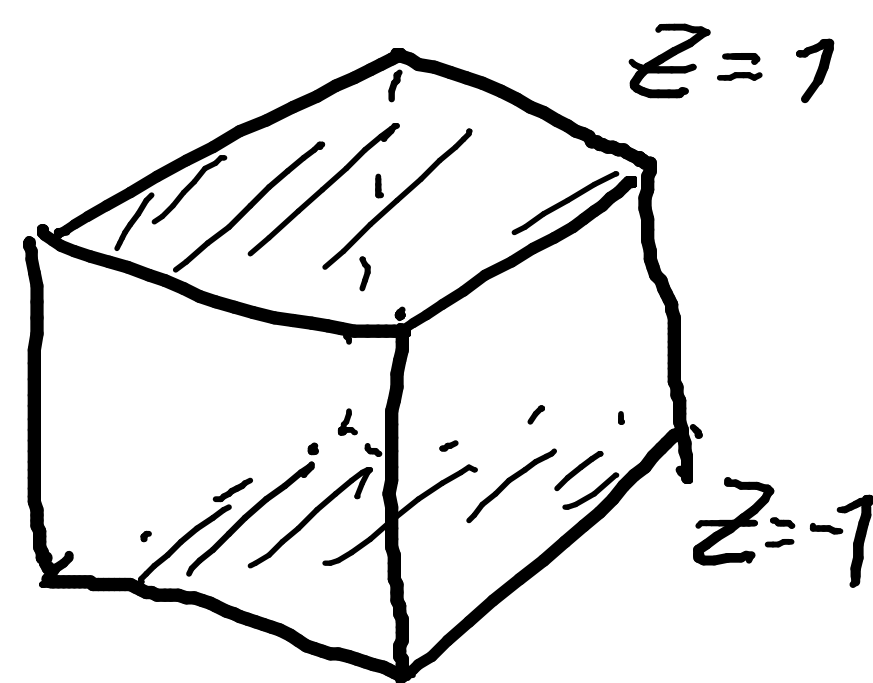
Horní stěna: $z=1$ $g(x,y) = f(x,y,1) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + 1 = 2(x^2 + y^2) + 1$
 $= 2\|(x,y)\|^2 + 1$

"z obrazků" max. jsou rohy obdélníku.

$\Rightarrow (1,1,1), (1,-1,1), (-1,1,1), (-1,-1,1)$

Dolní stěna

$z=-1$: $h(x,y) = f(x,y,-1) = 2(x^2 + y^2) - 1$... bod minimum je (0,0)



$$\boxed{5} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z, \quad M = \mathbb{R}^3$$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + 2, 2y + 4, 2z - 6) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, y, z) = (-1, -2, 3)$$

Extrém může být jedině v $(-1, -2, 3)$

$$f(x, y, z) = \underbrace{(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}_{\geq 0} - 14$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) \geq -14 \quad \text{na } \mathbb{R}^3$$

$$f(-1, -2, 3) = -14 \quad \Rightarrow \text{je zde minimum.}$$

$$\boxed{6} \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}, \quad M = \mathbb{R}^2$$

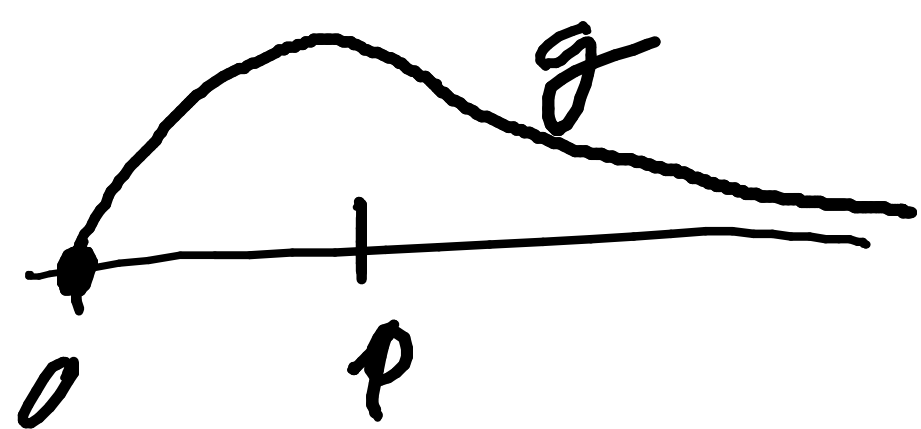
Označme $g(r) := r e^{-r}$ ^{$r \in [0, \infty)$} potom $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$

Stačí tedy vyšetřit extrémy funkce $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$g'(r) = e^{-r} + r e^{-r}(-1) = e^{-r}(1-r)$$

$$g(0) = 0, \quad g' > 0 \text{ na } (0, 1), \quad g' < 0 \text{ na } (1, \infty),$$

$$\text{navíc } g(r) \geq 0 \text{ na } (0, \infty)$$



$$\Rightarrow g \text{ má min. v } 0$$

$$g \text{ má max. v } 1$$

$$\Rightarrow f \text{ má minimum v } (0, 0)$$

$$\text{má maximum v bodech } (x, y), \text{ kde } x^2 + y^2 = 1.$$

7 $f(x, y) = (x+y) e^{-2x-3y}$, $M = [0, \infty) \times [0, \infty)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-2x-3y} - 2(x+y)e^{-2x-3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{-2x-3y} - 3(x+y)e^{-2x-3y}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Řešíme } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$1 - 2(x+y) = 0$$

$$1 - 3(x+y) = 0$$

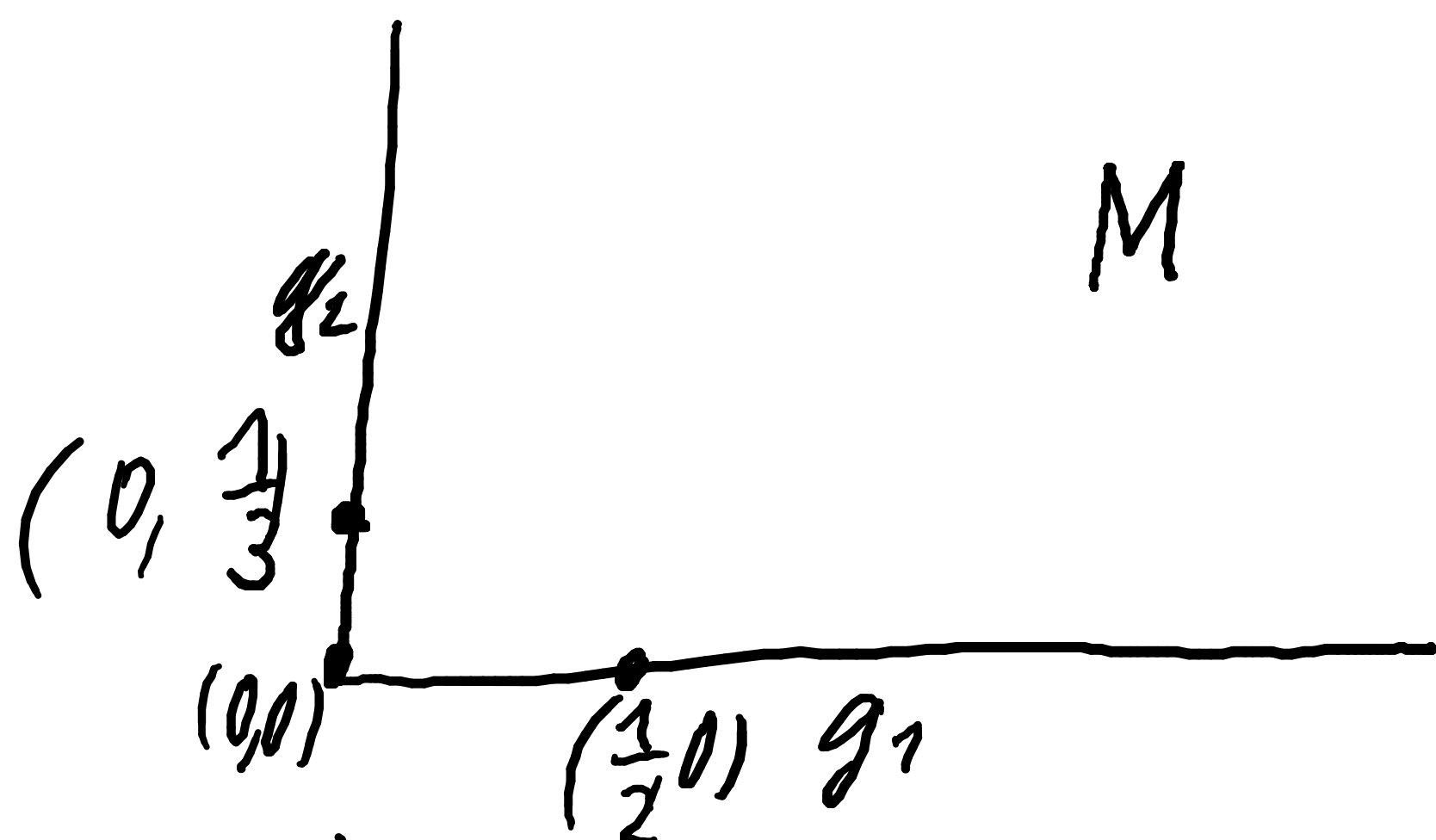
$$\Downarrow \\ x+y=0$$

Tedy $\nabla f \neq (0, 0)$ na $\text{Int } M \Rightarrow$ nenastane pro $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) = \text{Int } M$. extrémů uvnitř.

Parametrizujeme dvě části hranice:

$$g_1(t) = f(t, 0) = t e^{-2t}, t \in [0, \infty)$$

$$g_2(t) = f(0, t) = t e^{-3t}, t \in [0, \infty)$$



$$g_1'(t) = e^{-2t} - 2t e^{-2t} = e^{-2t}(1-2t) \Rightarrow t \in (0, \frac{1}{2}) \text{ roste, } t \in (\frac{1}{2}, \infty) \text{ klesá}$$

$$g_2'(t) = e^{-3t}(1-3t) \Rightarrow t \in (0, \frac{1}{3}) \text{ roste, } t \in (\frac{1}{3}, \infty) \text{ klesá}$$

$\Rightarrow$ 3 podezřelé body: $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{3})$.

• $f(0, 0) = 0$ a $f > 0$ jinde $\Rightarrow$ Minimum v $(0, 0)$.

$$\bullet f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2} e^{-1}, f(0, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} e^{-1}.$$

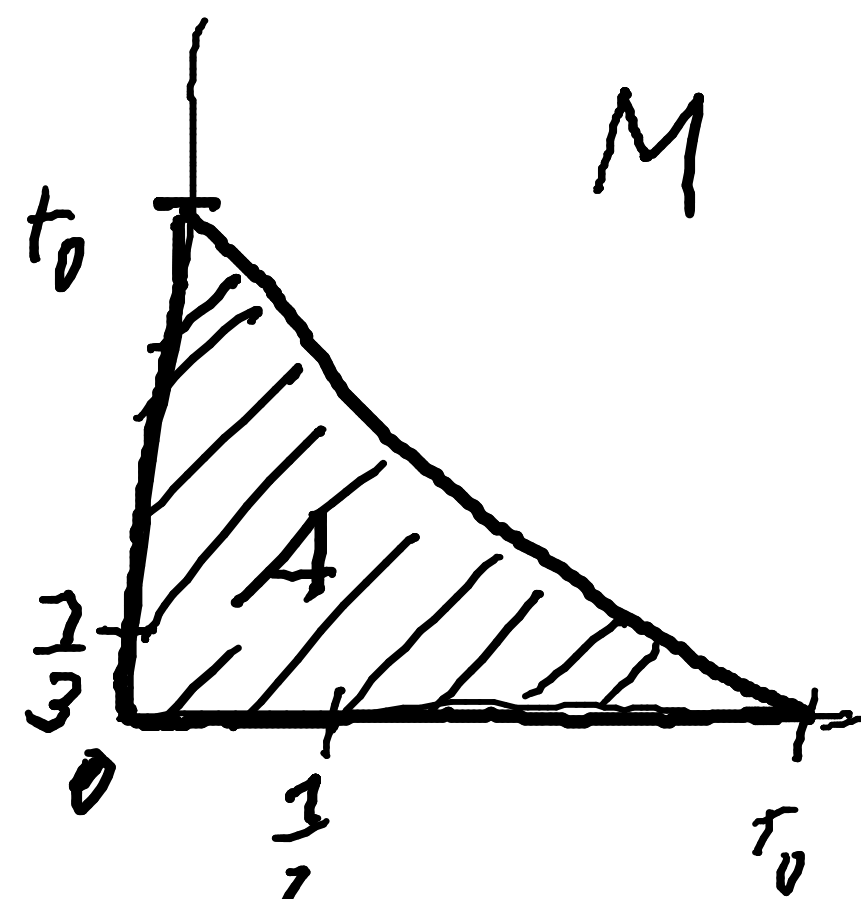
Je v $(\frac{1}{2}, 0)$ maximum? (Za tím nevíme!) Pokusíme, že ano. Bud' $\varepsilon = \frac{e^{-1}}{4}$.

$$0 \leq f(x, y) \leq (x+y) e^{-2x-2y} = h(x+y) \text{ pro } h(r) = r e^{-2r}.$$

Platí $\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = 0$, tedy $\forall t \geq t_0: h(t) < \varepsilon$ pro vhodné t_0 .

Označme $A = \{(x, y) \in M: x+y \leq t_0\}$. Pak $f < \varepsilon$ na $M \setminus A$.

A kompaktní $\Rightarrow$ existuje $\max_A f \rightarrow$ existuje $\max_M f$
(dokaž)



Že víme, že toto maximum muslo být v $(\frac{1}{2}, 0)$.

Lokální extrémy:

Věta (postačující podmínka) Pokud $a \in \mathbb{R}^n$, $f'(a) = 0$,

$$f''(a) \text{ je } \begin{cases} \text{pozitivně definitní} \Rightarrow \text{lok. minimum v } a \\ \text{negativně definitní} \Rightarrow \text{lok. maximum v } a \\ \text{indefinitní} \Rightarrow \text{f nemá lok. extrém v } a. \end{cases}$$

Připomení: $f''(a)$ je bilineární forma na $\mathbb{R}^n$, $h \mapsto f''(a)(h, h)$ příslušná kvadratická forma. Lze ji reprezentovat Hessovou maticí

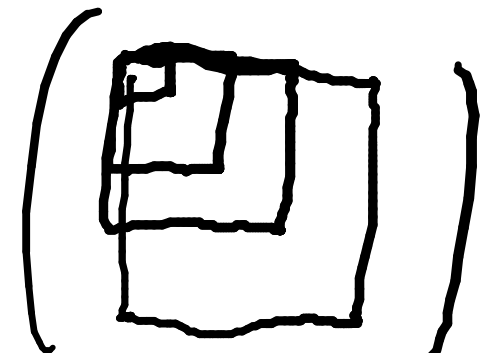
$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n \text{ pak platí } f''(a)(h, h) = h \cdot A h.$$

Terminologie: A je pozitivně definitní: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0: x \cdot A x > 0$
negativně definitní: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0: x \cdot A x < 0$
indefinitní: $\exists u \in \mathbb{R}^n, \exists v \in \mathbb{R}^n: u \cdot A u > 0$
 $v \cdot A v < 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \text{zbylé případy} \\ \text{pozitivně semidefinitní: } \forall x \in \mathbb{R}^n: x \cdot A x \geq 0 \\ \text{negativně semidefinitní: } \forall x \in \mathbb{R}^n: x \cdot A x \leq 0 \end{array} \right]$$

Poznámka bilineární formu často ztotožňujeme s příslušnou maticí (podobně jako u lineárních zobrazení.)

Jak poznat pozitivní definitnost:

Sylvestřovo kritérium: Pokud všechny  .

minorů (determinanty podmatic) začínající
v levém horním rohu kladné $\Rightarrow$ matice je
poz. def

8 Hledáme lokální extémy.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2, \quad M = \mathbb{R}^2.$$

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 2x - 2y, 4y^3 - 2x - 2y) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} (1) & 4x^3 = 2x + 2y \\ (2) & 4y^3 = 2x + 2y \end{cases} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

Dosadíme do (1): $4x^3 = 4x \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$.

$\Rightarrow$ Body podezřelí z extrém jsou $(1, 1), (0, 0), (-1, -1)$.

Spočítáme druhé derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 2 \quad f \in C^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 2$$

$f \in C^2 \Rightarrow$ existuje $f''(x, y)$,
matice reprezentující tuto
bilineární formu (Hessovian) je

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Dosadíme podezřelé body:

$(1, 1)$: $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

$|10| = 10 > 0$
 $\left| \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \right| = 96 > 0$ } Sylvestrovo kritérium
 $\Rightarrow f''(1, 1)$ je poz. def. $\Rightarrow (1, 1)$ je bod
lokálního minima.

$(-1, -1)$: $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ poz. def. $\Rightarrow (-1, -1)$ bod lokálního minima.

(0,0): $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ nastane atijeden z prípadov:

$$(x \ y) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x^2 - 4xy - 2y^2 = -2(x+y)^2 \leq 0,$$

pričom ě pro $x = -y$ nastane rovnosť: negatívne
se nedefinujú

$\Rightarrow$ neveríme nič

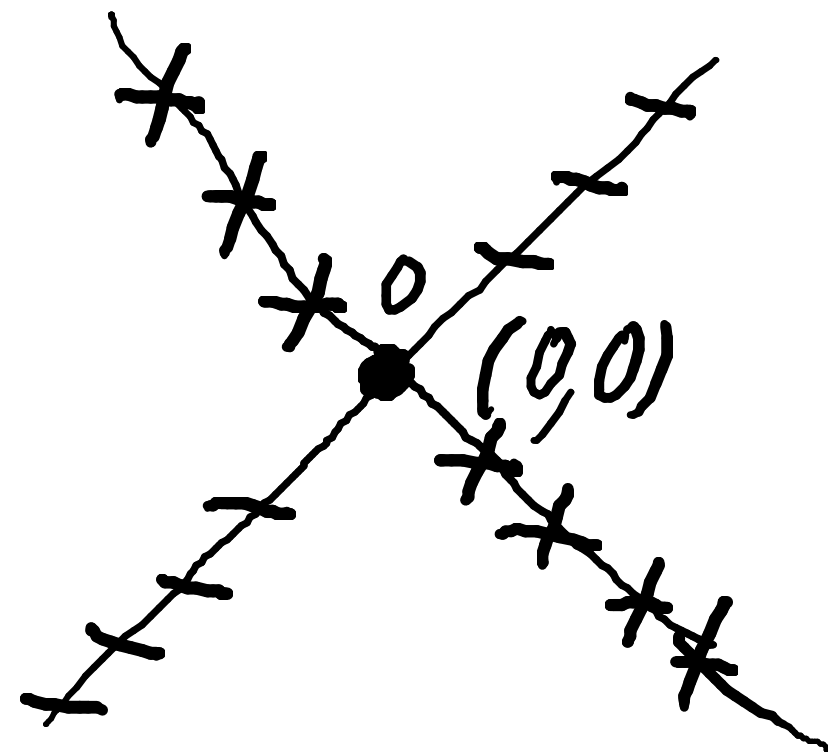
Podívame sa po priamkách $x=y$, $x=-y$:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

$x=y$: $f(x,x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2 - 2) \dots$ má lokálny maximum v 0

$x=-y$: $f(x,-x) = 2x^4 \dots$ má lokálny minimum v 0

$\Rightarrow$ nemá lokálny extrém v (0,0)



$$\textcircled{1} f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz \dots \text{Lokální extrémy na } \mathbb{R}^3?$$

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 - 3y - 3z, 3y^2 - 3x - 3z, 3z^2 - 3x - 3y)$$

$$\text{Řešme } \nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0): \quad \left. \begin{array}{l} x^2 = y + z \\ y^2 = z + x \\ z^2 = x + y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - y^2 = y - x \\ \Downarrow \\ (x-y)(x+y) + (x-y) = 0 \\ \Downarrow \\ (x-y)(x+y+1) = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Analogicky ze zbývajících rovnic, máme:

$$(x-y)(x+y+1) = 0 \Rightarrow x=y \vee x+y+1=0$$

$$(y-z)(y+z+1) = 0 \Rightarrow y=z \vee y+z+1=0$$

$$(z-x)(z+x+1) = 0 \Rightarrow z=x \vee z+x+1=0$$

Rozoberme
případy.

i) $x=y=z$: Dostaneme $x^2 = 2x \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$
 $\Rightarrow$ Řešení $(0,0,0)$ a $(2,2,2)$... (body podezřelé z lokálního extrému)

ii) $x=y, y+z+1=0, z+x+1=0$ $\Rightarrow z = -1-x \Rightarrow y^2 = z+x = -1 \dots$ nelze

iii) $x+y+1=0, y+z+1=0, z+x+1=0$ $\Rightarrow (x+y+1) - (y+z+1) = 0 \Rightarrow x=z$, analogicky $z=y$
 $\Rightarrow$ jsme zpět v i).

Stačí tedy rozhodnout o lok. extrémech v bodech $(0,0,0), (2,2,2)$.

Vyšetříme (pozitivní/negativní/in-)definitnost $f''(0,0,0), f''(2,2,2)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z$$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ bilineární
 forma $f''(x, y, z)$ existuje
 a je reprezentována Hessovou
 maticí: $\begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & -3 \\ -3 & -3 & 6z \end{pmatrix}$.

Dosadíme body $(0,0,0), (2,2,2)$:

$$f''(2,2,2): \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{Použijeme Sylvestrovo kritérium.}$$

$$|12| = 12 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 3^2 = 135 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \\ -3 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 12^3 - 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 12 = 1350 > 0$$

Sylvestrovo kritérium $\Rightarrow f''(2,2,2)$ pozitivně definitní
 $\Rightarrow f$ má lokální minimum v $(2,2,2)$.

$$f''(0,0,0): \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Uvažujme vektory } u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pak } f''(0,0,0)(u,u) = (0 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -6 < 0$$

$$f''(0,0,0)(v,v) = (0 \ 1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0 \ 1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

$\Rightarrow f''(0,0,0)$ je indefinitní $\Rightarrow f$ nemá extrém v $(0,0,0)$

(v $(0,0,0)$ má f tzv. sedlový bod).

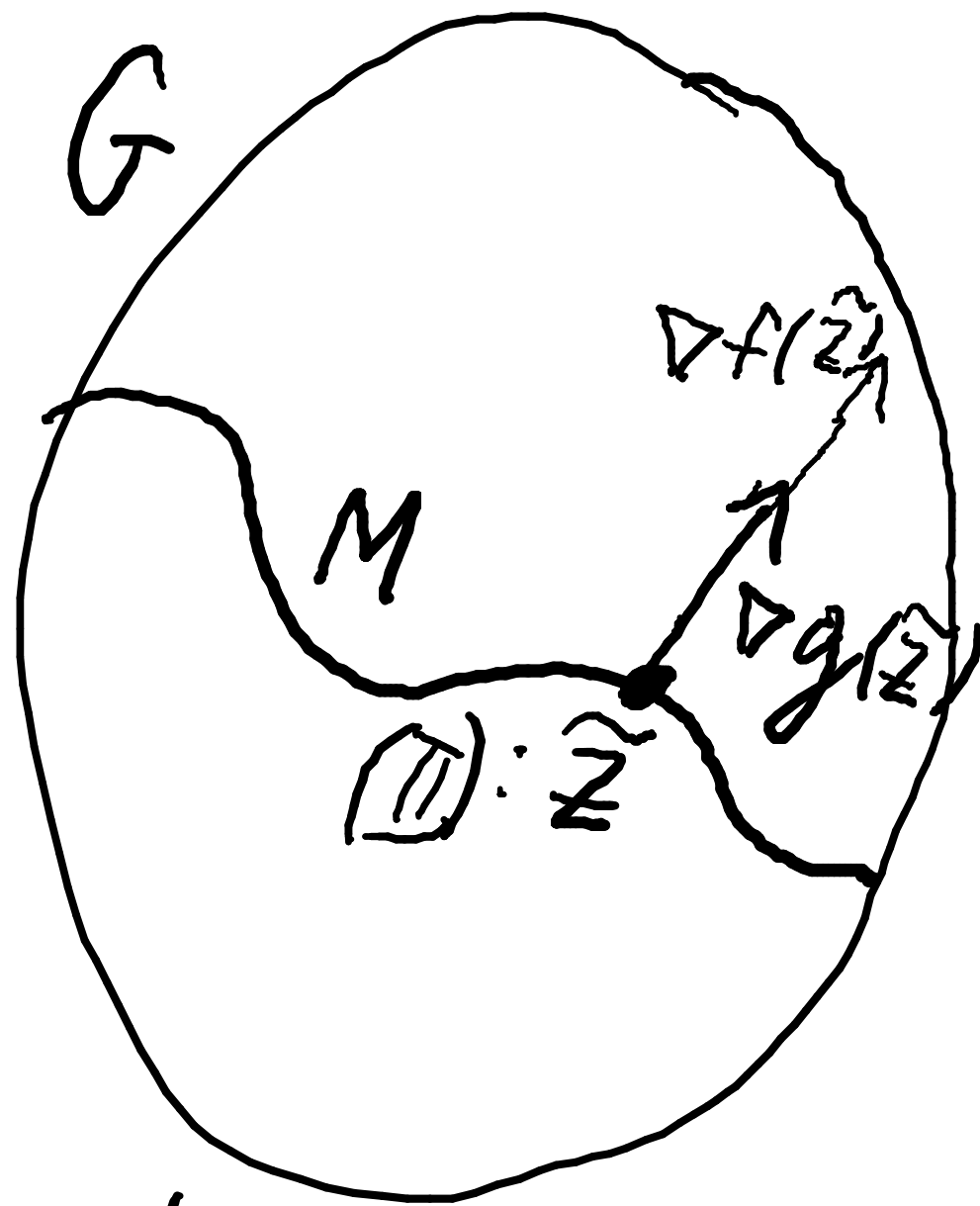
LAGRANGEOVY MULTIPLIKÁTORY

Hledáme extrémny funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ na $M = \{z \in G: g(z)=0\}$,
kde $g: G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(f, g \in C^1)$. $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená.

Věta $\tilde{z} \in M$ je bod lok. extrém f na $M \Rightarrow$ (I) nebo (II).

(I) $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ lin. závislé (pro $m=1$: $\nabla g(\tilde{z})=0$)

(II) $\nabla f(\tilde{z})$ je lin. kombinace $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$.



Vyřešíme úlohu [1] na hranici pomocí Lagrangeových multiplikátorů:

$$f(x, y) = x + y, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}, \quad \Rightarrow g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Hledáme body podezřelé z extrémů:

typ (I) $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ pro $(x, y) \in M \Rightarrow$ žádný bod typu (I)

typ (II): Řešíme $\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0$ $\nabla f(x, y) = (1, 1)$

(neztrátné x, y, λ) $g(x, y) = 0$

tedy:

$$(1) \quad 1 + \lambda 2x = 0$$

$$(2) \quad 1 + \lambda 2y = 0$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Odečtením (1)-(2): $2\lambda(x - y) = 0 \rightarrow \lambda = 0$ nelze... není splněna (1)
 $\rightarrow x = y$

Tedy $x = y$. Dosadíme do (3) $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Máme 2 body podezřelé z extrémů: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

f spojitá, M kompaktní $\Rightarrow$ existují $\min_M f, \max_M f$,
(ověřte)

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}, \quad f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$$

Maximum

Minimum.

10 $f(x,y) = x+y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^3+y^3-2xy}_{g(x,y)} = 0, \underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{\text{ok}}\}$

f spojitá, M kompaktní (uzavřená a omezená ... ověřte sami)
 $\Rightarrow$ existuje maximum i minimum f na M . (*)

Zvolme $G := (0, \infty) \times (0, \infty)$, pak $M \cap G = M \setminus \{(0,0)\}$

Použijte tedy větu o Lagr. mnl. (protože $x=0 \neq y$ nebo $x \neq 0 = y \Rightarrow g(x,y) \neq 0 \Rightarrow (x,y) \notin M$)

na $M \cap G = \{(x,y) \in G : x^3+y^3-2xy = 0\}$.

(I) $\nabla g(x,y) = (3x^2-2y, 3y^2-2x)$, řešíme $3x^2-2y=0$ (i)

$3y^2-2x=0$ (ii)

(i) $\Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 \xrightarrow{(ii)} 3 \cdot \frac{9}{4}x^4 - 2x = 0$
 $x(\frac{27}{4}x^3 - 2) = 0 \xrightarrow{x=0}$

$\Rightarrow$ body $(0,0), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, ale $(0,0) \notin G$,

$\Rightarrow$ žádný bod typu (I).

$g(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 2 \cdot \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} \neq 0$

$\Rightarrow (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \notin M \cap G$

(II) $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ (1) $1 + \lambda(3x^2-2y) = 0$
 $g=0$ (2) $1 + \lambda(3y^2-2x) = 0$ (1)-(2): $\lambda(3x^2-2y-3y^2+2x) = 0$

$\nabla f(x,y) = (1,1)$ (3) $x^3+y^3-2xy = 0$ $\lambda(x-y)(3(x+y)+2) = 0$

$\lambda = 0 \dots$ nelze díky (1)

$x=y \Rightarrow (3) 2x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x-1)$

$3(x+y)+2=0 \Rightarrow x+y = -\frac{2}{3} \Rightarrow x < 0 \vee y < 0$

$\Rightarrow (x,y) \notin G$

$x=0, (0,0) \notin G$

$x=1 \Rightarrow (1,1)$
 je potenciálně
 z extrémů.

$\Rightarrow$ Na $M \cap G$ může být extrém jen v $(1,1)$

$\Rightarrow$ Na M může být extrém v bodech $(1,1), (0,0)$. (*) $\Rightarrow$ jedno je max.

$\Rightarrow f(1,1) = 2$ MAX $f(0,0) = 0$ MIN

jedno min.

11) $f(x,y,z) = xyz$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$

f spoj., M kompakt. (ovčr.) $\Rightarrow \exists \min, \max$ $g(x,y,z)$

(I) $\nabla g(x,y,z) = (2x/z, 2y/z, 2z) \neq (0,0,0)$ pro $(x,y,z) \in M$. $\Rightarrow$ žádný bod typu (I)

(II) $\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

Řešme (1) $yz + \lambda 2x = 0$ $\Rightarrow (1) - (2) \quad z(y-x) + 2\lambda(x-y) = 0$

(2) $xz + \lambda 2y = 0$

(3) $xy + \lambda 2z = 0$

(4) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Analogicky:

(2) - (3) $\Rightarrow y = z$
 $\Rightarrow x = 2\lambda$

(3) - (1) $\Rightarrow z = x$
 $y = 2\lambda$

Celkem: $(x=y \vee z=2\lambda) \wedge (y=z \vee x=2\lambda) \wedge (z=x \vee y=2\lambda)$ MAX

i) $x=y=z$ $\Rightarrow (4) \quad 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ podzřelý body $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
 $\text{MIN } (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

ii) $x=y=2\lambda$: $\Rightarrow (3) \quad 4\lambda^2 + 2\lambda z = 0$
 $\Rightarrow 2\lambda(2\lambda + z) = 0$

iii) $y=z=2\lambda$: Analogicky, body
 $(1,0,0), (-1,0,0)$ MAX
 $\text{MIN } (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

iv) $x=z=2\lambda$: $(0,1,0), (0,-1,0)$ MAX
 $\text{MIN } (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

i) $f(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$ max/min.

ii) $f(0,0,\pm 1) = 0$ nic

$f(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}) = \mp \frac{1}{3\sqrt{3}}$ min/max iii, iv) analogicky.

$\lambda = 0 \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow$
 $(4) \quad z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$
 $\Rightarrow$ body $(0,0,1), (0,0,-1)$

$z = -2\lambda$
 $\Rightarrow (4) \quad (2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 = 1$
 $12\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$

$\Rightarrow x=y = \pm \frac{2}{\sqrt{12}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = -z$
 $\Rightarrow$ body $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ MIN
 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ MAX

$$\boxed{12} f(x, y, z) = xyz, \quad M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0}_{g_1(x, y, z)}, \underbrace{x + y + z = 0}_{g_2(x, y, z)} \right\}$$

$$(I) \nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \quad \nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

lin. závislé $\Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} < 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2y-2x & 2z-2x \end{pmatrix}$$

Aby $\text{rank} < 2 \dots$ druhý řádek nulový $\Rightarrow \begin{matrix} 2y = 2x \\ 2z = 2x \end{matrix}$

$\Rightarrow (x, y, z) = (x, x, x)$ ale $(x, x, x) \notin M$ pro $x \in \mathbb{R}$

(protože $g_1(0, 0, 0) = -1 \neq 0, g_2(x, x, x) = 3x \neq 0$ pro $x \neq 0$)

$\Rightarrow$ žádný bod typu (I).

$$(II) \nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0 \quad (1) \quad yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 \cdot 1 = 0$$

$g = 0$

(2) $xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 \cdot 1 = 0$

(3) $xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 \cdot 1 = 0$

$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

(4) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(5) $x + y + z = 0$

(1)-(2): $z(y-x) + 2\lambda_1(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)/(2\lambda_1 - z) = 0 \Rightarrow x=y \vee z=2\lambda_1$

(2)-(3) $\dots \dots \dots \Rightarrow y=z \vee x=2\lambda_1$

(3)-(1) $\dots \dots \dots \Rightarrow z=x \vee y=2\lambda_1$

i) $x=y$ $\Rightarrow$ (5) $2x+z=0 \Rightarrow z=-2x \Rightarrow$ (4) $x^2+x^2+(-2x)^2=1$

$6x^2=1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow$ dostáváme body $\begin{matrix} MIN \\ MAX \end{matrix} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$

ii) $y=z$: $\dots \dots \dots \Rightarrow MIN \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) MAX$

iii) $z=x$: $\dots \dots \dots \Rightarrow MIN \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) MAX$

iv) $x=2\lambda_1, y=2\lambda_1, z=2\lambda_1 \Rightarrow x=y=z \dots$ nelze viz (I)

(f spojitá na kompaktní $\Rightarrow$ 7 extrémů)

13 $f(x, y, z) = xyz$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \leq 0\}$
 $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $g_2(x, y, z) = x + y + z$

$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \dots$ disjunktivní rozklad, vyčísleme každou zvlášť:

$$M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z < 0\}$$

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z = 0\}$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0, x + y + z < 0\}$$

$$M_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0, x + y + z = 0\} \dots \text{úloha } \mathbf{12}$$

Pak pro $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, $G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 0\}$

$$\Rightarrow M_1 = \{(x, y, z) \in G_1 : g_2(x, y, z) = 0\}$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in G_2 : g_1(x, y, z) = 0\}$$

} lze použít
Lagrangeovy
multiplikátory

• M_0 je otevřená, $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$

Řešíme $(yz, xz, xy) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow (y=0 \vee z=0) \wedge (x=0 \vee z=0) \wedge (x=0 \vee y=0)$$

$$\Rightarrow \text{alespoň 2 nulové} \Rightarrow \text{podezřelé body } (x, 0, 0), x \in (-1, 0), \\ (0, y, 0), y \in (-1, 0), \\ (0, 0, z), z \in (-1, 0).$$

$$f(x, 0, 0) = f(0, y, 0) = f(0, 0, z) = 0 \dots \text{nejdou}$$

extrémy (viz **12**)