

18. URČITÝ INTEGRÁL

Spočtěte následující (Newtonovy) integrály.

1. $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx$

2. $\int_0^2 |1 - x| \, dx$

3. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$

4. $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$

5. $\int_{1/e}^e |\log x| \, dx$

6. $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$

7. $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx$, kde $n \in \mathbb{N}$

8. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \alpha \cos x} \, dx$,
kde $\alpha \in [0, 1)$

9. $\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin x}{x^4 + \cos x} \, dx$

10. $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 x} \, dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx$

12. $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$

13. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, kde $a > 0$

14. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} \, dx$

15. $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} \, dx$

16. $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} \, dx$

17. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x + 3 \sin x + 1}} \, dx$

18. Spočtěte $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \, dx$, jako důsledek dokažte nerovnost $\pi < \frac{22}{7}$.

Bonus: drobnou úpravou funkce v integrálu ukažte, že dokonce platí $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$.

19. Spočtěte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$ pro $p > 1$ s využitím Riemannova integrálu.

20. Ukažte, že obecně neplatí $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx$, a to ani pokud jsou výrazy na obou stranách dobře definované a konečné.

VÝSLEDKY

1. $\frac{3\pi}{8}$
2. 1
3. 4π
4. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $2 - \frac{2}{e}$
6. $200\sqrt{2}$
7. $n!$
8. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$
9. 0
10. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
11. $\frac{\pi}{4}$
12. $2 - \frac{\pi}{2}$
13. $\frac{\pi a^2}{2}$
14. $\frac{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)}{2}$
15. $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$
16. $\frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$
17. $\sqrt{5} - 2 + 3\log(5 - 2\sqrt{5}) + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5 - 2\sqrt{5}} - 1 \right)$
18. $\frac{22}{7} - \pi$.
Integrovaná funkce je spojitá a kladná na $(0, 1)$, proto je integrál kladný.
19. Limita je rovna $\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$.