21. METRICKÉ PROSTORY

1. Určete vnitřek, uzávěr a hranici množin v $\mathbb{R}$. Dále rozhodněte, jestli jsou množiny otevřené resp. uzavřené.

(a) $\mathbb{N}$
(b) $\mathbb{Q}$
(c) $[0,1)$
(d) $\emptyset$
(e) $\mathbb{R}$
(f) $M = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené resp. uzavřené v $\mathbb{R}^n$.

(a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1\right\}$
(b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\right\}$
(c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 0\right\}$
(d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^2 + e^x = 5\right\}$
(e) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y = 2, z \geq 0\right\}$

3. Nalezněte spojitou funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou $f^{-1}\big([0,\infty)\big) \neq \overline{f^{-1}\big((0,\infty)\big)}$.

4. Rozhodněte, zda následující funkce jsou metrikami na $\mathbb{R}$.

(a) $\rho(x,y) = x - y$
(b) $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$
(c) $\rho(x,y) = |x^2 - y^2|$

5. Dokažte, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je otevřená, právě když je sjednocením spočetně mnoha disjunktních otevřených intervalů.

6. Najděte metrický prostor (X,ρ) a uzavřené množiny $F, H \subset X$ takové, že $\operatorname{dist}(F,H) = \inf\{\rho(x,y) : x \in F, y \in H\} = 0$, ale $F \cap H = \emptyset$.

7. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\displaystyle \frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

8. Mějme posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$, $f_n(x) = x^n$. Ukažte, že

(a) v metrice $\displaystyle \rho_1(f,g) = \|f-g\|_1 = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$ platí $f_n \xrightarrow{\rho_1} 0$.
(zde $0 \in \mathcal{C}([0,1])$ značí konstantní nulovou funkci na $[0,1]$)

(b) v metrice $\displaystyle \rho_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$ nemá posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ limitu.

V úlohách 9.–11. vytistejnim budeme na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ uvažovat supremovou metriku ρ_∞.

9. Ukažte, že funkce $I\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ je spojitá.

10. Nechť $a \in [0,1]$. Ukažte, že funkce $F_a\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $F_a(f) = f(a)$ je spojitá.

11. Rozhodněte, jestli množiny jsou otevřené resp. uzavřené v $\mathcal{C}([0,1])$.

(a) $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : 0 < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < 1\}$

(b) $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0, f(1) = 1\}$

12. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \sqrt[3]{xy^2} \cdot e^{y \sin x}$ nabývá svého maxima na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 2\}$.

VÝSLEDKY

1. (a) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{N} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$

(b) $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

(c) $[0,1)$ není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int}[0,1) = (0,1)$, $\overline{[0,1)} = [0,1]$, $\partial[0,1) = \{0,1\}$

(d) $\emptyset$ je otevřená i uzavřená, $\operatorname{int}\emptyset = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\partial\emptyset = \emptyset$

(e) $\mathbb{R}$ je otevřená i uzavřená, $\operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{R} = \emptyset$

(f) M není otevřená ani uzavřená, $\operatorname{int} M = \emptyset$, $\overline{M} = M \cup \{0\}$, $\partial M = M \cup \{0\}$

2. (a) otevřená (b) uzavřená (c) ani jedno (d) uzavřená (e) uzavřená

3. Např. $f(x) = \max(x,0)$.

4. (a) ne (b) ano (c) ne

6. Např. $X = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{N}$, $H = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

11. (a) otevřená (b) uzavřená