

9. ŘADY – NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad.

- | | |
|---|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pro $x \in \mathbb{R}$ |
| 2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log n)}$ | 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n - 100\sqrt{n}}$ |
| 3. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ |
| 4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pro $x \in \mathbb{R}$ | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$ |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{3} - 1 \right)$ | |

10. Ukažte, že následující řady mají pro $x \in \mathbb{R}$ omezené částečné součty:

- | | |
|--|--|
| (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx),$ | (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx), x \neq 2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}.$ |
|--|--|

Vyšetřete konvergenci a kromě příkladů 12, 15 i absolutní konvergenci.

- | | |
|--|--|
| 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ | 15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ |
| 12. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{\log(\log n)}$ | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}$ |
| 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3n - 100\sqrt{n}}$ | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \cos \frac{1}{n}$ |
| 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctg n$ | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ pro $x \in \mathbb{R}$ |

VÝSLEDKY

„AK“ znamená, že řada absolutně konverguje,

„NAK“ znamená, že řada konverguje, ale ne absolutně („neabsolutně konverguje“),

„K“ znamená, že řada konverguje (a o absolutní konvergenci zde nic neříkáme),

„D“ znamená, že řada diverguje.

1. NAK

2. NAK

3. AK

4. AK pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Poznámka: Platí $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. NAK

6. AK pro $x \in (-1, 1)$, K pro $x = 1$, jinak D.

Poznámka: Platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \log(1+x)$, $x \in (-1, 1]$.

7. NAK

8. AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $\alpha \in (0, 1]$, D pro $\alpha \leq 0$.

9. AK pro $\alpha > 1$, NAK pro $\alpha \in (0, 1]$, D pro $\alpha \leq 0$.

10. (a) $\sum_{k=1}^n \sin(kx) \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

11. NAK

12. K

13. NAK

14. NAK

15. NAK

16. K

17. NAK

18. AK pro $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, NAK pro $x = -\frac{1}{4}$, D pro $x \notin \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$