2. VÝROKY, LOGIKA

1. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A, B, C jsou následující výroky vždy pravdivé:

(a) $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

(b) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(c) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$

(d) $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

(e) $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B)$

2. Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

(a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : z > x \implies y < z$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon (x \cdot y \geq 0) \implies (x + y \geq 0)$

(c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \colon x + y = 0$

(d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \colon x \cdot y = 1$

(e) $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon x^2 + y^2 > 0$

(f) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} \colon (y \leq x) \wedge (x < y + 1)$

(g) $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

(h) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

3. Nechť M je množina osob úřítomných v posluchárně a nechť $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Zkoumejte platnost náslecujících výroků:

(a) $\forall x \exists y : W(x, y)$

(b) $\forall y \exists x : W(x, y)$

(c) $\exists x \forall y : W(x, y)$

(d) $\exists y \forall x : W(x, y)$

VÝSLEDKY

1. Je to tak.

2. (a) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} : z > x \wedge y \geq z$, platí výrok

(b) $\exists x, y \in \mathbb{R} : (x \cdot y \geq 0) \wedge (x + y < 0)$, platí negace

(c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x + y \neq 0$, platí výrok

(d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$, platí negace

(e) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 0$, platí negace

(f) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : (y > x) \vee (x \geq y + 1)$, platí negace

(g) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \not\Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$, platí výrok

(h) $\forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \not\Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$, platí výrok