

4. SUPREMUM A INFIMUM MNOŽINY

1. Nalezňte suprema a infima následujících množin:

(a) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $C = [0, 1)$

(d) $D = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

(e) $E = \left\{ \frac{p}{p+q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}$

(f) $F = \{n^2 - m^2 : m, n \in \mathbb{N}\}$

(g) $G = \{5^{(-1)^j} 3^k : j, k \in \mathbb{Z}\}$

2. Necht množina $M \subset \mathbb{R}$ má maximum. Potom má i supremum, které je rovno jejímu maximu.

Podobně, pokud M má minimum, potom má i infimum, které je rovno jejímu minimu.

3. Každá konečná množina reálných čísel má maximum i minimum

4. Mějme dvě množiny $A, B \subset \mathbb{R}$, které jsou omezené (shora i zdola). Co lze obecně říci o supremu a infimu následujících množin?

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$

(d) $A \setminus B$

VÝSLEDKY

1. (a) $\sup A = 1, \inf A = 0$
(b) $\sup B = 1, \inf B = 0$
(c) $\sup C = 1, \inf C = 0$
(d) $\sup D = \frac{5}{6}, \inf D = 0$
(e) $\sup E = 1, \inf E = 0$
(f) F je shora i zdola neomezená.
(g) G je shora neomezená, $\inf G = 0$
4. (a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\},$
(b) Pokud $A \cap B \neq \emptyset$, pak
$$\sup(A \cap B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cap B) \geq \min\{\inf A, \inf B\}$$

(c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$
(d) Pokud $A \setminus B \neq \emptyset$, pak
$$\sup(A \setminus B) \leq \sup A, \quad \inf(A \setminus B) \geq \inf A.$$