2. VÝROKY, MNOŽINY, ZOBRAZENÍ

1. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A, B, C jsou následující výroky vždy pravdivé:

(a) $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$

(b) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(c) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$

(d) $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

(e) $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B)$

2. Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \cdot y \geq 0) \implies (x + y \geq 0)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$

(c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x^2 + y^2 > 0$

(e) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}\colon (y \leq x) \wedge (x < y + 1)$

3. Nechť $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x}}$. Určete definiční obor D_f, obor hodnot H_f a inverzní funkci f^{-1}.

4. Mějme zobrazení $f\colon X \to Y$. Dokažte, že platí

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ pro každé $A, B \subset X$,

(b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ pro každé $A, B \subset Y$,

(c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ pro každé $A, B \subset Y$,

(d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ pro každé $A, B \subset Y$.

5. Mějme zobrazení $f\colon X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$. Ukažte, že obecně neplatí

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(b) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

6. Nechť zobrazení $f\colon A \to C$ a $g\colon A \to B$ splňují $g(A) = B$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci zobrazení $h\colon B \to C$ splňujícího $f = h \circ g$

VÝSLEDKY

1. Je to tak.

2. (a) $\exists x, y \in \mathbb{R} : (x \cdot y \geq 0) \wedge (x + y < 0)$, platí negace (uvaž $x, y < 0$)

(b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x + y \neq 0$, platí výrok (uvaž $y = -x$)

(c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y \neq 1$, platí negace (uvaž $x = 0$)

(d) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 0$, platí negace (uvaž $x = y = 0$)

(e) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N} : (y > x) \vee (x > y + 1)$, platí negace (uvaž záporné x)

3. $D_f = [0, \infty) \setminus \{16\}$, $H_f = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$, $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{4y}{y+2} \right)^2$