1. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1. Řešte následující rovnice a nerovnice v $\mathbb{R}$:

(a) $\dfrac{x-2}{2x-8} \geq 1$,

(b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$,

(c) $\dfrac{x+2}{x+3} > \dfrac{2x+3}{x+6}$,

(d) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$,

(e) $\sin 2x = \sin x$,

(f) $x \leq \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$,

(g) $\big|x - |x+1|\big| \leq 2x$,

(h) $\big|x - |x-1|\big| = 1 - |x|$.

2. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou následující funkce definovány a načrtněte jejich grafy:

(a) $f(x) = 1 - \left|\cos \frac{x}{2}\right|$,

(b) $g(x) = \Big|\Big|\big||x|-1\big|-1\Big|-1\Big|$,

(c) $k(x) = \dfrac{3x+3}{2x-4}$,

(d) $h(x) = \log\big|x - |1-x|\big|$,

(e) $\ell(x) = \log(\log(\sin x))$.

3. V závislosti na $c \in \mathbb{R}$ nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující:

(a) $cx^2 + x + 1 > 0$,

(b) $ce^x \in (-1, 0]$,

(c) $|\cos x| - c > 0$,

(d) $\log|x| + c \in (-\pi/2, \pi/2)$.

4. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ platí

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

5. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sečtěte výraz $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$.

VÝSLEDKY

1. (a) $(4,6]$

(b) $[1,2]$

(c) $(-6;-3)\cup(\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2})$

(d) $\frac{4}{3}$

(e) $k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$ pro $k\in\mathbb{Z}$

(f) $(-\infty,3)\cup(3,2+\sqrt{6}]$

(g) $[\frac{1}{2},\infty)$

(h) $\{0,\frac{2}{3}\}$

2. (a) $x\in\mathbb{R}$

(b) $x\in\mathbb{R}$

(c) $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

(d) $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

(e) Funkce není definována pro žádné $x\in\mathbb{R}$.

3. (a)

$$\begin{array}{ll} c>1/4: & x\in\mathbb{R}\\ c\in(0,1/4]: & x\in(-\infty,\frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c})\cup(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c},\infty)\\ c=0: & x>-1\\ c<0: & x\in(\frac{-1+\sqrt{1-4c}}{2c},\frac{-1-\sqrt{1-4c}}{2c}) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} c>0: & x\in\emptyset\\ c=0: & x\in\mathbb{R}\\ c<0: & x<\log(-1/c) \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ll} c<0: & x\in\mathbb{Z}\\ c=0: & x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\\ c\in(0,1): & x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\arccos c+k\pi,\arccos c+k\pi)\\ c\geq 1: & x\in\emptyset \end{array}$$

(d)

$$x\in(-e^{\pi/2-c},e^{-\pi/2-c})\cup(e^{-\pi/2-c},e^{\pi/2-c})$$

5. Pro $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ je součet 0, jinak $\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$.