

10. DERIVACE

Vybrané derivace elementárních funkcí:

$$\begin{array}{llll}
 (\text{konstanta})' = 0, & x \in \mathbb{R} & \sin' x = \cos x, & x \in \mathbb{R} \\
 (x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty) & & \cos' x = -\sin x, & x \in \mathbb{R} \\
 (e^x)' = e^x, & x \in \mathbb{R} & \arctg' x = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \\
 \log' x = \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty) & \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1)
 \end{array}$$

Zderivujte následující funkce a určete definiční obor derivace.

- | | | |
|-------------------------|----------------------------------|---|
| 1. $e^x \sin x$ | 4. $(1+x^2) \log(1+e^x)$ | 7. x^x |
| 2. $\sin(x^2)$ | 5. $\log(\log(\sin x))$ | |
| 3. $\sin(\sin(\sin x))$ | 6. $\arctg \frac{\sin x}{1+e^x}$ | 8. $\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ |

Spočtěte následující limity (s využitím derivací).

- | | |
|--|---|
| 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ | 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x}, a > 1, b > 0$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^a}{x^b}, a, b > 0$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(1+x) - \arctg(1-x)}{x}$ |
| 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ | 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^3}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ |
| 14. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right)$ | 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctg x}{x} \right)^{-\frac{1}{x^2}}$ |

21. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ v bodě 0.

22. Ukažte, že funkce $f(x) = \arccos \frac{1}{1+x^2}$ nemá derivaci v bodě 0.

23. Zderivujte funkci $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Je f' spojitá?

VÝSLEDKY

1. $e^x \sin x + e^x \cos x, x \in \mathbb{R}$
2. $\cos(x^2) \cdot 2x, x \in \mathbb{R}$
3. $\cos(\sin(\sin x)) \cos(\sin x) \cos x, x \in \mathbb{R}$
4. $2x \log(1 + e^x) + \frac{1 + x^2}{1 + e^x} \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$
5. Funkce není definována pro žádné $x \in \mathbb{R}$
6. $\frac{(1 + e^x) \cos x - \sin x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2 + \sin^2 x}, x \in \mathbb{R}$
7. $x^x(\log x + 1), x > 0$
8. $\frac{4x}{x^4 - 1}, x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
9. $-\frac{1}{2}$
10. $-\frac{1}{6}$
11. 0
12. 2
13. $-\frac{1}{12}$
14. $\frac{1}{2}$
15. 0
16. 0
17. 1
18. $\frac{1}{3}$
19. $-\frac{1}{3}$
20. $\sqrt[3]{e}$
21. $f'(0) = -\frac{1}{12}$
22. Vskutku, platí totiž $f'_+(0) = \sqrt{2} \neq -\sqrt{2} = f'_-(0)$.
23. $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
Není spojitá v 0.