① $$\lim_{k\to\infty} tg\left(\frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k}\right) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

Je bodová limita

$$\frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} \frac{3}{5} & |x|\leq 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$$

Protože tg je spojitá v $\frac{3}{5}$ a v 1 je

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} tg\,\frac{3}{5} & |x|\leq 1 \\ tg\,1 & |x|>1. \end{cases}$$

Nechť $|x|\leq 1$ odhadneme

$$\left|\frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k} - \frac{3}{5}\right| \leq \left|\frac{3k^2+x^k-3k^2-\frac{3}{5}x^k}{5k^2+x^k}\right|$$

$$\leq \frac{2}{5}\left|\frac{x^k}{5k^2+x^k}\right| \leq \frac{2}{5}\,\frac{1}{|5k^2|-|x^k|} \leq \underline{\frac{2}{5}\,\frac{1}{5k^2-1}}$$

Poslední člen jde k 0 jak $k\to\infty$.

Tudíž $\frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k} \rightrightarrows \frac{3}{5}$ na $[-1,1]$.

díky spojitosti tg v bodě $\frac{3}{5}$ je i

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k}\right) \rightrightarrows \operatorname{tg}\left(\frac{3}{5}\right) \text{ na } [-1,1].$$

Nechť $|x|>1+\delta$ pak

$$\left|\frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k}-1\right| \leq \left|\frac{2k^2}{x^k+5k^2}\right|$$

$$\leq \frac{2k^2}{|x|^k-|5k^2|}$$

[jelikož je $\cancel{\lim_{k\to\infty} \frac{5k^2}{|x|^k} = 0}$

$|x|^k > (1+\delta)^k$ a $\lim_{k\to\infty} \frac{5k^2}{(1+\delta)^k} = 0$

najdeme k_0 : $\left|\frac{5k^2}{|x|^k}\right| < \frac{1}{2}$ $\forall k \geq k_0$ $\forall x$:

$|x| > 1+\delta$]

Pro $k \geq k_0$

$$\leq \frac{2k^2}{\frac{1}{2}(1+\delta)^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{Tudíž } \frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k} \rightrightarrows 1$$

na $|x| > 1+\delta$.

Znovu použijeme spojitost tg, tentokrát v bodě 1 abychom dostali

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3k^2+x^k}{5k^2+x^k}\right) \rightrightarrows \operatorname{tg} 1 \text{ na } |x|>1+\delta.$$

$\boxed{\text{Konec}}$

2) $$f_k(x) = \frac{x^k}{1+(1+|x|)^k} \quad \text{a} \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Nechť $|x|<M$, pak

$$|f_k(x)| = \frac{|x|^k}{1+(1+|x|)^k} \leq \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^k < \left(\frac{M}{1+M}\right)^k$$

jelikož řada $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{M}{1+M}\right)^k$ konverguje,

konverguje i $\sum f_k(x)$ a) absolutně

b) stejnoměrně na $(-M,M)$.

Řada tedy konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Nejedná se o stejnoměrnou konvergenci na $\mathbb{R}$ protože

$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = 1 \quad \forall k$ a tudíž

stejnoměrná konvergence je vyloučená na celé $\mathbb{R}$.