① a) Máme dokázat že $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\sin\frac{x}{k}}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k} = 0$

pro $x>0$.

je $\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{x}{k}\right)^k = e^x$ a $\lim_{k\to\infty} \frac{x}{k} = 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

jelikož je $\lim_{t\to 0} \sin t = 0$ máme

$\lim_{k\to\infty} \dfrac{\sin\frac{x}{k}}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k} = \dfrac{0}{e^x} = 0$ dle věty o limitě složených funkcí a věty o aritmetice limit. (použili jsme spojitosti $\sin t$ v 0).

b) platí $\left|\sin\frac{x}{k}\right| \leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{N}$.

Dále platí $\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \geq 1+x+\frac{k-1}{2}\frac{x^2}{k} \geq 1+\frac{x^2}{4}$ $\forall k\geq 2$.

Tudíž je $\dfrac{\left|\sin\frac{x}{k}\right|}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k} \leq \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \leq \dfrac{4}{1+x^2} \in \mathcal{L}(0,\infty)$

protože integrand lze spojitě dodefinovat v 0, je spojitá na $(0,\infty)$ a u ∞ je srovnatelné s $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}(1,\infty)$.

c) Díky Lebesgueově větě je

$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \dfrac{\sin(\frac{x}{k})}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k} = \int_0^\infty 0 = 0.$

(2) $$x\log(1+x) = x\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

$$\int_0^1 x\log(1+x)\,dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k}$$ ... Máme majorantu $|x\log(1-x)|$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(-x)^{k+1}}{k} = -x\log(1-x)\in\mathcal{L}(0,1)$$

protože $\int_0^1 |x\log(1-x)| \leq \int_0^1 |\log t|\,dt = 1$ $\quad t=1-x$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k(k+2)}.$$

Lze též počítat následovně

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)} < \infty$$ a tudíž lze přehodit sumu a integrál.

Lze také dokázat, že (protože $\frac{x^{k+1}}{k} > \frac{x^{k+2}}{k+1}$ $\forall k\in\mathbb{N}$)

je $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k}\right| \leq x^2$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Ovšem to chce řádně odůvodnit.

3 a) $F(a) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x} \sin\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)$

integrand je spojitý v x na $(0,\infty)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ tudíž je měřitelný. Můžeme odhadnout že $\forall a$ je integrand omezený 1 $\forall x \in (0,1)$.

Pro $x > a^2$ platí $\left| \frac{1}{1+x} \sin \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{|a|}{x^{\frac{3}{2}}}$

a $\int_{a^2}^\infty \frac{|a|}{x^{\frac{3}{2}}} < \infty$. Tudíž integrál konverguje $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) $F(0) = 0$. Dále derivace integrandu dle a je $\frac{1}{1+x} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{a}{\sqrt{x}}$

a $\left| \frac{1}{1+x} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{a}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}}$.

Je $\frac{1}{\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}}$ spojitá na $(0,\infty)$ tudíž měřitelná a lokálně omezená

pro $x>1$ je $\frac{1}{\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \in \mathcal{L}(1,\infty)$. Pro $x \in (0,1)$ je $\frac{1}{\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}(1,\infty)$. Tudíž je $\frac{1}{\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}} \in \mathcal{L}(0,\infty)$.

Proto je $F'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) dx$ dle věty o derivaci integrálu závislý na parametru.