① $\frac{x^2}{k} \rightrightarrows 0$ na $[-1,1]$ totiž

$x^2 \leq 1$ a $\frac{1}{k} \to 0$.

Funkce $\cos(0) = 1$ a je tam spojitá tudíž

je $\cos\left(\frac{x^2}{k}\right) \rightrightarrows 1$ na $[-1,1]$.

② a) $\frac{x^n}{2n + x^n} \longrightarrow \begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$ a

proto $\sin\left(\frac{x^n}{2n+x^n}\right) \longrightarrow \begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ \sin 1 & |x| > 1 \end{cases}$

díky spojitosti sin na $\mathbb{R}$.

b) $\left|\frac{x^n}{2n+x^n}\right| \leq \left|\frac{x^n}{2n-1}\right| \leq \frac{1}{2n-1} \longrightarrow 0 \ \forall x \in [-1,1]$,

tudíž je $\frac{x^n}{2n+x^n} \rightrightarrows 0$ na $[-1,1]$ a díky

spojitosti sin v 0 je $\sin\left(\frac{x^n}{2n+x^n}\right) \rightrightarrows 0$

na $[-1,1]$.

c) $x^n > (1+\delta)^n$ $\quad \frac{2n}{(1+\delta)^n} \longrightarrow 0$ a tudíž $\exists n_0$

$\forall x \in (1+\delta, \infty)$ $\quad : 0 < \frac{2n}{(1+\delta)^n} \leq \frac{1}{2} \ \forall n \geq n_0$.

proto $\left|\dfrac{x^n}{2n+x^n}-1\right| \leq \left|\dfrac{2n}{2n+x^n}\right|$

$$\leq \frac{2n}{(\cancel{x^n}+\delta)^n+2n} \leq \frac{2n}{\frac{1}{2}(1+\delta)^n} \longrightarrow 0.$$

~~d~~Díky spojitosti sin v 1 je

$\sin\left(\dfrac{x^n}{2n+x^n}\right) \rightrightarrows \sin 1$ na $[1+\delta,\infty)$.

d) $f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \sin 1 & x>1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na $[1,\infty)$ pak f je spojitá na $[1,\infty)$ což je spor.

3 a) Nechť $|x|<1$ pak

$\left|\dfrac{x^k}{1+k|x|^k}\right| \leq |x|^k$ a $\sum_{k=1}^{\infty}|x|^k$ konverguje stejnoměrně pro $|x|<1$.

Nechť $x\geq 1$, then

$$\left|\frac{x^k}{1+k|x|^k}\right| \geq \left|\frac{x^k}{2k|x|^k}\right| = \frac{1}{2k}$$ ale

$\sum \frac{1}{2k}$ diverguje.

díky předchozí (protože $x^k > 0$ pro $x > 0$)

je řada divergentní na $[1,\infty)$.

Pro $x \in (-\infty,-1]$ je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{|x|^k}{1+k|x|^k}$$ konvergentní protože

i) $\frac{|x|^k}{1+k|x|^k} \geq 0$

ii) $\frac{|x|^k}{1+k|x|^k} \leq \frac{1}{|x|^{-k}+k} \leq \frac{1}{k} \to 0.$ ~~tudíž~~

iii) $\frac{|x|^{k+1}}{1+(k+1)|x|^{k+1}} = \frac{1}{|x|^{-k-1}+k+1} \leq \frac{1}{|x|^{-k}+k} = \frac{|x|^k}{1+k|x|^k}$

$$\left[k+1+|x|^{-k-1} \geq k+|x|^{-k}+(1+|x|^{-k-1}-|x|^{-k}) \geq k+|x|^{-k} \right]$$

protože $|x|^{-k} < 1$

Tudíž díky Leibnitzova kriteria je řada neabsolutně konvergentní.

b) odhad z a) $\left|\frac{x^k}{1+k|x|^k}\right| \leq |x|^k \leq \delta^k \; \forall |x| < \delta$

$\sum \delta^k$ konverguje pro $\delta \in (0,1)$, tím jsou ověřené předpoklady Weierstrassovy věty.

c) stejnoměrnou konvergenci na $[-\infty; -1]$.

Vzhledem k a) stačí dokázat, že

$$\frac{x^k}{1+k|x|^k} \rightrightarrows 0 \text{ na } (-\infty, -1].$$

Máme $\left|\frac{x^k}{1+k|x|^k}\right| \leq \frac{1}{|x|^{-k}+k} \leq \frac{1}{k} \to 0.$