PROSEMINAR Z MATEMATICKE ANALYZY 3

DANIEL CAMPBELL

Obsah

Seznam referátů 1
1. Sčítací metody 6.10.2023 2
2. Cantorova Množina 13.10.2023 3
3. 20.10.2023 - cvičení bude nahrazeno 4
4. Funkce zobrazující Cantorových Množin 27.10.2023 5
5. Konvexní funkce s předepsanými body nediferencovatelnosti 3.11.2023 6
6. Polynomy se libí všem 10.11.2023 7
7. Různé druhy spojitosti 24.11.2023 8
8. Zobecnění derivace a integrál 1.12.2023 9
9. Banachova Veta 8.12.2023 10
10. Aplikace Banachovy Vety I 15.12.2023 11
11. Aplikace Banachovy Vety II 22.12.2023 12
12. Baireovy Kategorie I 5.1.2024 13
13. Baireovy Kategorie II 12.1.2024 14
14. Kompaktní metrické prostory 15.12.2023 15

Seznam referátů.

(1) Referát 1.7
(2) Referát 2.1
(3) Referát 3.1
(4) Referát 4.1
(5) Referát 6.1
(6) Referát 9.3
(7) Referát 10.1
(8) Referát 11.1
(9) Referát 12.1
(10) Referát 13.1

1. Sčítací metody 6.10.2023

Definice 1.1. Nechť $a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je posloupnost. Definujeme částečné součty rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Cesàroův součet řady definujeme jako

$$A = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{m} s_k}{m},$$

pokud pravá strana má smysl. Budeme značit tento součet jako $(\mathcal{C}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice 1.2. Nechť $a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je posloupnost. Abelův součet rady definujeme jako

$$A = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

pokud limita na pravé straně pro $x \in \mathbb{R}$ existuje. Budeme značit tento součet jako $(\mathcal{A}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Cvičení 1.3. Najděte $(\mathcal{C}) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ resp. $(\mathcal{A}) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Cvičení 1.4. Dokažte, že pokud existuje $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$ pak

$$(\mathcal{A}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\mathcal{C}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Cvičení 1.5. Nechť $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ pak je i

$$(\mathcal{A}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\mathcal{C}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Cvičení 1.6. Najděte $a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ takovou, že $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ ale existuje Cesàroův nebo Abelův součet její řady.

Referát 1.7 (Tauberova Veta)**.** Nechť $a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ takové, že $na_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ a existuje $(\mathcal{A}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak konverguje její řada v klasickém smyslu a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\mathcal{A}) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Cantorova Množina 13.10.2023

Probereme topologických vlastnosti podmnožin reálné osy. Otevřené, uvážené množiny a jejich vlastnosti. Souvisle a nesouvisle množiny.

Referát 2.1. Konstruujte množinu Cantorova typu s nulovou mírou.

Konstruujte množinu Cantorova typu s kladnou mírou

Cantorova množina se nazývá jakýkoli spojitý injektivní obraz množiny $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Cvičení 2.2. Dokažte, že množina C je uzávěr koncových bodu vynechaných intervalů.

3. 20.10.2023 - cvičení bude nahrazeno

Datum 20.10. je cvičící nepřítomen cvičení bude nahrazeno nebo poveden náhradním vedoucím. Referát 3.1 se může uskutečnit v jinem datu

Referát 3.1. Předveďte Nivenův důkaz iracionality čísla π.

Případně dokažte, že π je transcendentální.

4. Funkce zobrazující Cantorových Množin 27.10.2023

Referát 4.1 (Volterraova funkce)**.** Dokažte, že existuji funkce $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, která má na intervalu $[0,1]$ derivaci $f'(x)$ v kazdem bode $[0,1]$ (v koncovych bodech myslime jednostranne derivace), ale f' není Riemannovsky integrovatelná na $[0,1]$.

Cvičení 4.2 (Cantorova schodovitá funkce)**.** Dokažte, že existuje spojitá funkce $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, pro kterou platí $\exists f'(x) = 0$ pro "skoro každé $x \in [0,1]$" ale $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$.

5. Konvexní funkce s předepsanými body nediferencovatelnosti 3.11.2023

Cvičení 5.1. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $N \subset I$. Najděte funkci f konvexní na I takové, že $\exists f'(x) \Leftrightarrow x \in I \setminus N$.

(1) $I = \mathbb{R}$, $N = \{a\}$,
(2) $I = \mathbb{R}$, $N = \{a, b\}$,
(3) $I = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{N}$,
(4) $I = \mathbb{R}$, $N = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$,
(5) $I = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{Q}$,
(6) $I = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(7) Jak mohutná může byt množina N?

Cvičení 5.2. Napište co nejvíce ekvivalentních definicí konvexní funkce na I

Definice pomoci epigrafu. Definice domainu.

Cvičení 5.3.

(1) Dokažte, že f je spojitá na svém domainu.
(2) Dokažte, že existuje $f^{+'}$ a $f^{-'}$ a celém vnitřku domainu f.
(3) Dokažte, že $f^{+'}(x) \geq f^{-'}(x)$ na celém domainu f.
(4) Dokažte, že $f^{+'}$ a $f^{-'}$ jsou neklesající na domainu f.
(5) Dokažte, že $f^{+'}(x) \leq f^{-'}(y)$ pro všechny $y > x$.
(6) Dokažte, že $f^{-'}(x) < f^{+'}(x) \Rightarrow f^{+'}$ a $f^{-'}$ oba mají skok v x.
(7) Dokažte, že $f^{+'}$ má skok v $x \Rightarrow f^{-'}(x) < f^{+'}(x)$.
(8) Dokažte, že $f^{+'}$ je zprava spojitá.

Cvičení 5.4. Pomoci Cvičení 5.3 zodpovězte Cvičení 5.1, (7).

Proseminář se 17.11.2023 se uskutečnit nebude z důvodu boje za svobodu a demokracii.

6. Polynomy se libí všem 10.11.2023

Referát 6.1. [Stone-Weierstrassova Veta] Nechť $f \in \mathcal{C}([0,1])$ pak existuji polynomy $f_k \to f$ stejnoměrně na $[0,1]$

Cvičení 6.2. Dokažte, že pokud $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\int_0^1 f(x)x^n \, dx = 0$$

pak $f(x) = 0$ pro všechny $x \in [0,1]$.

Definice analytických funkcí

Cvičení 6.3. Dokažte, že třida stejnoměrných limit polynomu na $[0,1]$ není třídou analytických funkcí ale $\mathcal{C}([0,1])$.

Cvičení 6.4. Lze aproximovat $x \mapsto e^x$ na $\mathbb{R}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$ pomoci polynomu? Jak / proč ne?

Cvičení 6.5. Použijte Vetu 6.1, abyste dokázali, že každá spojitá funkce na $[0,1]$ má primitivní funkci.

Cvičení 6.6. Nechť $f \in \mathcal{C}([0,1])$ dokažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)\, dt = 0$$

7. Různé druhy spojitosti 24.11.2023

Uvazujeme $f \in \mathcal{C}((0,1))$.Probereme definice:

Definice 7.1. Říkáme, že f je spojitá v x pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ pokud } |y - x| < \delta \text{ pak } |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice 7.2. Říkáme, že f je stejnoměrně spojitá na $(0,1)$ pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ takové, že } |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

pro kterékoli $x, y \in (0,1)$ splňující $|y - x| < \delta$.

Definice 7.3. Říkáme, že f je absolutně spojitá na $(0,1)$ pokud pro všechny $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $K \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{K} b_i - a_i < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{K} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

pro každý systém $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{K}$ po dvou disjunktních intervalu.

Definice 7.4. Říkáme, že f je Lipschitzovsky spojitá na $(0,1)$ pokud existuje $M > 0$ taková, že

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

pro každý par $x, y \in (0,1)$.

Cvičení 7.5. Který druh spojitosti implikuje jiny? Dokažte. Který druh neimplikuje jiny, najděte protipříklad.

Datum 8.12. je cvičící nepřítomen cvičení bude nahrazeno nebo poveden náhradním vedoucím

8. Zobecnění derivace a integrál 1.12.2023

Mějme $F : [0,2] \mapsto \mathbb{R}$ definovaná výrazem

$$F(x) = \begin{cases} -\int_x^1 f(t)\,dt & 0 < x \le 1 \\ \int_1^x f(t)\,dt & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

pro nějakou $f : [0,2] \mapsto \mathbb{R}$. Integrál uvazujte jako Newtonův, Riemannův nebo Lebesgueův.

Cvičení 8.1. Kdy je F je spojitá, stejnoměrně spojitá, absolutně spojitá nebo Lipschitzovsky spojitá?

Cvičení 8.2. Lze najit f_k omezené takové, že

$$\int_0^1 |f(t) - f_k(t)|\,dt \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

kde

(1) $f \in \mathcal{N}([0,1])$,
(2) $f \in \mathcal{R}([0,1])$,
(3) $f \in L^1(0,1)$.

Lze požadovat f_k spojité? Lze požadovat f_k hladké?

Definice 8.3. Nechť $f, g : (0,1) \mapsto \mathbb{R}$ jsou integrovatelné funkce na $(0,1)$. Říkáme, že g je slabá derivace f na $(0,1)$ pokud platí

$$\int_0^1 f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 g(x)\varphi(x)\,dx$$

platí pro každé $\varphi \in \mathcal{C}^\infty((0,1))$ takové, že $\overline{\{\varphi \neq 0\}} \subset (0,1)$.

Cvičení 8.4. Dokažte, že pro $f \in \mathcal{C}^1((0,1))$ je f' slabou derivaci f.

Cvičení 8.5. Najděte funkci která není $\mathcal{C}^1((0,1))$ ale má slabou derivaci na $(0,1)$.

Cvičení 8.6. Jak to je s jednoznačnosti slabé derivace?

Cvičení 8.7. Dokažte, že pokud f má skoro všude nulovou slabou derivaci na $(0,1)$ pak je f konstantní na $(0,1)$.

Cvičení 8.8. Dokažte, že pokud f má slabou derivaci pak f je absolutně spojitá.

Cvičení 8.9. Rozhodnete jestli (a) implikuje (b), jestli (b) implikuje (a) nebo naopak

(a) f je spojitá a $\exists f'$ skoro všude
(b) f má slabou derivaci na $(0,1)$

Cvičení 8.10. Dokažte, že F Lipschitz spojité $\Rightarrow \exists F(x)$ v “skoro všech bodech”?

Datum 8.12. je cvičící nepřítomen cvičení bude nahrazeno nebo poveden náhradním vedoucím

9. Banachova Veta 8.12.2023

Datum 8.12. je cvičící nepřítomen cvičení bude nahrazeno nebo poveden náhradním vedoucím

Definice 9.1. Říkáme, že metrický prostor (X, ρ) je úplný pokud každá ρ-Cauchyovská posloupnost prvku X má limitu v X.

Definice 9.2. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $f : X \to X$. Říkáme, že f je kontrakce na X pokud existuje $\alpha \in (0, 1)$ takové, že

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$$

pro všechny $x, y \in X$.

Referát 9.3 (Banachova Veta o kontrakci)**.** Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a nechť f je kontrakce na X. Pak existuje pravé jedno $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Součástí referátu 9.3 je vyřešení Cvičení 9.4 a 9.5

Cvičení 9.4. Najděte příklad toho, že Veta 9.3 neplatí pokud X není úplný.

Cvičení 9.5. Lze ve Větě 9.3 nahradit podmínku $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$ pro $x, y \in X$ podmínkou $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ pro $x, y \in X$, $x \neq y$?

10. Aplikace Banachovy Vety I 15.12.2023

Referát 10.1 ("Peanova veta")**.** Nechť, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ je omezená funkce, nechť $\delta > 0$ a nechť $f_\varepsilon : \mathcal{C}^0((-\delta, \delta)) \mapsto \mathcal{C}^0((-\delta, \delta))$ je definovaný výrazem

$$[f_\delta(u)](x) = \begin{cases} \int_0^x g(u(x))\,dx & 0 \le x < \delta \\ -\int_x^0 g(u(x))\,dx & -\delta < x \le 0. \end{cases}$$

(1) Dokažte, že existuje $\delta > 0$ takové, že f_δ je kontrakce na $\mathcal{C}((-\delta, \delta))$.

(2) Dokažte, že pevný bod $u = f_\delta(u)$ je na $(-\delta, \delta)$ řešením diferenciální rovnice

$$u'(x) = g(u(x)), \qquad u(0) = 0. \tag{10.1}$$

Cvičení 10.2. Dokažte, že $\{f \in \mathcal{C}^0((-\delta, \delta)) : f(0) = 0\}$ tvoří uzavřenou množinu v $(\mathcal{C}^0((-\delta, \delta)), \|\cdot\|_\infty)$, který je navíc lineárním prostorem.

Cvičení 10.3. Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $Y \subset X$ je uzavřená jeho podmnožina. Dokažte, že $(Y, \rho_{\rceil Y \times Y})$ je úplný metrický prostor.

Cvičení 10.4. Lze zeslabit předpoklad omezenosti g ve Větě 10.1? Dokažte nebo najděte protipříklad.

11. Aplikace Banachovy Vety II 22.12.2023

Referát 11.1 (Diniho Veta)**.** Pomoci Vety 9.3 dokažte Diniho Vetu o implicitních funkcích. Např. Fixed Point Theorems and Applications Vittorino Pata Theorem 2.4

Cvičení 11.2. Dokažte, že $\Psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $[\Psi(f)](x) = f^2(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$ je má Frechetovskou derivaci na $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Cvičení 11.3. Zkonstruujte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je Gateauxovsky diferencovatelná ale není Frechetovsky diferencovatelná. Totiž existuje lineární $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$Av = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

ale neplatí

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x + y) - f(y) - Ay}{|y|}.$$

Referát 11.4. Zazpívejte vánoční koledu

12. Baireovy Kategorie I 5.1.2024

Referát 12.1. Poreferujte

(1) definici řídké množiny s příklady,
(2) Baireovu vetu o kategoriích,
(3) definice množin první a druhé kategorie.

Cvičení 12.2. Může řídká množina v $\mathbb{R}$ mít kladnou míru?

Cvičení 12.3. Může množina první třídy v $\mathbb{R}$ byt hustá?

Cvičení 12.4. Může množina druhé třídy v $[0,1]$ mít nulovou míru?

13. Baireovy Kategorie II 12.1.2024

Referát 13.1. Poreferujte o tom, že $\mathcal{C}^1([0,1])$ je první kategorie v $\mathcal{C}^0([0,1])$.

14. Kompaktní metrické prostory 15.12.2023

Bude doplněno v případě potřeby a podle zajmu studentů.