Řady s obecnými členy

13. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

Věta (Nutná podmínka konvergence)
Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta (Srovnávací kritérium)
Nechť posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují, že $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ 0 \le a_n \le b_n$. Potom platí následující implikace:

- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right)$

Věta (Limitní srovnávací kritérium)
Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť posloupnosti nezáporných čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ splňují $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Potop platí:

- Je-li $c \in (0, \infty)$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right)$.
- Je-li $c = 0$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$.
- A je-li $c = \infty$, pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje}\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$.

Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť je $\{a_n\}$ libovolná posloupnost. Potom platí, že:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

Věta (d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nenulových čísel. Potom platí:

- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně}\right)$
- $\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$

Věta (Leibnizovo kritérium)
Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost jdoucí k nule ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Tvrzení
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje, právě když $q \in (-1, 1)$.

Příklady:

Vyšetřete konvergenci následujících řad s nezápornými členy v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+100}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n 2^n n}{4^n+(-1)^n n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+4}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n+3n+4}{2n^4+3}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \frac{1}{n}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \arcsin \frac{1}{n}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2\pi) \left(\sqrt{n+9} - \sqrt{n}\right)$

* (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(n^{-2})} + \tan\left(\frac{n}{n^3+1}\right) - 1}{\sin\left(\pi - \frac{1}{n}\right)} \cdot \left(n^2 - n^2 \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$