Geometrie

Ondřej Bouchala

Matematická party

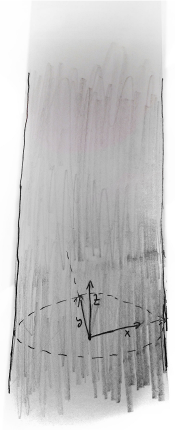
12. srpna 2014

Sférická geometrie – úvod

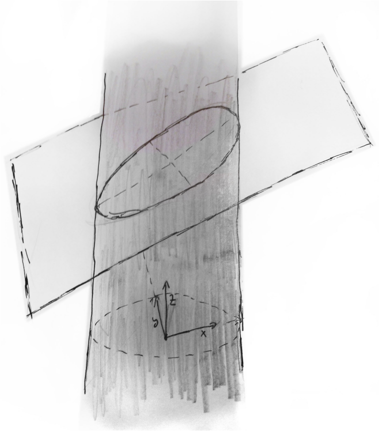
Sférická geometrie – trojúhelník

Koule ve válci

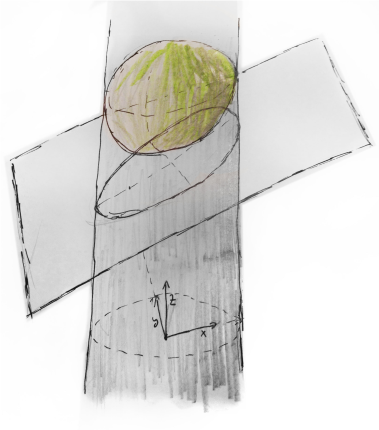
Koule ve válci



Koule ve válci



Koule ve válci

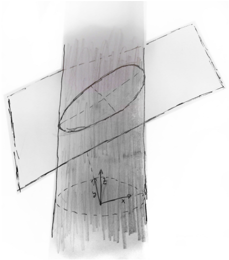


Koule ve válci – výpočet

KOULE VE VÁLCI – VÝPOČET

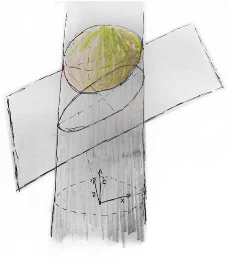
- Válec: $x^2 + y^2 = 1$

KOULE VE VÁLCI – VÝPOČET



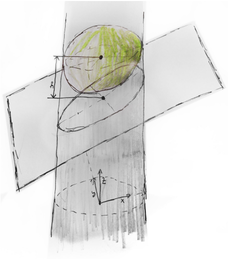
- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$

Koule ve válci – výpočet



- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$

Koule ve válci – výpočet



- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - $z = x$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - $z = x$
  - $x^2 + y^2 + (x - h)^2 = 1$

KOULE VE VÁLCI – VÝPOČET

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - $z = x$
  - $x^2 + y^2 + (x - h)^2 = 1$
  - $y = \pm\sqrt{1 - 2x^2 + 2xh + h^2}$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - $z = x$
  - $x^2 + y^2 + (x - h)^2 = 1$
  - $y = \pm\sqrt{1 - 2x^2 + 2xh + h^2}$
  - $y = 0$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
    - $z = x$
    - $x^2 + y^2 + (x - h)^2 = 1$
    - $y = \pm\sqrt{1 - 2x^2 + 2xh + h^2}$
    - $y = 0$
    - $1 - 2x^2 + 2xh + x^2 = 0$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - $z = x$
  - $x^2 + y^2 + (x - h)^2 = 1$
  - $y = \pm\sqrt{1 - 2x^2 + 2xh + h^2}$
  - $y = 0$
  - $1 - 2x^2 + 2xh + x^2 = 0$
  - $h = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(1 - 2x^2)}}{2} = -x \pm \sqrt{3x^2 - 1}$

KOULE VE VÁLCI – VÝPOČET

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - $z = x$
  - $x^2 + y^2 + (x - h)^2 = 1$
  - $y = \pm\sqrt{1 - 2x^2 + 2xh + h^2}$
  - $y = 0$
  - $1 - 2x^2 + 2xh + x^2 = 0$
  - $h = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(1-2x^2)}}{2} = -x \pm \sqrt{3x^2 - 1}$
  - $2\,x^2 - 2\,x\left(-x - \sqrt{3\,x^2 - 1}\right) + \left(-x - \sqrt{3\,x^2 - 1}\right)^2 = 8\,x^2 - 1 + 4\,x\sqrt{3\,x^2 - 1} = 1$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - $z = x$
  - $x^2 + y^2 + (x - h)^2 = 1$
  - $y = \pm\sqrt{1 - 2x^2 + 2xh + h^2}$
  - $y = 0$
  - $1 - 2x^2 + 2xh + x^2 = 0$
  - $h = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(1 - 2x^2)}}{2} = -x \pm \sqrt{3x^2 - 1}$
  - $2\,x^2 - 2\,x\left(-x - \sqrt{3\,x^2 - 1}\right) + \left(-x - \sqrt{3\,x^2 - 1}\right)^2 = 8\,x^2 - 1 + 4\,x\sqrt{3\,x^2 - 1} = 1$
  - $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = z$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z-h)^2 = 1$
  - $z = x$
  - $x^2 + y^2 + (x-h)^2 = 1$
  - $y = \pm\sqrt{1 - 2x^2 + 2xh + h^2}$
  - $y = 0$
  - $1 - 2x^2 + 2xh + x^2 = 0$
  - $h = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(1-2x^2)}}{2} = -x \pm \sqrt{3x^2 - 1}$
  - $2\,x^2 - 2\,x\left(-x - \sqrt{3\,x^2 - 1}\right) + \left(-x - \sqrt{3\,x^2 - 1}\right)^2 = 8\,x^2 - 1 + 4\,x\sqrt{3\,x^2 - 1} = 1$
  - $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} = z$
  - Průsečík je tedy $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.

KOULE VE VÁLCI – VÝPOČET

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - Průsečík je tedy $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.
  - Vzdálenost od středu elipsy je tedy $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 0^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 1$.

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z-h)^2 = 1$
    - Průsečík je tedy $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.
    - Vzdálenost od středu elipsy je tedy $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 0^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 1$.
    - Elipsa se dá popsat parametricky jako $x = \sin(t), y = \cos(t), z = \sin(t)$, kde $t \in (0, 2\pi)$.

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - Průsečík je tedy $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.
  - Vzdálenost od středu elipsy je tedy $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 0^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 1$.
  - Elipsa se dá popsat parametricky jako $x = \sin(t), y = \cos(t), z = \sin(t)$, kde $t \in (0, 2\pi)$.
  - Dosazením $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ dostaneme vrcholy elipsy: $[0, 1, 0], [1, 0, 1], [0, -1, 0]$ a $[-1, 0, -1]$.

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z-h)^2 = 1$
  - Průsečík je tedy $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.
  - Vzdálenost od středu elipsy je tedy $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 0^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 1$.
  - Elipsa se dá popsat parametricky jako $x = \sin(t), y = \cos(t), z = \sin(t)$, kde $t \in (0, 2\pi)$.
  - Dosazením $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ dostaneme vrcholy elipsy: $[0,1,0], [1,0,1], [0,-1,0]$ a $[-1,0,-1]$.
  - Tedy délka hlavní poloosy je $a = \frac{\sqrt{4+0+4}}{2} = \sqrt{2}$, délka vedlejší poloosy je $b = \frac{\sqrt{0+4+0}}{2} = 1$

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - Průsečík je tedy $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.
  - Vzdálenost od středu elipsy je tedy $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 0^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 1$.
  - Tedy délka hlavní poloosy je $a = \frac{\sqrt{4+0+4}}{2} = \sqrt{2}$, délka vedlejší poloosy je $b = \frac{\sqrt{0+4+0}}{2} = 1$
  - Pro excentricitu elipsy e platí, že $e^2 + b^2 = a^2$, tedy že $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$.

Koule ve válci – výpočet

- Válec: $x^2 + y^2 = 1$
- Rovina: $-x + z = 0$
- Koule: $x^2 + y^2 + (z - h)^2 = 1$
  - Průsečík je tedy $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.
  - Vzdálenost od středu elipsy je tedy $\sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 0^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 1$.
  - Tedy délka hlavní poloosy je $a = \frac{\sqrt{4+0+4}}{2} = \sqrt{2}$, délka vedlejší poloosy je $b = \frac{\sqrt{0+4+0}}{2} = 1$
  - Pro excentricitu elipsy e platí, že $e^2 + b^2 = a^2$, tedy že $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2-1} = 1$.

$\ddot{o}\pi\varepsilon\varrho\ \ddot{\varepsilon}\delta\varepsilon\iota\ \delta\varepsilon\tilde{\iota}\xi\alpha\iota$

Koule ve válci – výpočet – nejsem debil

Geogebra

Izoperimetrická nerovnost

Rovinným útvarem největšího obsahu, který má daný obvod, je kruh.

Izoperimetrická nerovnost – důkaz

Geogebra