

Předmět: NMTM101 Matematická analýza I

Typ výuky: Cvičení

Vahid Borji
borji@karlin.mff.cuni.cz

Cvičení 9

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot 1 \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{2x+1}+3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\overset{2(\cancel{x-4})}{(\cancel{2x+1}-9)}(\sqrt{x}+2)}{(\cancel{x-4})(\sqrt{2x+1}+3)} = \frac{2 \times 4}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} \quad \frac{0}{0} \quad (x-7) \quad A^6 - B^6 = (A-B)(A^5 + A^4B + A^3B^2 + \dots + B^5)$$

$$A^4 - B^4 = (A-B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)$$

$$\sqrt{x+2} = A \quad \sqrt[3]{x+20} = B \quad \sqrt[4]{x+9} = C \quad 2 = D$$

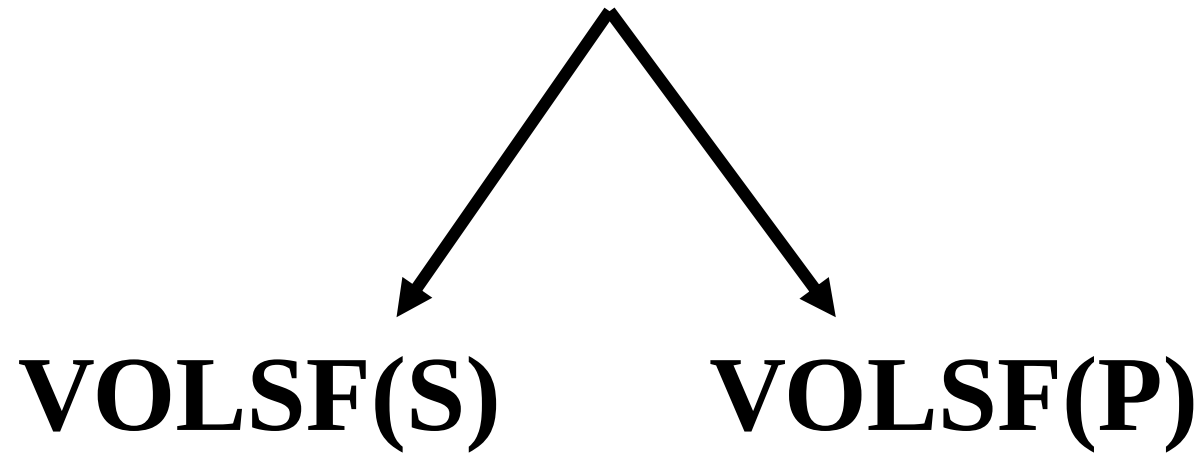
$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20} (A^5 + A^4B + A^3B^2 + \dots + B^5)(C^3 + C^2D + CD^2 + D^3)}{\sqrt[4]{x+9} - 2 (A^5 + A^4B + A^3B^2 + \dots + B^5)(C^3 + C^2D + CD^2 + D^3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\frac{(x+2)^3 - (x+20)^2}{((\cancel{\sqrt{x+2}})^6 - (\cancel{\sqrt[3]{x+20}})^6)}(C^3 + C^2D + CD^2 + D^3)}{\frac{((\cancel{\sqrt[4]{x+9}})^4 - (2)^4)}{(x-7)}(A^5 + A^4B + A^3B^2 + \dots + B^5)}$$

$x = 7 \Rightarrow A = 3 \quad B = 3$
 $x = 7 \Rightarrow C = 2 \quad D = 2$

$$= \frac{4 \times 8}{6 \times 3^5} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^3 + 5x^2 - 28x - 392}{x-7} = \frac{4 \times 8}{6 \times 3^5} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2 + 12x + 56)}{(x-7)} = \frac{112}{27}$$

Věta o limitě složené funkce (VOLSF)



$$\lim_{\boxed{x \rightarrow 0}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \begin{cases} \rightarrow f(y) = e^y \\ \rightarrow y = -\frac{x^2}{2} \end{cases} \quad f \text{ je } \underline{\text{spojitá}} \text{ v bodě } 0$$

$\xrightarrow{\text{green}} 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \right)} = e^0 = 1$$

VOLSF(S)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \right)$$

$$\lim_{\boxed{x \rightarrow \infty}} \ln \frac{x-1}{x+1} = 0$$

$\ln \frac{x-1}{x+1}$

$f(y) = \ln y$ f je spojitá v bodě **1**

$y = \frac{x-1}{x+1}$

$\longrightarrow \mathbf{1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} \right) = \ln(\mathbf{1}) = 0$$

VOLSF(S)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^7 - 12x^2 + 3}{27x^7 - 12x^2 + 3}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^7 - 12x^2 + 3}{27x^7 - 12x^2 + 3}} \begin{matrix} \nearrow f(y) = \sqrt[3]{y} & f \text{ je } \underline{\text{spojitá}} \text{ v bodě } \frac{1}{27} \\ \searrow y = \frac{x^7 - 12x^2 + 3}{27x^7 - 12x^2 + 3} \end{matrix}$$

$\xrightarrow{\quad} \frac{1}{27}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^7 - 12x^2 + 3}{27x^7 - 12x^2 + 3}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - 12x^2 + 3}{27x^7 - 12x^2 + 3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

VOLSF(S)

Poučka. Při vyhodnocení limit funkcí se často využívají následující výsledky. Jde o tzv. známé limity:

Znamé limity:

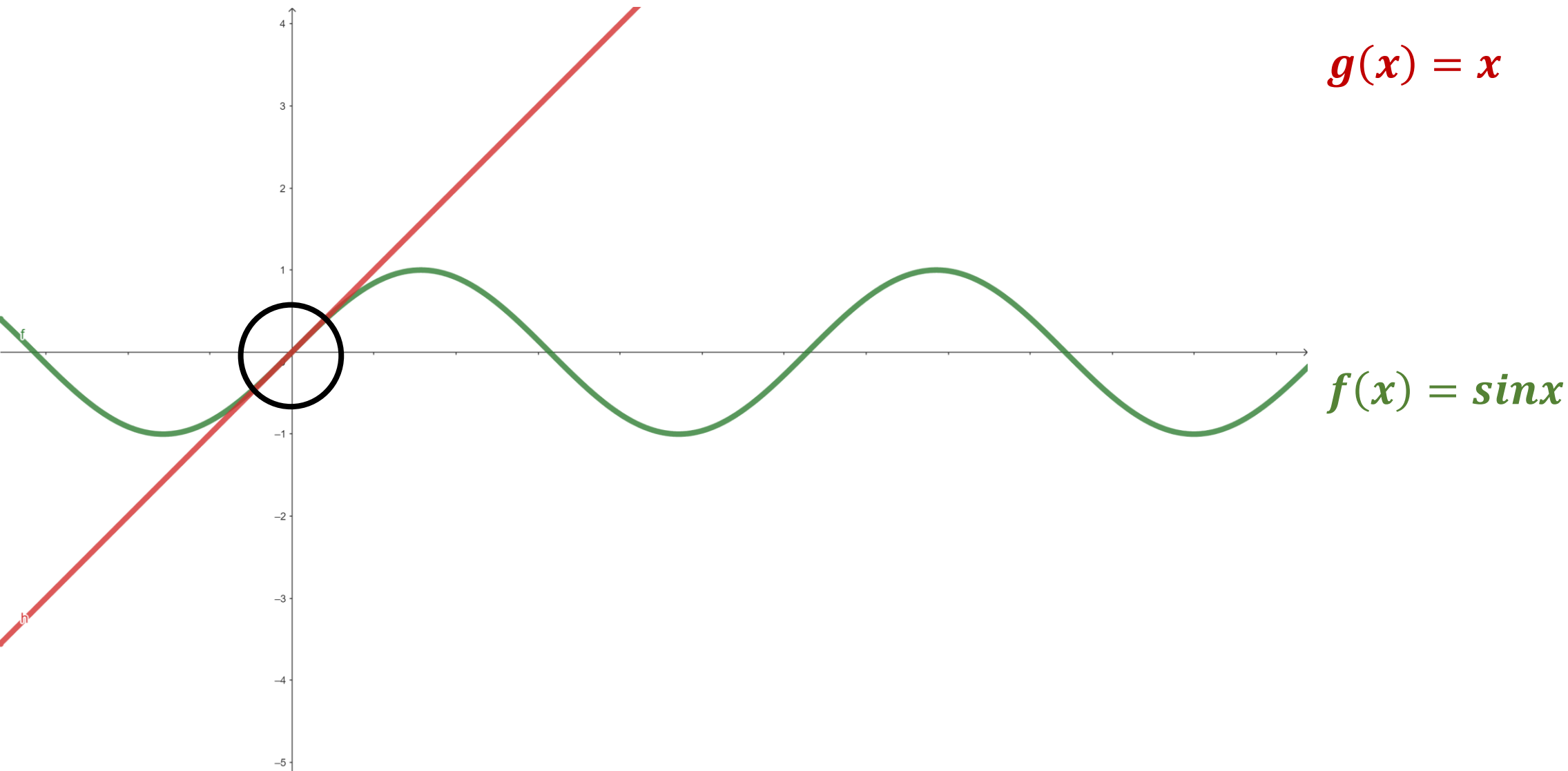
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

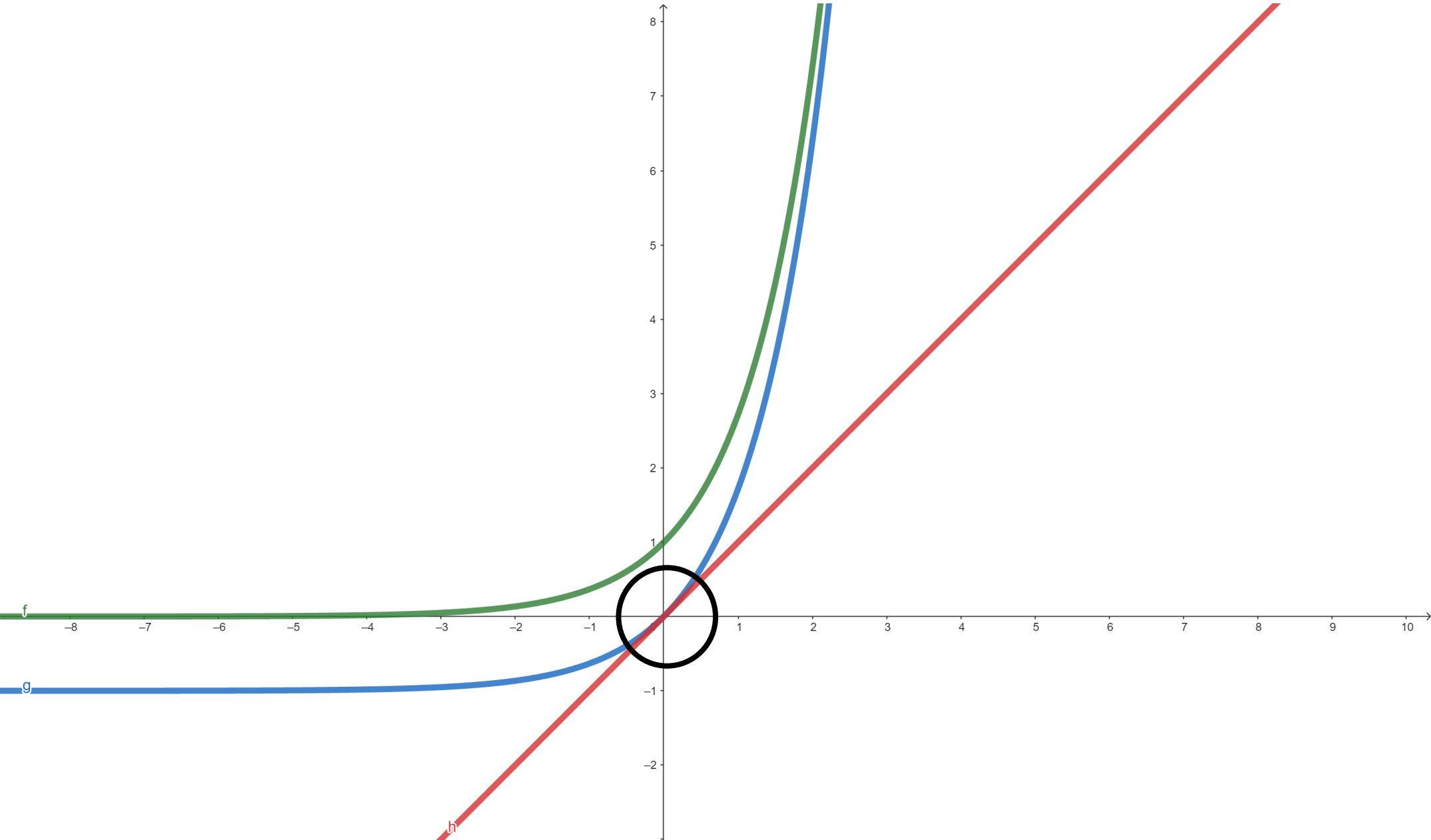
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Poučka. Při vyhodnocení limit funkcí se často využívají následující výsledky. Jde o tzv. známé limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



$$h(x) = x$$

$$g(x) = e^x - 1$$

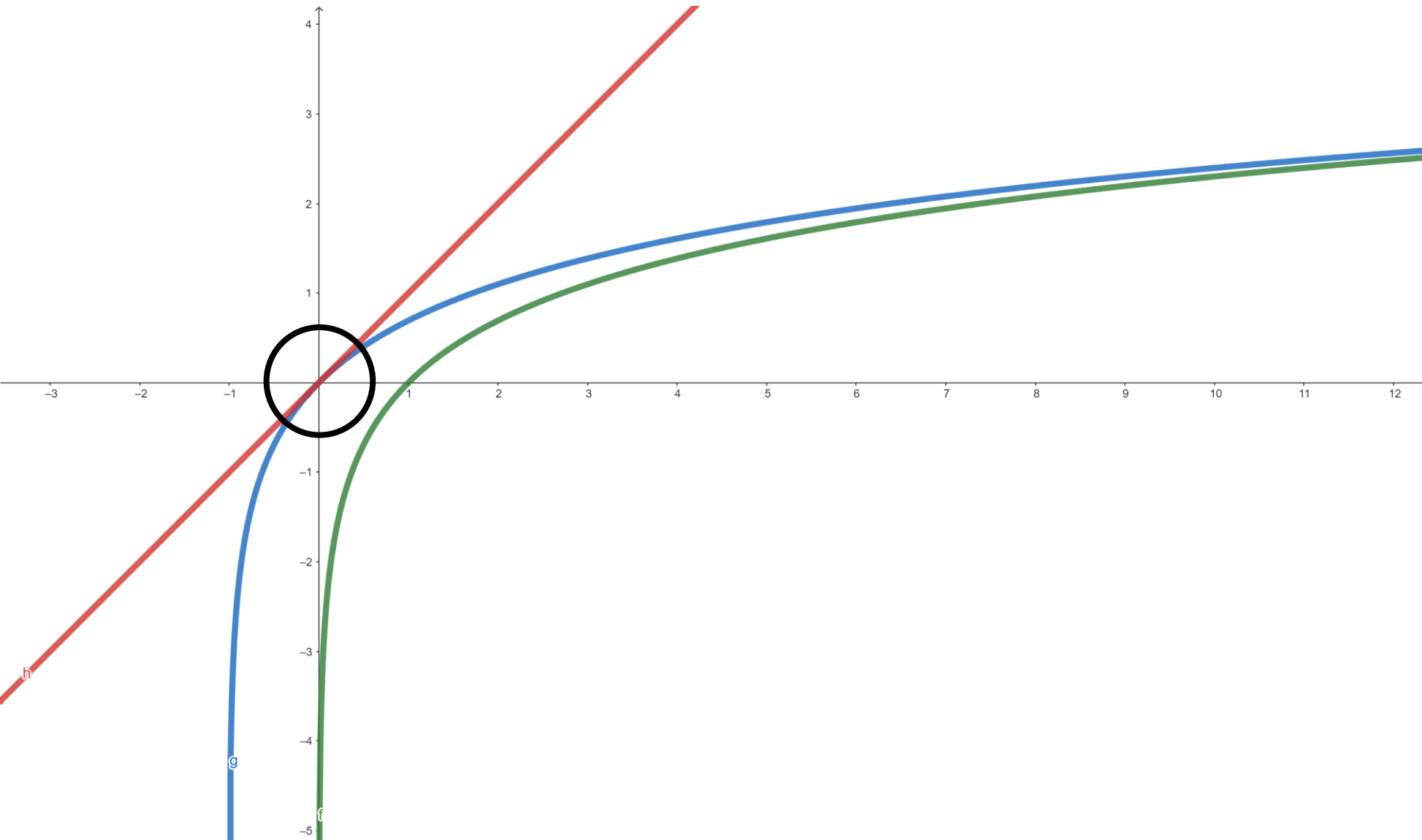
$$f(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$h(x) = x$$

$$g(x) = \ln(x+1)$$

$$f(x) = \ln x$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$

$$x + 1 = y$$

$$x \rightarrow 0$$

$$y \rightarrow 1$$

$$x = y - 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y - 1} = 1$$

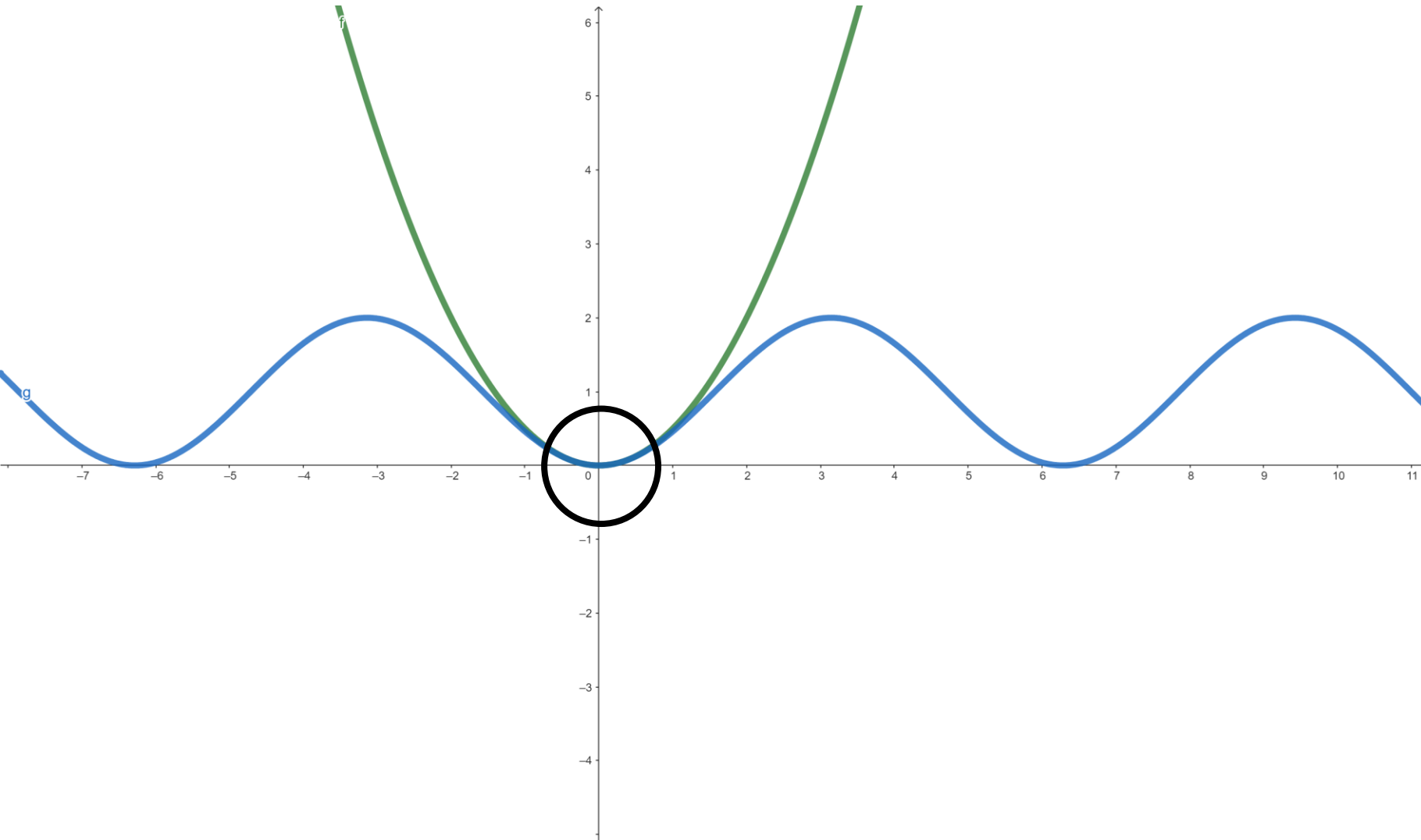
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 0 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} \approx \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow 0 \quad 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = 1 - \cos x$$



Známé limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \neq \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x}{\lim_{x \rightarrow 0} 2x} = \frac{0}{0} \quad \frac{\sin 2x}{2x} \begin{cases} f(y) = \frac{\sin y}{y} \\ y = 2x \end{cases} \quad f \text{ **NENÍ** spojitá v bodě 0}$$

$\xrightarrow{\text{green}} 0$

Věta o limitě složené funkce (P):

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \quad \text{Existuje okolí } U_{\delta}^*(0) \Rightarrow 2x \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3$$

Vnitřní funkce $y = 3x \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Vnější funkce

Věta o limitě složené funkce (P)

Existuje okolí $U_{\delta}^*(0) \Rightarrow 3x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 5x}{x} \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} - \frac{\sin 5x}{x} \right) = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} - 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 4 \times 1 - 5 \times 1 = -1$$

$$y = 4x \rightarrow 0$$

VOLSF(P)

VOLSF(P)

Vnitřní funkce

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Vnější funkce

Existuje okolí $U_\delta^*(0) \Rightarrow 4x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{1 - \cos x} \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{x^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x| |x|}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$$

$$= 2 \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$$

$$= 2 (1) (\infty) = \infty$$

VOLSF(S)

$f(y) = |y|$ je spojitá v bodě 1

$$y = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$$