

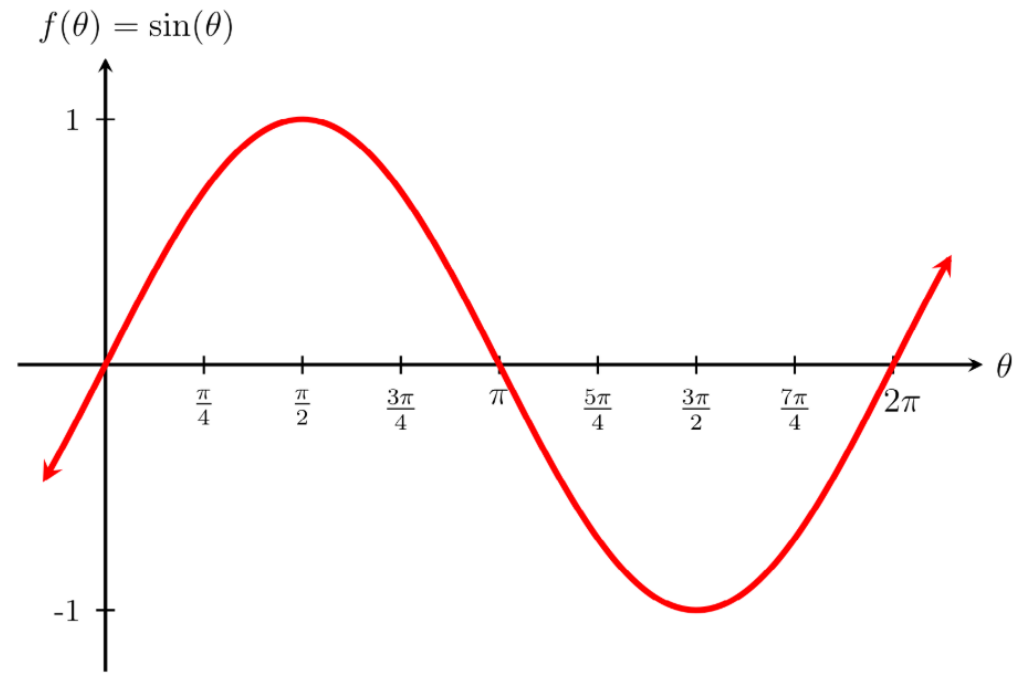
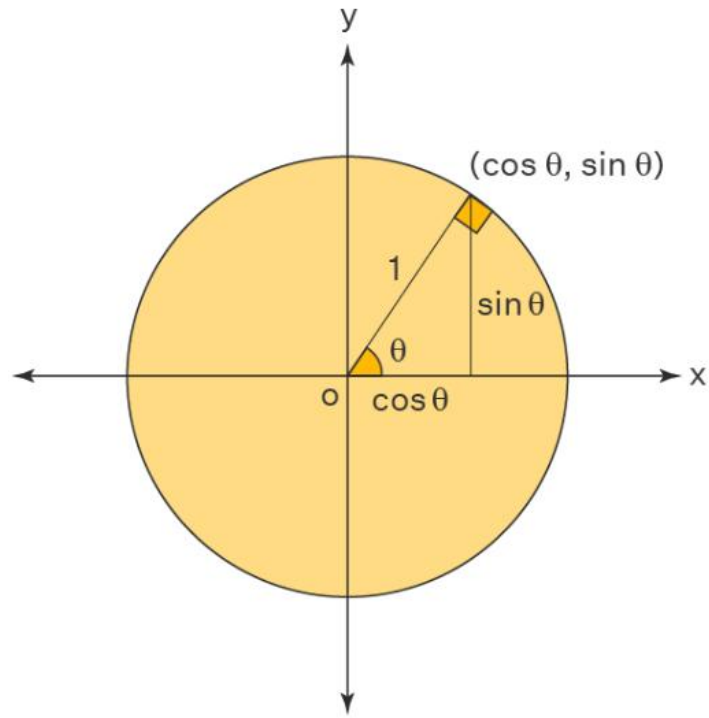
Předmět: NMTM101 Matematická analýza I

Typ výuky: Cvičení

Vahid Borji
borji@karlin.mff.cuni.cz

Cvičení 2

$$f(x) = \sin x$$

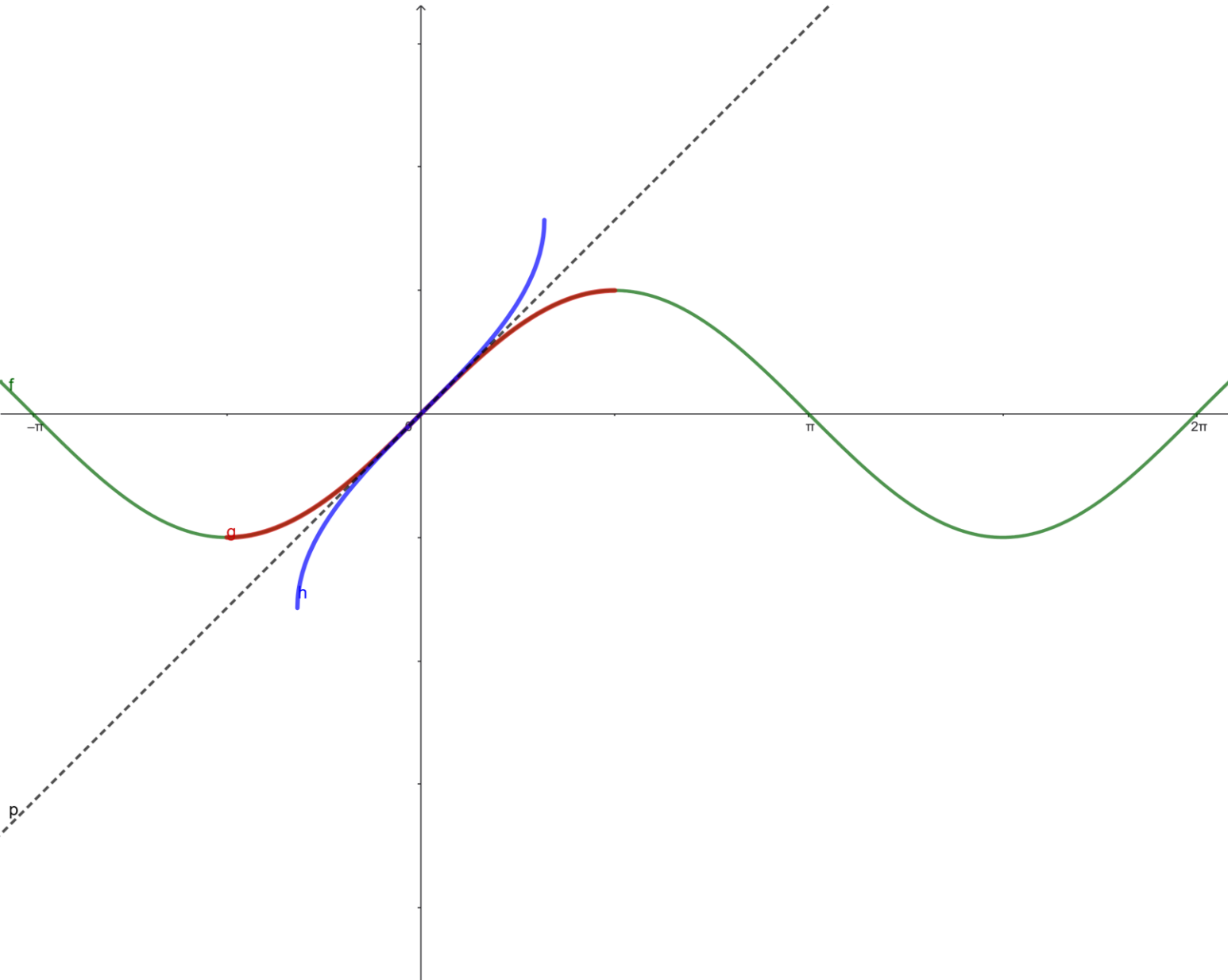


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x$$

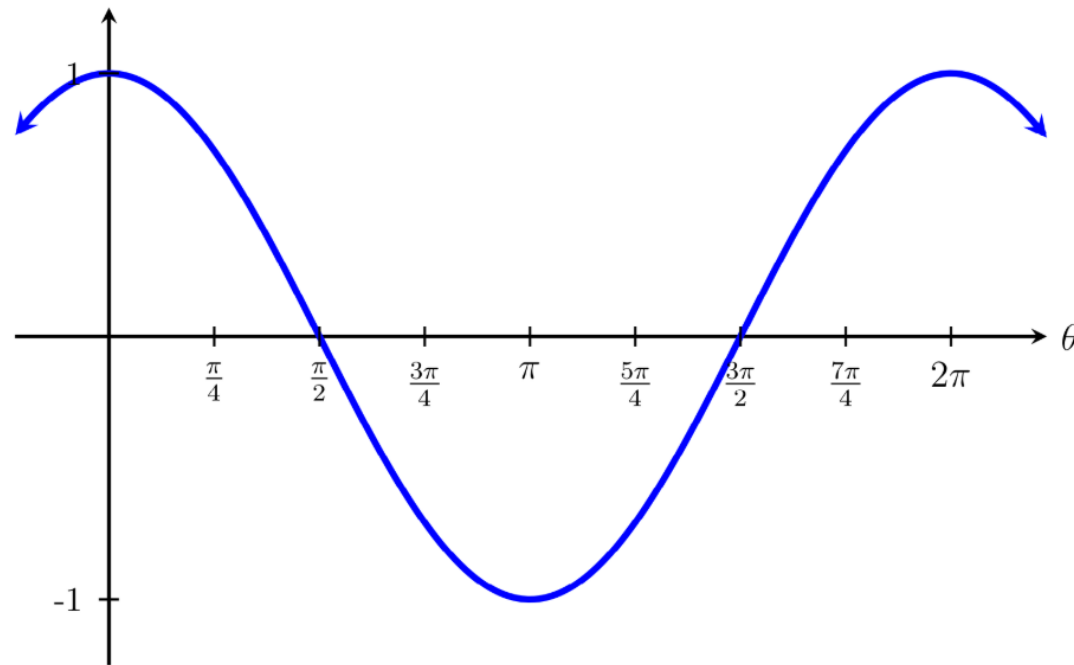
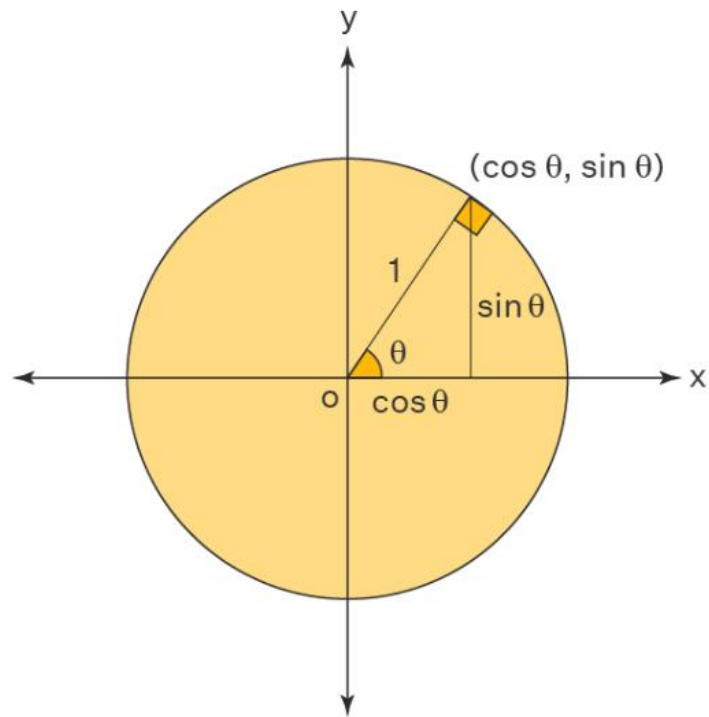
$$f^{-1}(x) = \sin^{-1}x = \arcsin x$$



$$D_{\arcsin} = [-1, 1]$$

$$H_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x) = \cos x$$

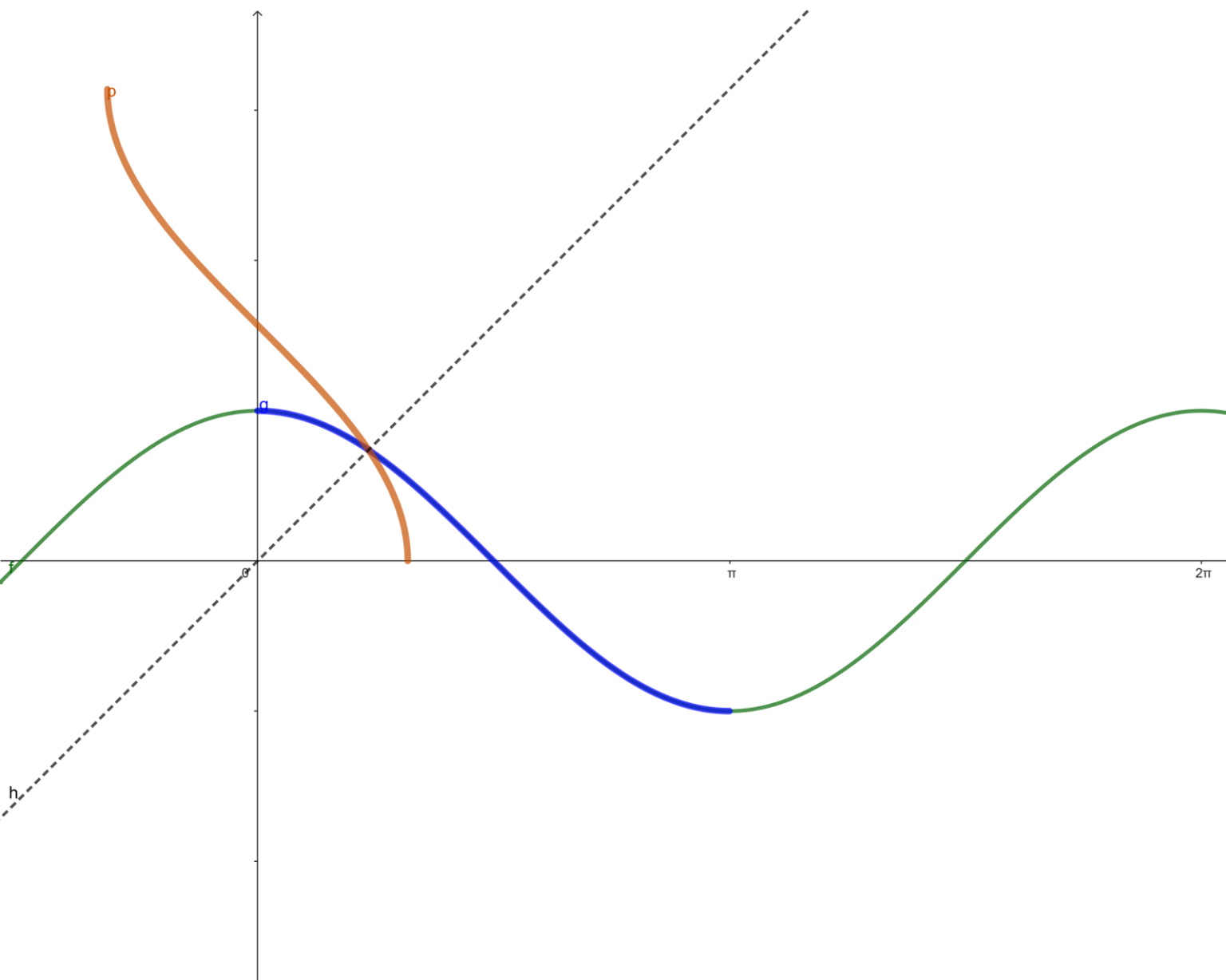


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = [-1, 1]$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x = \arccos x$$



$$D_{\arccos} = [-1, 1]$$

$$H_{\arccos} = [0, \pi]$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{nebo} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

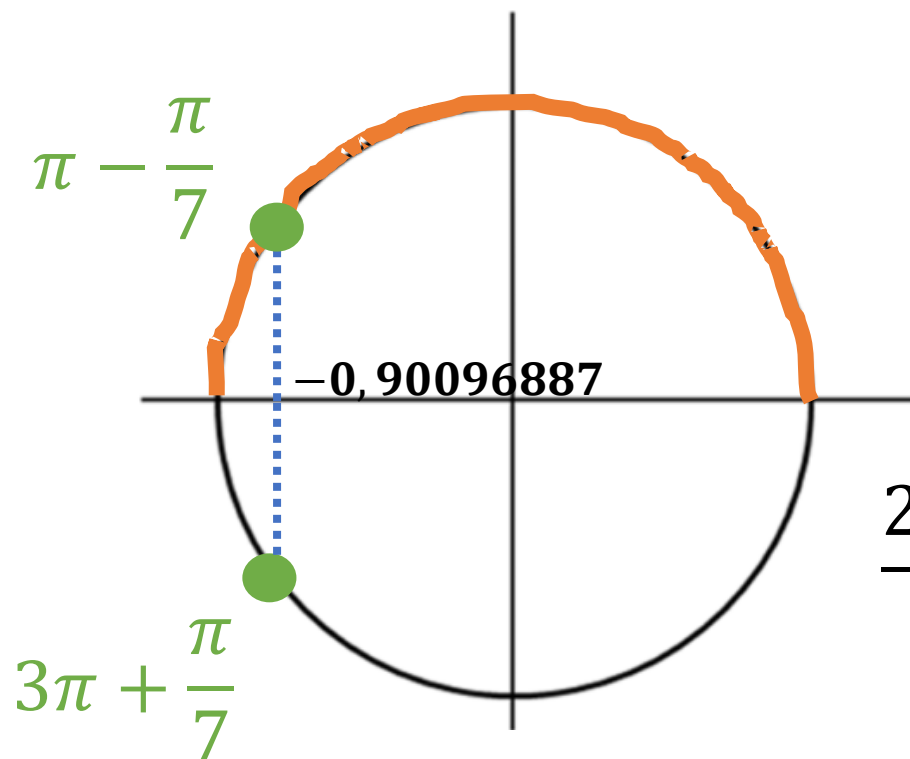
$$\sin x = 3 \quad \times$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{nebo} \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 3x = -1 \Rightarrow \sin y = -1 \quad y = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = y \quad 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Pokud $\cos(\frac{22\pi}{7}) = -0,90096887$, určete $\cos^{-1}(-0,90096887)$?



$$\frac{22\pi}{7} = \frac{21\pi + \pi}{7} = 3\pi + \frac{\pi}{7}$$

$$\frac{22\pi}{7} \notin \langle 0, \pi \rangle \Rightarrow \cos^{-1}(-0,90096887) \neq \frac{22\pi}{7}$$

$$\cos^{-1}(-0,90096887) = \pi - \frac{\pi}{7}$$

Požádali jsme studenta, aby vyřešil trigonometrickou rovnici $\sin(2x) = 0,7$.
Student předložil následující řešení:

$$\sin(2x) = 0,7$$

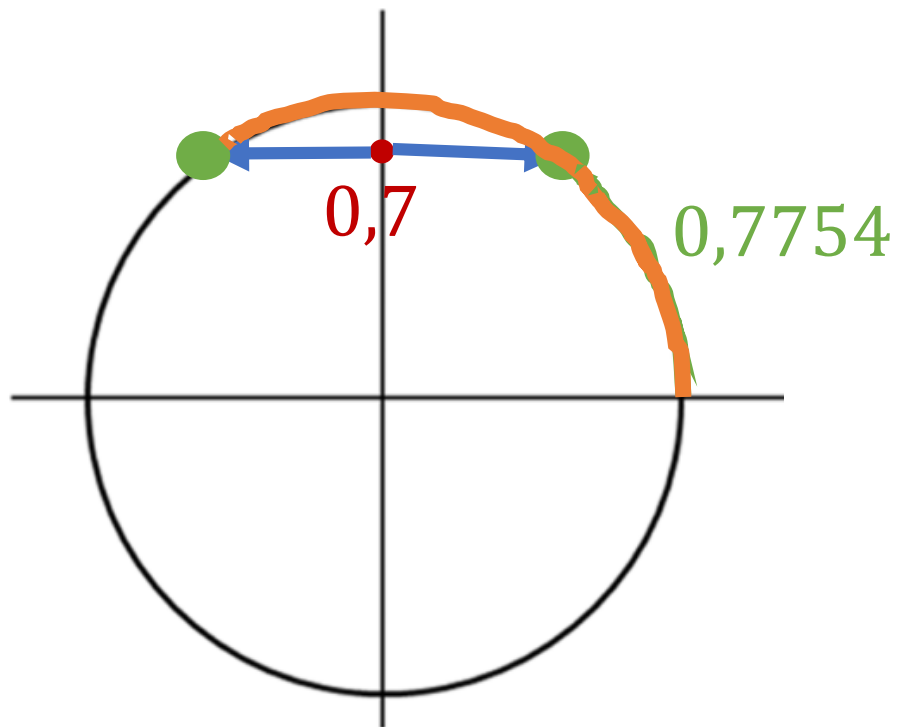
$$2x = \arcsin(0,7)$$

$$2x = 0,7754$$

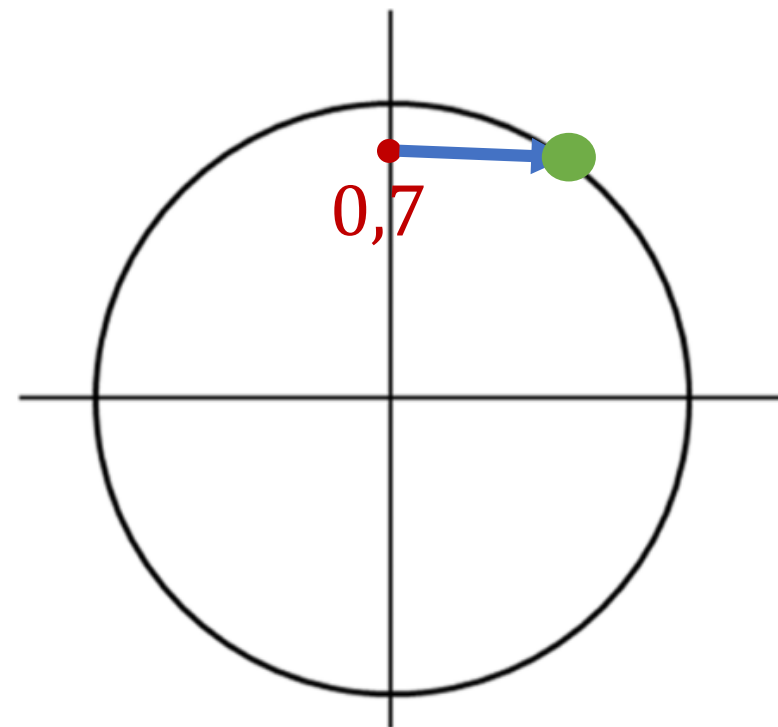
$$x = 0,3877 + 2\pi k$$

- (a)** Zhodnoťte práci studenta – je správná nebo nesprávná?
- (b)** Pokud si myslíte, že tam jsou chyby, určete je a vysvětlete, proč jsou to chyby.
- (c)** Pokud si myslíte, že uvedené řešení je nesprávné, uveďte správnou odpověď.

$$\sin(2x) = 0,7$$



$$2x = \arcsin(0,7)$$



$$2x = 0,7754 + 2k\pi \Rightarrow x = 0,3877 + k\pi$$

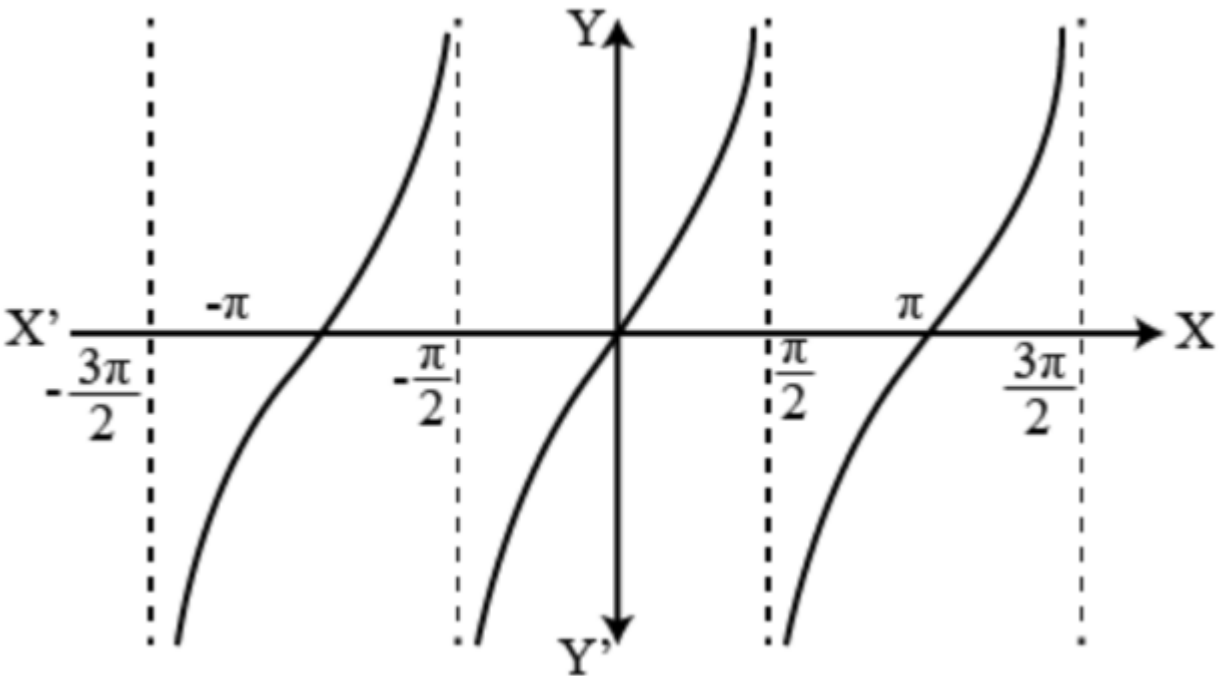
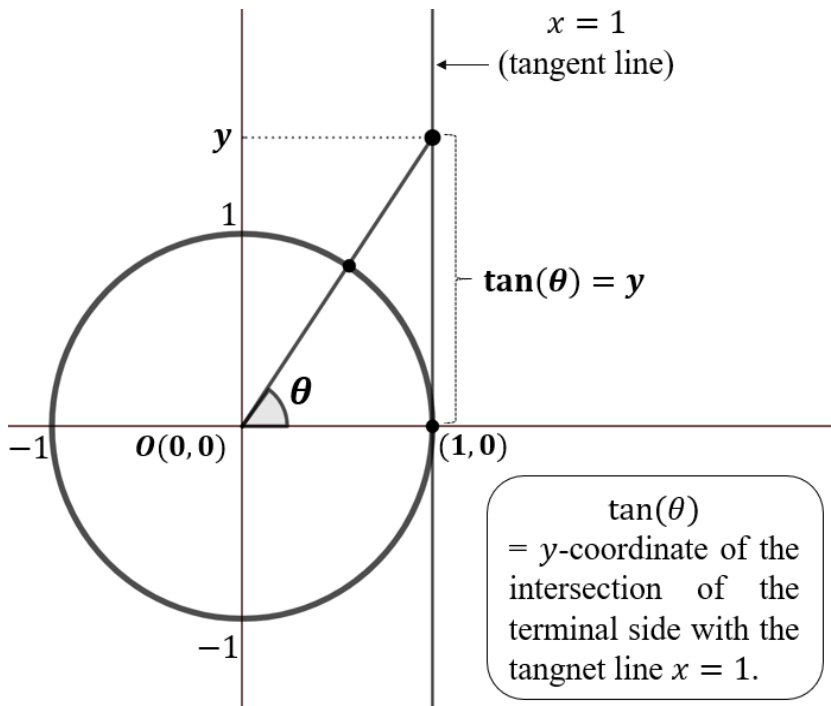
∨

$$2x = \pi - 0,7754 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 0,3877 + k\pi$$

$$2x = 0,7754$$

$$x = 0,3877$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



$$D_f = \mathbb{R} - \{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$H_f = \mathbb{R}$$

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
degree	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Řešte rovnici v $\mathbb{R}$.

$$\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x \operatorname{tg} x = 1$$

$$\frac{\frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin x}}}{\cos x} + \cos^{\cancel{2}} x \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} = 1 \Rightarrow \sin x \cos x + \cos x \sin x = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Řešte rovnici v $\mathbb{R}$. $\sin^2 x - 6\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{6\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 6 + \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -3 \Rightarrow x = \operatorname{arctg}(-3) + k\pi$$

nebo

nebo

$$\operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x = \operatorname{arctg}(2) + k\pi$$

Důkaz matematickou indukcí

- Důkaz matematickou indukcí se používá pro věty, které se týkají (téměř) všech přirozených čísel nebo jsou na nich nějak závislé.

$$\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid 10^n - 4$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: n \leq 2^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Důkaz matematickou indukcí

Důkaz matematickou indukcí sestává ze dvou kroků:

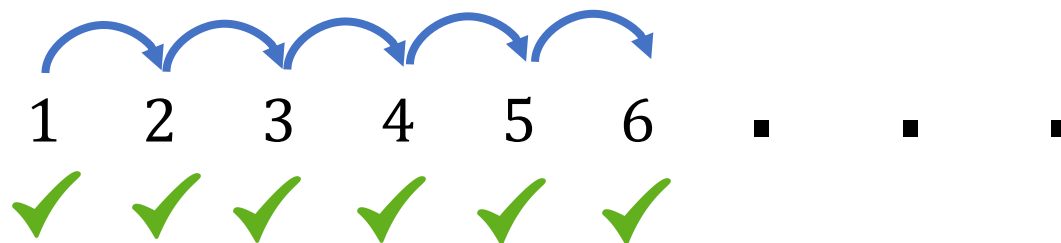
$$A(n), n \geq n_0$$

1. Dokážeme, že $A(n)$ platí pro $n = n_0$.

2. Dokážeme implikaci: $\forall (k \in \mathbb{N})$:

$$A(k) \Rightarrow A(k + 1),$$

této části říkáme **indukční krok**.



$$\forall n \in \mathbb{N}: n \leq 2^n$$

1. Dokážeme, že výrok platí pro $n = 1$

$$n = 1 : 1 \leq 2^1 \Rightarrow 1 \leq 2 \quad \checkmark$$

indukční krok

Víme

$$k \in \mathbb{N}: k \leq 2^k \Rightarrow$$

Chceme

$$k + 1 \leq 2^{k+1}$$

$$k + 1 \leq k + k = 2k \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \quad \checkmark$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: n \leq 2^n} \quad \checkmark$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid 10^n - 4$$

1. Dokážeme, že výrok platí pro $n = 1$ $n = 1 : 6 \mid 10^1 - 4 \Rightarrow 6 \mid 6$ ✓

indukční krok

$$k \in \mathbb{N}: 6 \mid 10^k - 4 \quad 10^k - 4 = 6m \quad 10^k = 6m + 4 \quad m \in \mathbb{N}$$

$$(k + 1) \in \mathbb{N}: 6 \mid 10^{k+1} - 4$$

$$10^{k+1} - 4 = 10 \cdot \overbrace{10^k} - 4 = 10 \overbrace{(6m + 4)} - 4 = 60m + 40 - 4$$

$$= 60m + 36 = 6(10m + 6)$$

$$10^{k+1} - 4 = 6(10m + 6)$$

$$6 \mid 10^{k+1} - 4 \quad \checkmark$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid 10^n - 4} \quad \checkmark$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Dokážeme, že rovnice/vzorec platí pro $n = 1$: $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \quad 1 = 1$ 

indukční krok

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (k)^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

$$\overbrace{1^2 + 2^2 + \dots + (k)^2} + (k+1)^2 = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} + k^2 + 2k + 1$$

$$= \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} + \frac{6k^2 + 12k + 6}{6} = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \img alt="green checkmark" data-bbox="805 875 865 975"/>$$

Důkaz matematickou indukcí

$$3 \mid n^3 + 2n$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$2n^2 \geq (n+1)^2, n \geq 3$$

$$2^n \geq n^2, n \geq 4$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Výroková logika

Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A , B , C jsou následující výroky pravdivé.

$$(a) \quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$(b) \quad \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

$$(c) \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$(d) \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$(e) \quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$(f) \quad A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$(g) \quad A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(h) \quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Pravdivostní ohodnocení výroku

<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
1	1	1
0	1	0
	0	1
	0	0

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

<i>A</i>	<i>B</i>	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

UkaŹte, Źe bez ohledu na pravdivostní hodnotu vrok A, B, C jsou následující vroky pravdiv.

a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků A , B , C jsou následující výroky pravdivé.

$$a) (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

A : pršet

B : mít deštník

$A \Rightarrow B$ Jestliže prší, pak mám deštník

$\neg B \Rightarrow \neg A$ Jestliže nemám deštník, pak neprší

Pokud prší, mám deštník $\Leftrightarrow$ Pokud nemám deštník, neprší

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$b) \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$		A	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
1	1	1	0		1	0	0	1
1	0	0	1		1	1	1	1
0	1	1	0		0	0	0	1
0	0	1	0		0	1	0	1

e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	B	$\neg A \vee B$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Rozhodněte o pravdivosti výroků a svůj závěr ilustrujte obrázkem.

(a) $\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x| < \delta$, právě když $(x > -\delta) \wedge (x < \delta)$.

(b) $\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: \text{jestliže } |x| > \delta$, pak $x > \delta$.

(c) $\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x| > \delta$, právě když $(x < -\delta) \wedge (x > \delta)$.

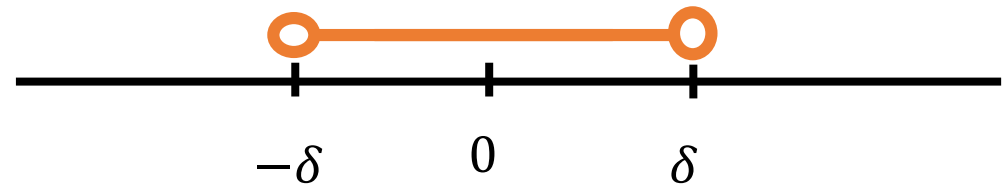
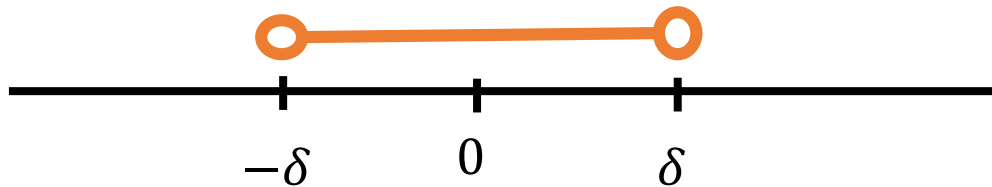
(d) $\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x| > \delta$, právě když $(x < -\delta) \vee (x > \delta)$.

(e) $\forall \delta > 0 \forall c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: (|x - c| < \delta) \Leftrightarrow (x \in [c - \delta, c + \delta])$

(f) $\forall z \in \mathbb{R} \exists x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_2 \wedge |z - x_1| = 5 \wedge |z - x_2| = 5$

Rozhodněte o pravdivosti výroků a svůj závěr ilustруйте obrázkem.

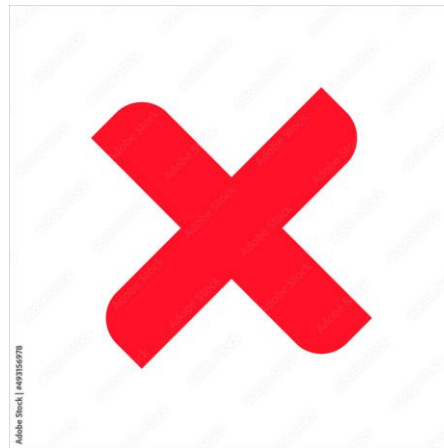
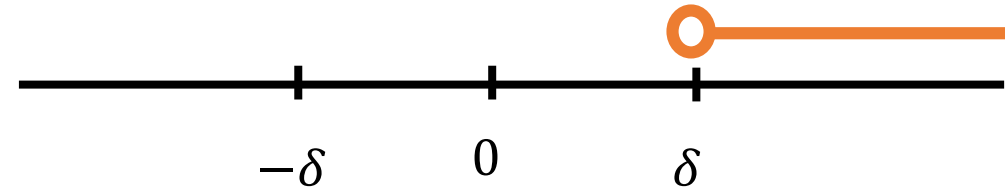
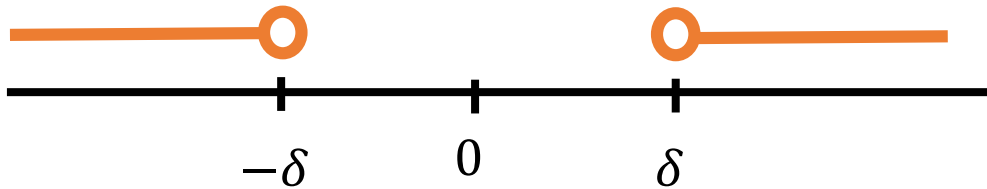
$\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x| < \delta$, právě když $(x > -\delta) \wedge (x < \delta)$



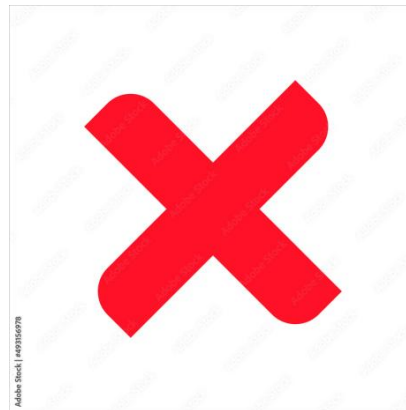
$\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x| < \delta \iff (x > -\delta) \wedge (x < \delta)$



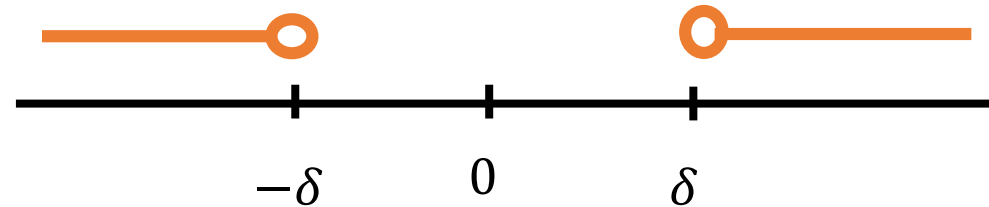
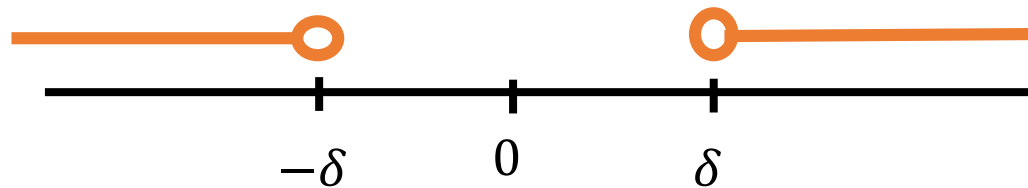
$\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}$: jestliže $|x| > \delta$, pak $x > \delta$



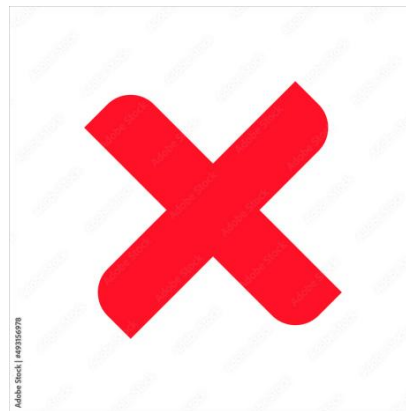
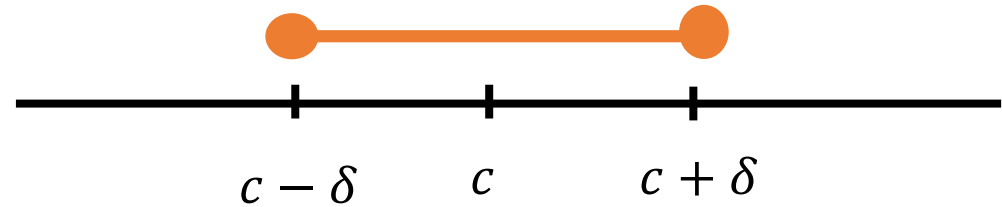
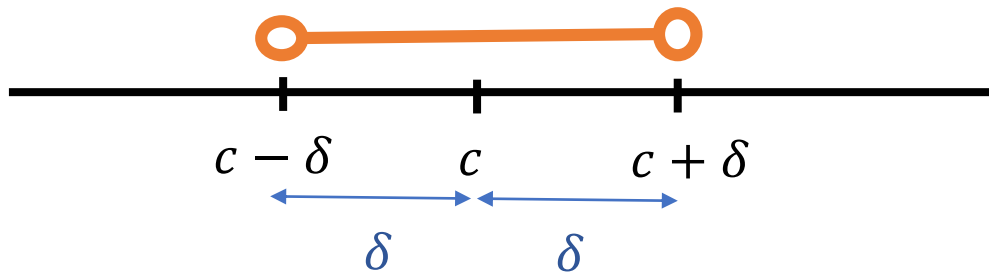
$\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x| > \delta$, právě když $(x < -\delta) \wedge (x > \delta)$



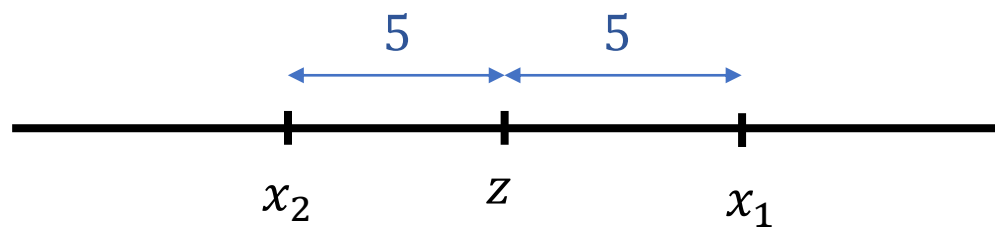
$\forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x| > \delta$, právě když $(x < -\delta) \vee (x > \delta)$



$$\forall \delta > 0 \forall c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: (|x - c| < \delta) \Leftrightarrow (x \in [c - \delta, c + \delta])$$



$$\forall z \in \mathbb{R} \exists x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_2 \wedge |z - x_1| = 5 \wedge |z - x_2| = 5)$$



$$x_2 = z - 5$$

$$x_1 = z + 5$$

