

Předmět: NMTM101 Matematická analýza I

Typ výuky: Cvičení

Vahid Borji
borji@karlin.mff.cuni.cz

Cvičení 1

Matematické koncepty pro Analýzu 1:

- Posloupnost a limita posloupnosti
- Funkce a limita funkce
- Derivace
- Řady a konvergence řad

Zápočtové testy:

- Dva zápočtové testy:
 - ☐ po dokončení tématu limita posloupnosti
 - ☐ pravděpodobně na konci semestru

Opakovací a přípravné úlohy:

- Rovnice a nerovnice
- Absolutní hodnota
- Goniometrické funkce
- Kvantifikátory: $\forall$ („pro každé“) a $\exists$ („existuje“)
- Důkaz matematickou indukcí

V oboru reálných čísel řešte následující rovnice a nerovnice.

$$3^{2x} - 3^x - 6 = 0$$

$$3^x = y$$

$$(3^x)^2 - (3^x) - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 3 \vee y = -2$$

(nebo)

$$\Rightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = -2$$

$$x = 1$$



$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = -6$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \quad \begin{array}{l} y = 3 \\ y = -2 \end{array}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(\underbrace{x^2 - 3x + 3}) \geq 0$$

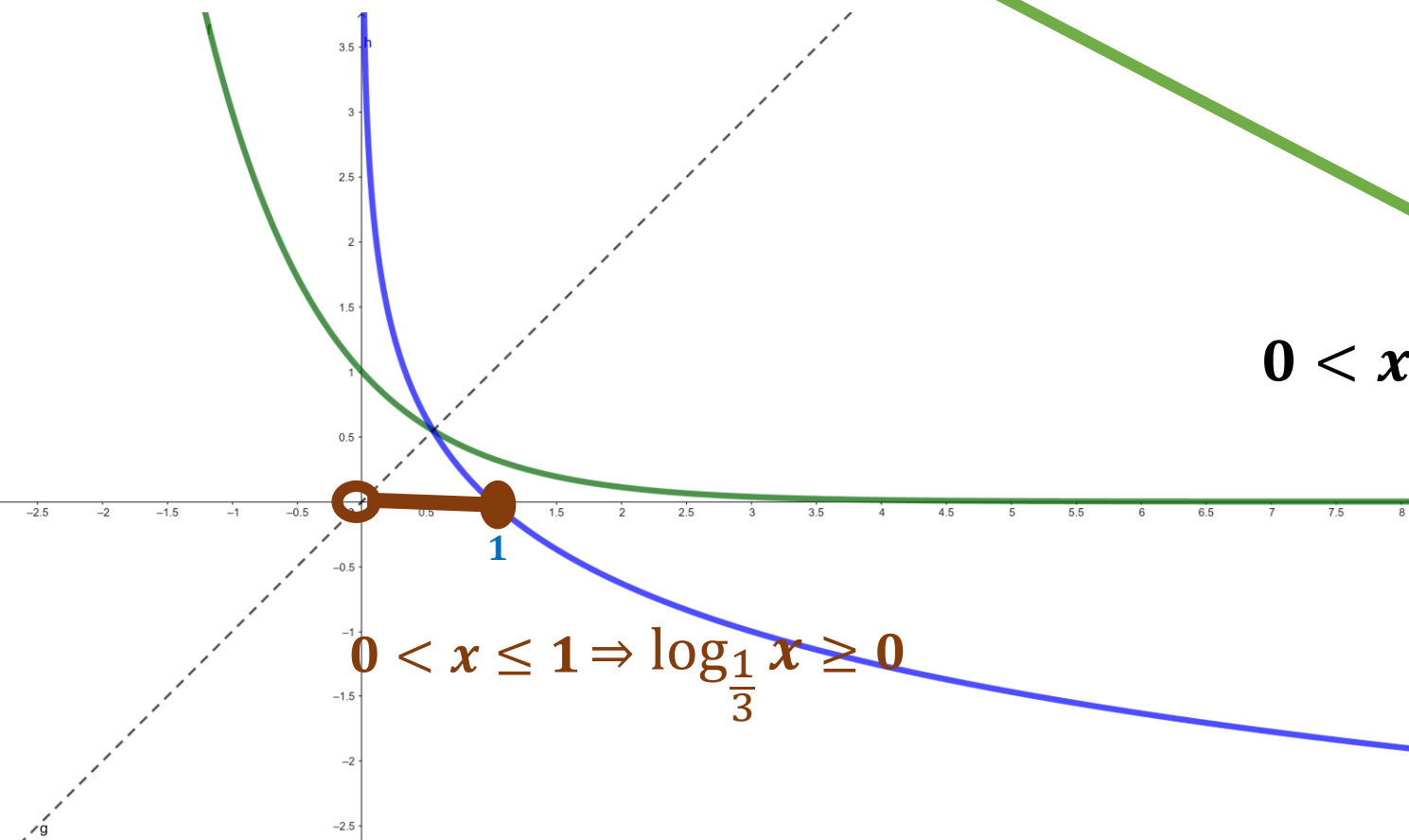
$$f(x) = \log_a x \quad 0 < a < 1 \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$f = a^x \quad \text{inverzní} \Leftrightarrow f^{-1} = \log_a x$$

$$f = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{inverzní} \Leftrightarrow f^{-1} = \log_{\frac{1}{3}} x$$



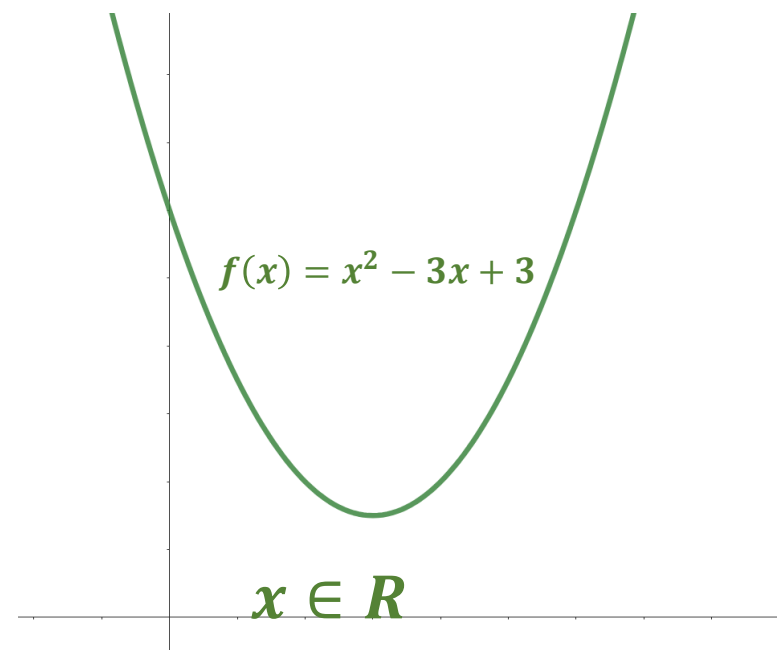
$$0 < x^2 - 3x + 3 \leq 1$$

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 3x + 3 \\ \wedge \\ x^2 - 3x + 3 \leq 1 \end{cases}$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$$

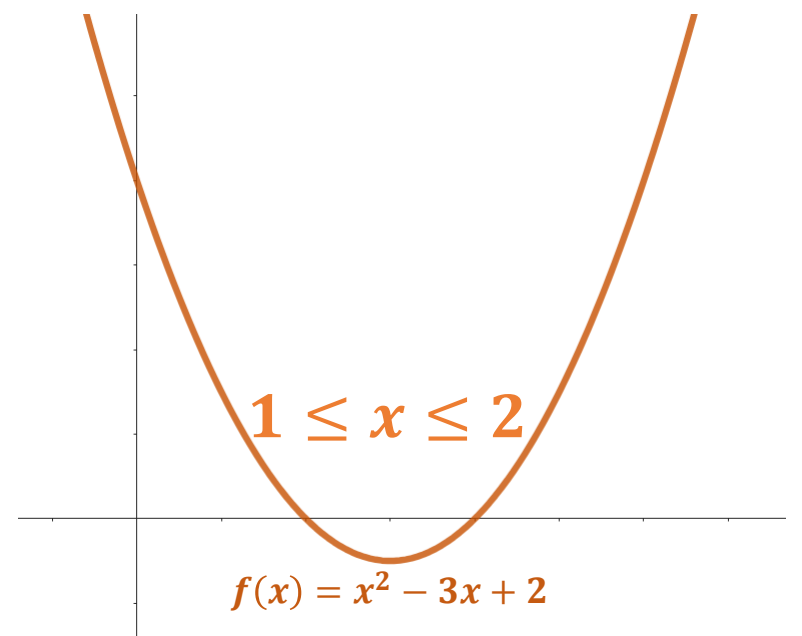
$$0 < x^2 - 3x + 3 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$



$$x^2 - 3x + 3 \leq 1$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



$$x \in R \wedge 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$$

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{2x+3}{x+6} > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x+6) - (x+3)(2x+3)}{(x+3)(x+6)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2 - x + 3}{(x+3)(x+6)} > 0$$

$$-x^2 - x + 3 = 0 \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(x+3)(x+6) = 0 \quad x = -3 \quad x = -6$$

	$(-\infty, -6)$	$[-6, -3)$	$[-3, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2})$	$[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2})$	$[\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \infty)$			
$-x^2 - x + 3$	-	-	-	0	+	0	-	
$(x+3)(x+6)$	+	0	-	0	+	+	+	
$\frac{-x^2 - x + 3}{(x+3)(x+6)}$	-	∞	+	∞	-	0	+	-




$$(-6, -3) \cup (\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2})$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

$$|5| = 5$$

$$|-100| = -(-100) = 100$$

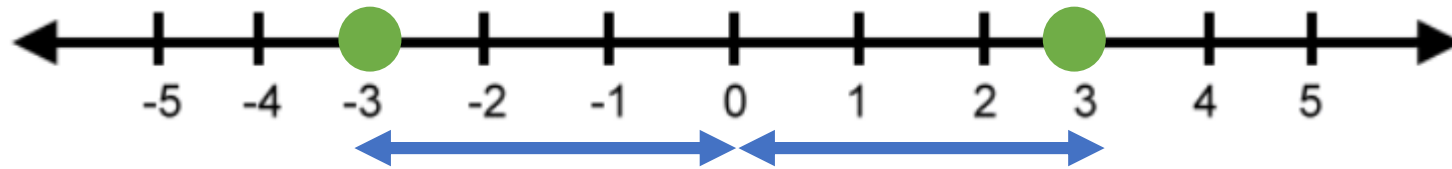
$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{if } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{if } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{if } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{if } x < 2 \end{cases}$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

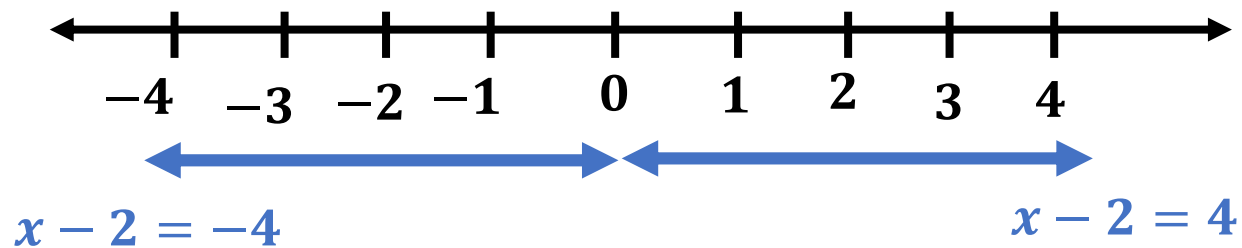
$$|x + 3| = \dots = \begin{cases} x + 3 & \text{if } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{if } x < -3 \end{cases}$$

$$|x| = 3 \Leftrightarrow |x - 0| = 3$$



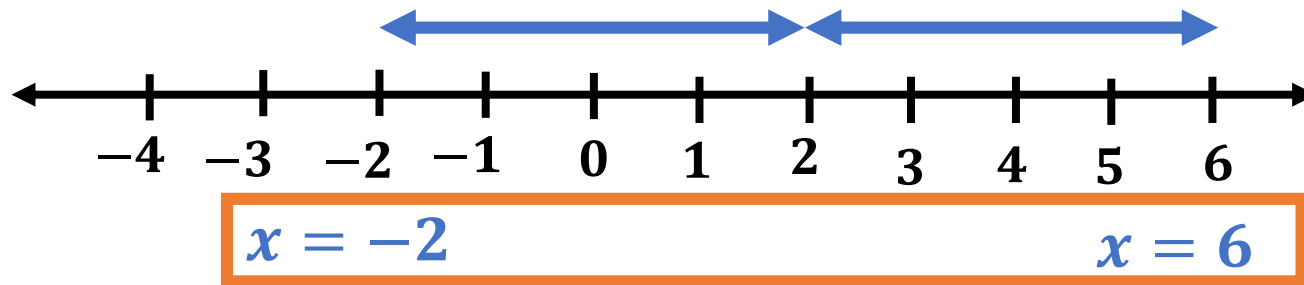
$$|x| = 3 \Rightarrow \begin{aligned} x &= 3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$|x - 2| = 4 \Leftrightarrow |(x - 2) - 0| = 4$$



$$|x - 2| = 4 \Rightarrow \begin{array}{l} x - 2 = 4 \\ x - 2 = -4 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array}}$$

$$|x - 2| = 4$$



$$\left| \underbrace{|x-3|-2} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|-2 = 1 \\ \vee \\ |x-3|-2 = -1 \end{cases}$$

$$|x-3|-2 = 1 \Rightarrow |x-3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 3 \rightarrow x = 6 \\ x-3 = -3 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

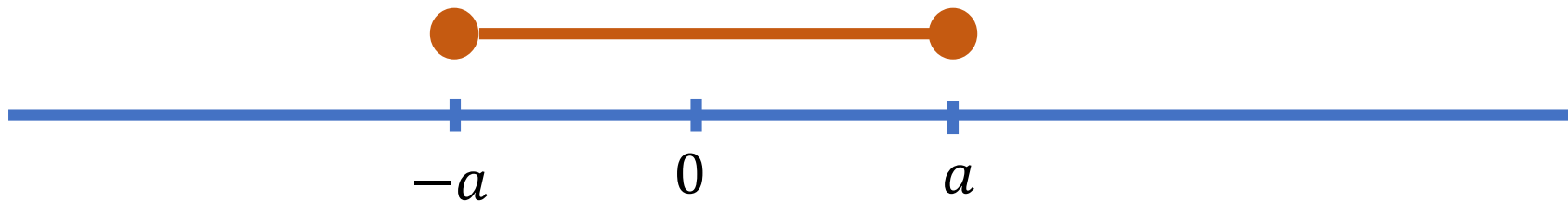
$$|x-3|-2 = -1 \Rightarrow |x-3| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ x-3 = -1 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$x \in \{0, 2, 4, 6\}$$

$$||x - 2| + 1| \leq 5$$

Pamatování

$$|x| \leq a$$



$$-a \leq x \leq a$$

$$||x - 2| + 1| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2| + 1 \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{|x - 2|}_{\geq 0} \leq 4$$

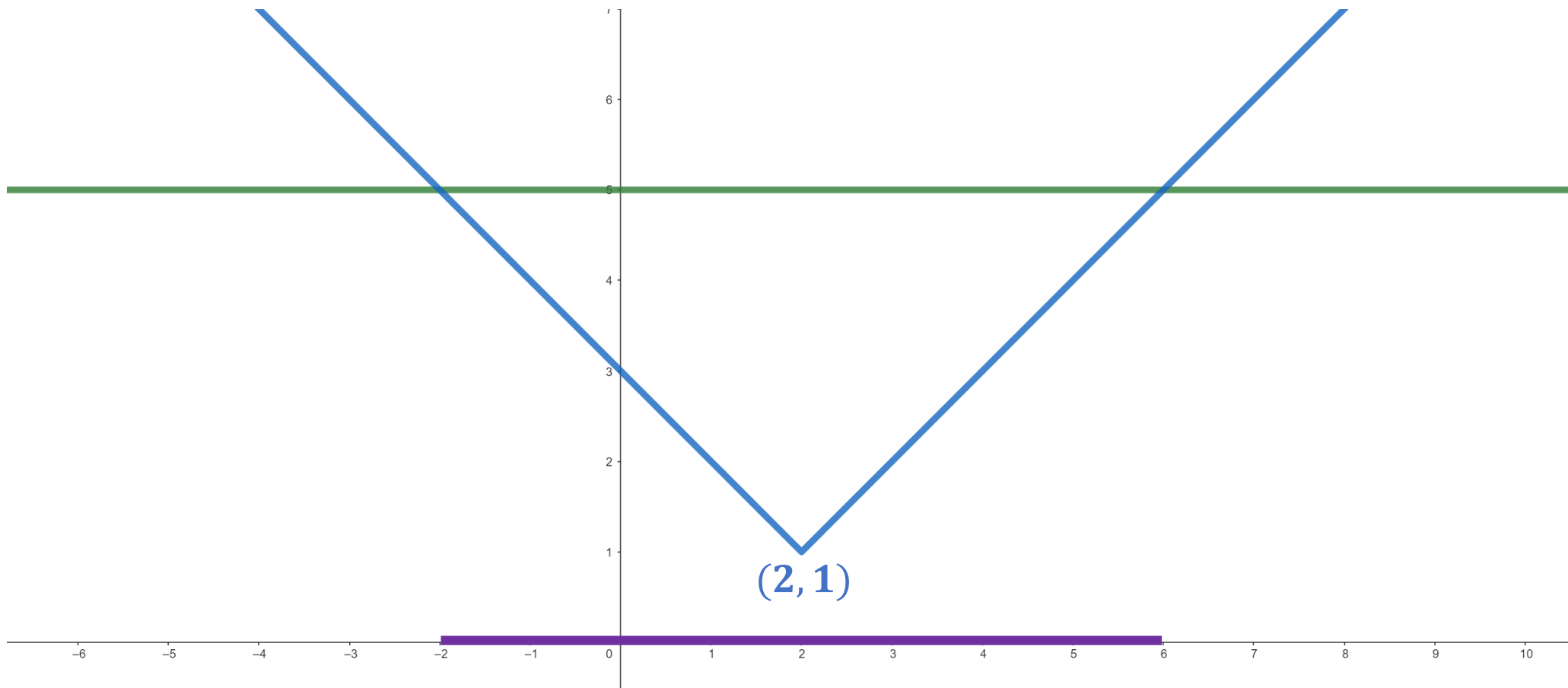
$$\Leftrightarrow -4 \leq x - 2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 6$$

$$\underbrace{||x - 2| + 1|}_{> 0} = |x - 2| + 1$$

$$||x - 2| + 1| \leq 5$$

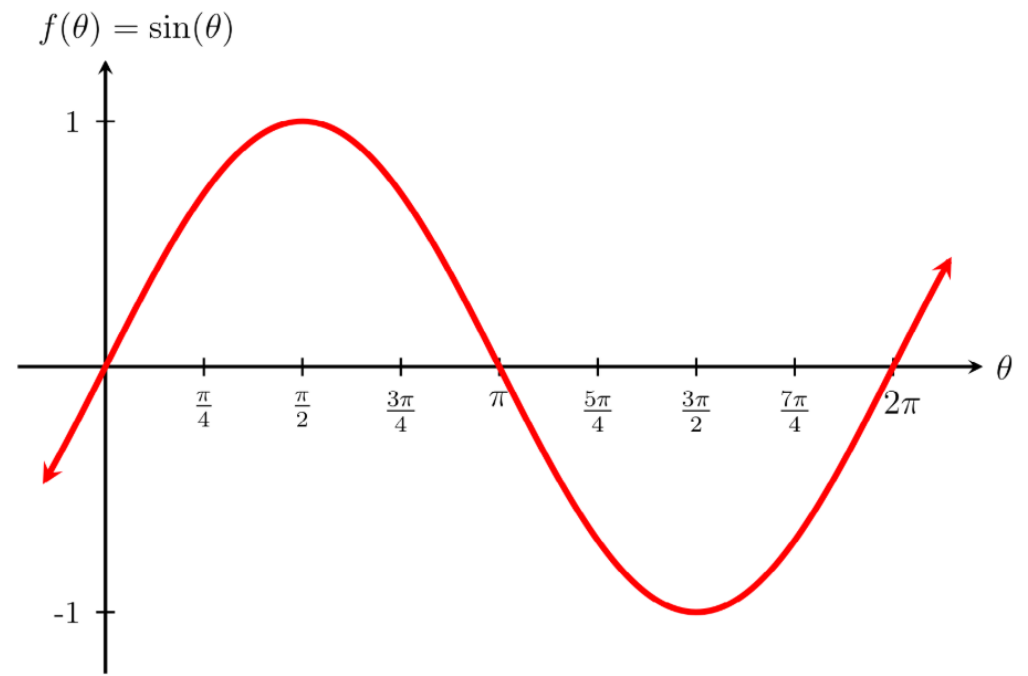
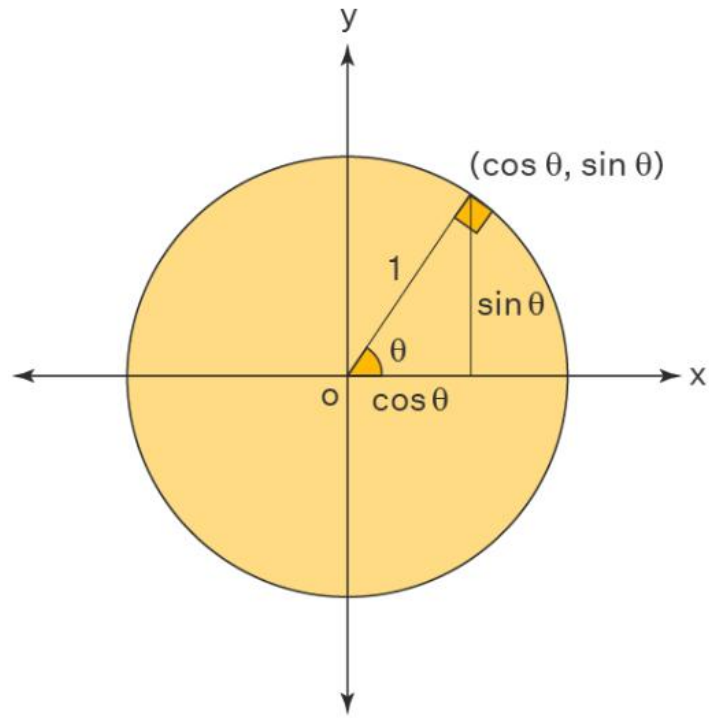
$$f(x) = ||x - 2| + 1| = |x - 2| + 1$$

$$g(x) = 5$$



$$x \in [-2, 6]$$

$$f(x) = \sin x$$

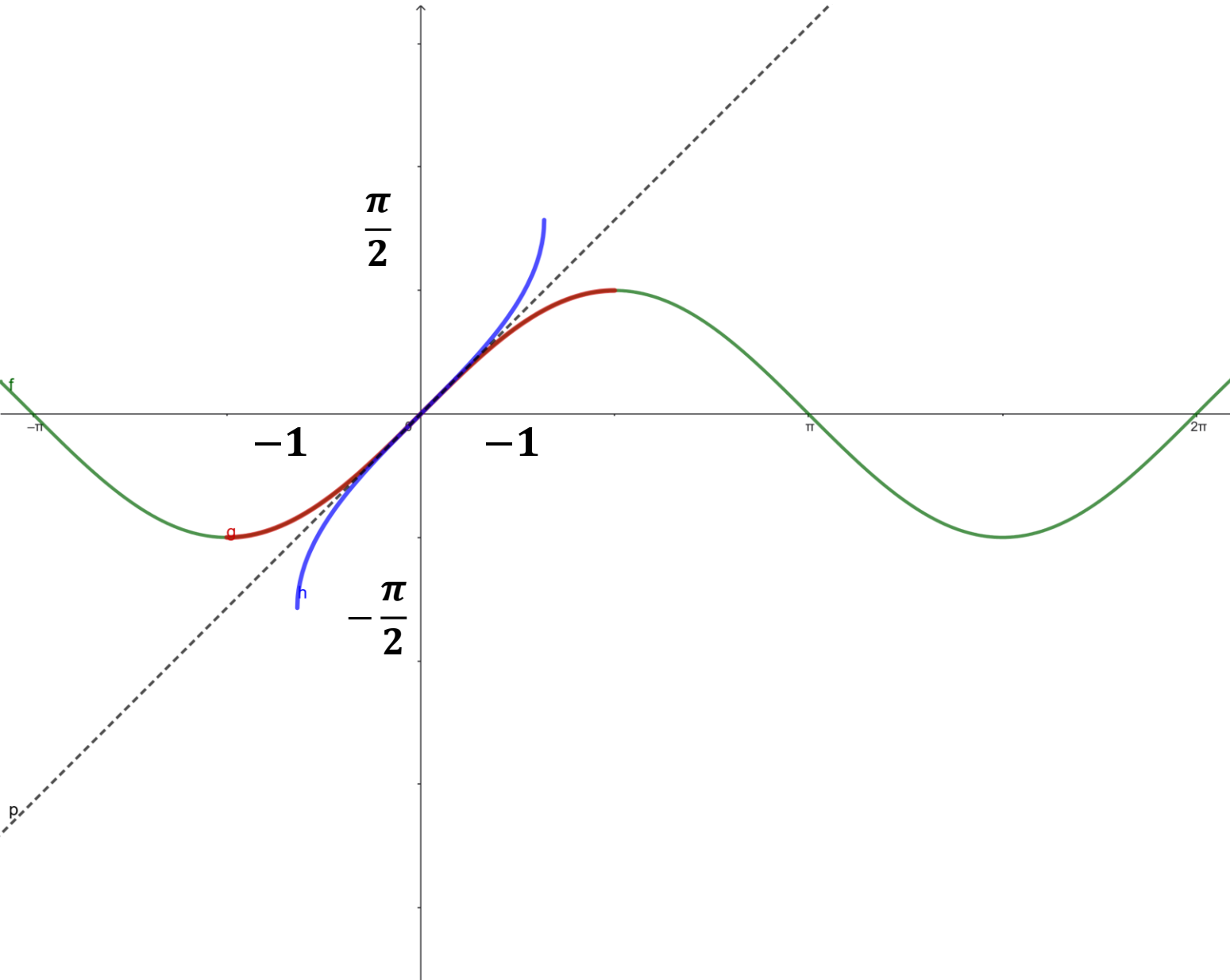


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x$$

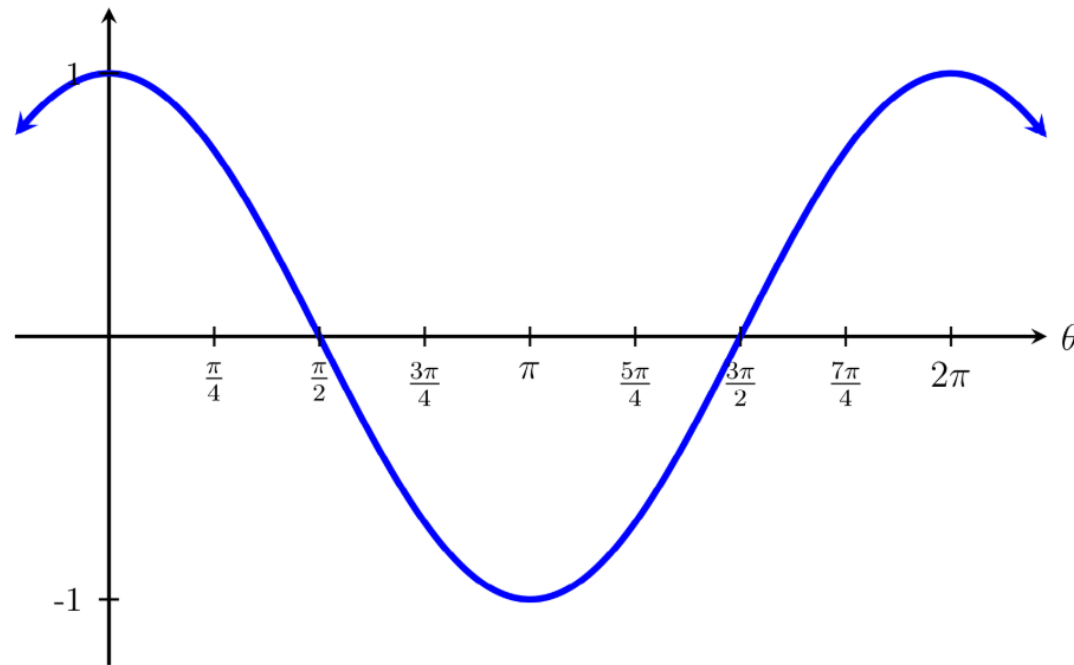
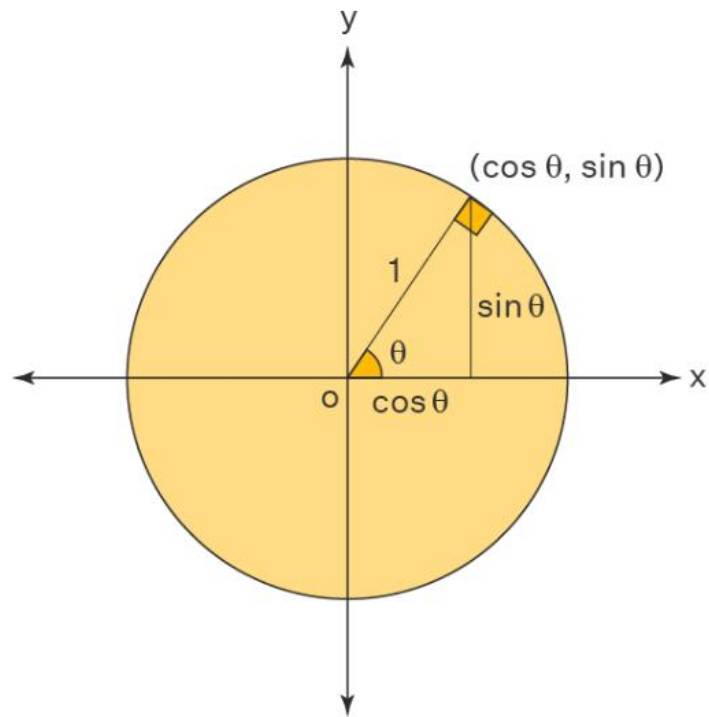
$$f^{-1}(x) = \arcsin x$$



$$D_{\arcsin} = [-1, 1]$$

$$H_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x) = \cos x$$

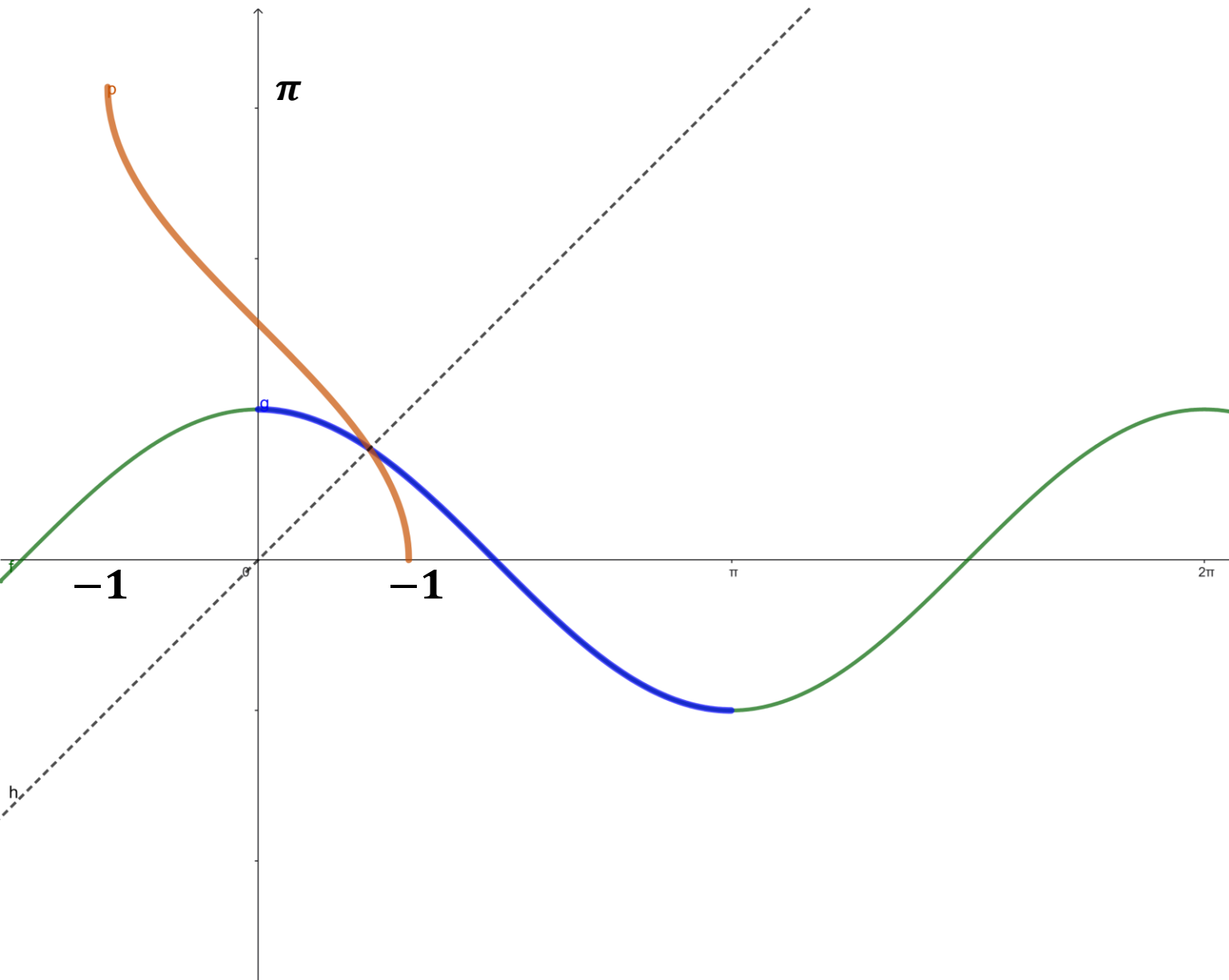


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = [-1, 1]$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x$$



$$D_{\arccos} = [-1, 1]$$

$$H_{\arccos} = [0, \pi]$$

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
degree	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Pokud $\cos(\frac{22\pi}{7}) = -0,90096887$, určete $\cos^{-1}(-0,90096887)$?

Řešte rovnici v $\mathbb{R}$.

$$\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x \operatorname{tg} x = 1$$

Požádali jsme studenta, aby vyřešil trigonometrickou rovnici $\sin(2x) = 0,7$.
Student předložil následující řešení:

$$\sin(2x) = 0,7$$

$$2x = \arcsin(0,7)$$

$$2x = 0,7754$$

$$x = 0,3877 + 2\pi k$$

- (a)** Zhodnoťte práci studenta – je správná nebo nesprávná?
- (b)** Pokud si myslíte, že tam jsou chyby, určete je a vysvětlete, proč jsou to chyby.
- (c)** Pokud si myslíte, že uvedené řešení je nesprávné, uveďte správnou odpověď.