

Předmět: NMTM101 Matematická analýza I

Typ výuky: Cvičení

Vahid Borji
borji@karlin.mff.cuni.cz

Cvičení 13

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Absolutní konvergence:

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní

Relativní konvergence:

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje $\wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je relativně konvergentní

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Věta (Leibnizovo kritérium): Budiž $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- nerostoucí posloupnost reálných čísel
- s $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Vyšetřete absolutní a relativní konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3n - 1}{4n^2 - n - 6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| \underbrace{\left| \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \right|}_{> 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{1}{n} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}} \sin \frac{1}{n}}{\cancel{\frac{1}{n}} \frac{1}{n}} = 1$$

LSK

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n} \right| \text{ konverguje}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n}$ je absolutně konvergentní

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1)| = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\sqrt[n]{5} - 1|}_{> 0} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{5} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n} \ln 5} - 1)$$

$$a_n = e^{\frac{1}{n} \ln 5} - 1 \sim \frac{1}{n} \ln 5 = b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln 5} - 1}{\frac{1}{n} \ln 5} = 1$$

LSK

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \ln 5\right) \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n} \ln 5} - 1) \text{ diverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1)| \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1) \text{ není absolutně konvergentní.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1)$ není absolutně konvergentní.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad a_n = \sqrt[n]{5} - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{5} - 1) = 0$$

$$a_n = \sqrt[n]{5} - 1 \quad a_{n+1} = \sqrt[n+1]{5} - 1$$

$$\sqrt[n+1]{5} < \sqrt[n]{5}$$

$$\sqrt[n+1]{5} - 1 < \sqrt[n]{5} - 1$$

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{klesající}$$

Leibnizovo kritérium

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1) \text{ konverguje}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{5} - 1)$ je relativně konvergentní (též: neabsolutně konvergentní)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3n - 1}{4n^2 - n - 6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3n - 1}{4n^2 - n - 6} \text{ Neexistuje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3n - 1}{4n^2 - n - 6} \text{ Diverguje}$$