Předmět: NMTM101 Matematická analýza I

Typ výuky: Cvičení

Vahid Borji
borji@karlin.mff.cuni.cz

Cvičení 12

Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Geometrická řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{Divergentní} & q \geq 1 \ \vee q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \textbf{Konvergentní} & \alpha > 1 \\ \textbf{Divergentní} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(logn)^{a}} \begin{cases} \textbf{Konvergentní} & a > 1 \\ \textbf{Divergentní} & a \leq 1 \end{cases}$$

Věta (Nutná podmínka konvergence řady).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \text{nebo} \lim_{n\to\infty} a_n \text{ neexistuje} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Nemůžeme nic říct (možná konverguje nebo diverguje)}$$

Věta (Srovnávací kriterium)**.**

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy, které : $a_n \leqslant b_n$, pak platí:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2}$$

$\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{17n+2}{n^2} = 0$$

$$\frac{n}{n^2} < \frac{17n+2}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{17n+2}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2}$ diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 17\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

D K

Diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\log n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \text{ diverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$$

Věta (Růstová Škála)

$$\frac{\log n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ **konverguje** $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ **konverguje**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n13^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n13^n} = 0$$

$$\frac{1}{n13^n} < \frac{1}{13^n} = \left(\frac{1}{13}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{13}\right)^n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n13^n} \text{ konverguje}$$

Věta (Limitní srovnávací kriterium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$$

(a) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

(c) Pro $A = 0$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(d) Pro $A = \infty$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0 \qquad a_n = \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \overset{\text{H.V}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje} \overset{LSK}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$a_n = \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}} \sim \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{\frac{1}{n}}{n^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{n.n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}}}{\frac{1}{n.n^{\frac{5}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \overset{\text{H.V}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1$$

LSK

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right) arctg\, 2n \qquad a_n = \left(\sqrt[n]{2}-1\right) arctg\, 2n = \left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) arctg\, 2n$$

$$= \left(e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1\right) arctg\, 2n$$

$$\sim \frac{1}{n}\ln 2 \qquad \to \frac{\pi}{2} \qquad b_n = \frac{1}{n}\ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1\right) arctg\, 2n}{\frac{1}{n}\ln 2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\to 1$$

LSK

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **diverguje** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje**

Věta (Cauchyho limitní odmocninové kritérium)**.**

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

Věta (D'Alembertovo limitní podílové kritérium)**.**

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

Pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \qquad a_n = \frac{n^2}{1+3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{1+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{1+3^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+3^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \text{ konverguje}$$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{1+3^n} < \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2.3^n} = 3\sqrt[n]{2}$$

$$\to 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+3^n} = 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \qquad a_n = \frac{n^2}{1+3^n} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{1+3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{1+3^{n+1}}}{\frac{n^2}{1+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(1+3^n)}{n^2(1+3^{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n + \cdots}{n^2 3^{n+1} + \cdots} = \cdots = \frac{1}{3} < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n}$ **konverguje**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\sqrt{n}}{3^n} \qquad a_n = \frac{e^n\sqrt{n}}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n\sqrt{n}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{3} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{e}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{e}{3} < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\sqrt{n}}{3^n}$ **konverguje**

$$\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{\sqrt{n}} < \sqrt[n]{n}$$

$\to 1$ $\qquad$ $\to 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{2+\sin n}{9+\sin n}\right)^n \qquad a_n = 3^n \left(\frac{2+\sin n}{9+\sin n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \left(\frac{2+\sin n}{9+\sin n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} 3.\frac{2+\sin n}{9+\sin n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{2+\sin n}{9+\sin n}$$ **Neexistuje**

Cauchyovo odmocninové kritérium. Bud dána řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nechť existuje pevné číslo $q < 1$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} \leq q$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$$\exists q < 1 : \forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{3^n \left(\frac{2+\sin n}{9+\sin n}\right)^n} \leq q$$

$$\sqrt[n]{3^n \left(\frac{2+\sin n}{9+\sin n}\right)^n} = 3.\frac{2+\sin n}{9+\sin n} = 3.\frac{(9+\sin n)-7}{9+\sin n} = 3.\left(1-\frac{7}{9+\sin n}\right) = 3-\frac{21}{9+\sin n}$$

$$\leq 3-\frac{21}{10} = \frac{9}{10} = q < 1 \Rightarrow \text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{2+\sin n}{9+\sin n}\right)^n \text{ konverguje}$$