

Předmět: NMTM101 Matematická analýza I

Typ výuky: Cvičení

Vahid Borji
borji@karlin.mff.cuni.cz

Cvičení 12

Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Geometrická řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{Divergentní} & q \geq 1 \vee q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{Konvergentní} & \alpha > 1 \\ \text{Divergentní} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^a} \quad \begin{cases} \text{Konvergentní} & a > 1 \\ \text{Divergentní} & a \leq 1 \end{cases}$$

Věta (Nutná podmínka konvergence řady).

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ neexistuje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \text{Nemůžeme nic říct (možná konverguje nebo diverguje)}$$

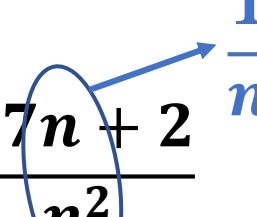
Věta (Srovnávací kritérium).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy, které
: $a_n \leq b_n$, pak platí:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

Vyšetřete konvergenci následujících řad:

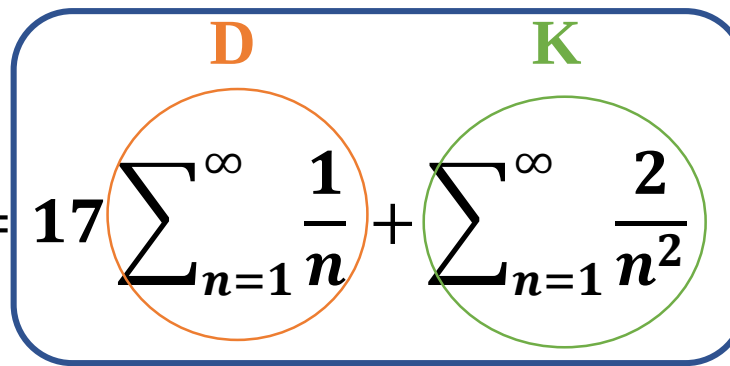
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2}$$


$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{17n+2}{n^2} = 0$$

$$\frac{n}{n^2} < \frac{17n+2}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{17n+2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2} \text{ diverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$



Diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\log n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \text{ diverguje}$$

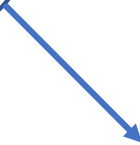
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$$

 **Věta (Růstová Škála)**

$$\frac{\log n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n13^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n13^n} = 0$$



$$\left(\frac{1}{13}\right)^n$$

$$\frac{1}{n13^n} < \frac{1}{13^n} = \left(\frac{1}{13}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{13}\right)^n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n13^n} \text{ konverguje}$$

Věta (Limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$$

- (a) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje
- (b) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje
- (c) Pro $A = 0$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje
- (d) Pro $A = \infty$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0 \quad a_n = \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{H.V}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

LSK

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$a_n = \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}} \sim \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{\frac{1}{n}}{n^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{n \cdot n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{n^{\frac{5}{2}}}}{\frac{1}{n \cdot n^{\frac{5}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{H.V}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$$

LSK

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1) \operatorname{arctg} 2n$$

$$a_n = (\sqrt[n]{2} - 1) \operatorname{arctg} 2n = (2^{\frac{1}{n}} - 1) \operatorname{arctg} 2n$$

$$= (e^{\frac{1}{n} \ln 2} - 1) \operatorname{arctg} 2n$$

$$\sim \frac{1}{n} \ln 2 \quad \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \ln 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^{\frac{1}{n} \ln 2} - 1) \operatorname{arctg} 2n}{\frac{1}{n} \ln 2} = \frac{\pi}{2}$$

$\rightarrow 1$

LSK

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

Věta (Cauchyho limitní odmocninové kritérium).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

Věta (D'Alembertovo limitní podílové kritérium).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

Pak platí:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Konverguje}$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Diverguje}$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Řada může konvergovat i divergovat.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n}$$

$$a_n = \frac{n^2}{1+3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{1+3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{1+3^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+3^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{1+3^n} < \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \sqrt[n]{2} \rightarrow 3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+3^n} = 3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n}$$

$$a_n = \frac{n^2}{1+3^n} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{1+3^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{1+3^{n+1}}}{\frac{n^2}{1+3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(1+3^n)}{n^2(1+3^{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n + \dots}{n^2 3^{n+1} + \dots} = \dots = \frac{1}{3} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \sqrt{n}}{3^n} \quad a_n = \frac{e^n \sqrt{n}}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n \sqrt{n}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{3} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{e}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{e}{3} < 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \sqrt{n}}{3^n} \text{ konverguje}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{\sqrt{n}} < \sqrt[n]{n} \\ \rightarrow 1 \qquad \qquad \qquad \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \right)^n \quad a_n = 3^n \left(\frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n \left(\frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \quad \text{Neexistuje}$$

Cauchyovo odmocninové kritérium. Bud dána řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nechť existuje pevné číslo $q < 1$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} \leq q$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$$\exists q < 1 : \forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{3^n \left(\frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \right)^n} \leq q$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{3^n \left(\frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \right)^n} &= 3 \cdot \frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} = 3 \cdot \frac{(9 + \sin n) - 7}{9 + \sin n} = 3 \cdot \left(1 - \frac{7}{9 + \sin n} \right) = 3 - \frac{21}{9 + \sin n} \\ &\leq 3 - \frac{21}{10} = \frac{9}{10} = \mathbf{q} < \mathbf{1} \Rightarrow \text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{2 + \sin n}{9 + \sin n} \right)^n \text{ konverguje} \end{aligned}$$