

Limita funkce

Při řešení limity funkcí můžeme díky Heineho větě využívat již známých vět jako jsou: Věta o aritmetice limit, věty o polycajtech, nulová · omezená apod. Dále se také při výpočtech často využívá dělení polynomů, rozklady na součin a binomická věta.

1 Vypočtěte limity:

(a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{6}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + \log x}{3x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 3^x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+2^x)}{3x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) \dots (1+nx) - 1}{x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

(m) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x+7}{x^2 + 14x + 49}$

(n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

(o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$

*(p) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$

Hint: Pište $-n$ jako $-1 - 1 - \dots - 1$.

✚(q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$

1 (a) $\frac{1}{2}$; (b) $-\frac{1}{\pi}$; (c) $\frac{4}{3}$; (d) $-\infty$; (e) 4; (f) $\frac{\log 2}{3}$; (g) 0; (h) 6; (i) $\frac{n(n+1)}{2}$; (j) $\frac{1}{4}$; (k) 10; (l) $\frac{1}{2}$; (m) neexistuje; (n) $\frac{49}{24}$; (o) $\frac{n}{m}$; (p) $\frac{n(n+1)}{2}$; (q) $\frac{n(n+1)}{2}$;

Poučka. Tradičním nástrojem při řešení limit s odmocninou je následující vzorec:

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1}B^0 + A^{n-2}B^1 + \dots + A^1B^{n-2} + A^0B^{n-1})$$

2 Vypočtěte limity funkcí s odmocninou:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

!(g) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

*(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1+\frac{x}{2}}}$

*(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}$

*(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

*(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+bx}}{x}$

2 (a) 4; (b) $\frac{4}{3}$; (c) 1; (d) $\frac{3}{2}$; (e) $\frac{1}{4}$; (f) $\frac{12}{5}$; (g) $\frac{4}{27}$; (h) $\frac{7}{36}$; (i) 1; (j) $\frac{1}{2}$; (k) $\frac{a}{n} - \frac{b}{m}$;

Věta (Věta o limitě složené funkce se spojitou vnější funkcí). Buďte f, g funkce, $B \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále platí podmínky:

- (a) $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$;
- (b) funkce f je v bodě B spojitá.

Potom platí: $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(B)$.

Věta (Věta o limitě složené funkce s vnitřní funkcí „vyhýbající se své limitě“). Nechť f, g jsou funkce, $c, B, A \in \mathbb{R}^*$. Dále platí podmínky:

- (a) $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$ a $\lim_{y \rightarrow B} f(y) = A$;
- (b) $\exists \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta) : g(x) \neq B$

Potom platí: $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = A$.

Poučka. Při vyhodnocení limit funkcí se často využívají následující výsledky. Jde o tzv. známé limity:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3 Vypočtěte limity funkcí s pomocí známých limit:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{3x^2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} x \log(1 - \frac{3}{x})$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1 + 2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + e^{2x^2})}{\log(x^2 + e^{3x^2})}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}})$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \log_x 13$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 5x}{x}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(4^x - x^2)}{1 - \cos x}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cot^2(x) \log(-\cos x)$
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos(x)}$
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{1 - \cos(x)}$
- (q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$

Hint: Použijte vztah: $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

✚(r) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin a}}{x - a}$

3 (a) 3; (b) $\log 5$; (c) 1; (d) $-\frac{1}{6}$; (e) -3; (f) 2; (g) $\frac{3}{4}$; (h) $2 \log 2$; (i) $\log 13$; (j) -1; (k) $\frac{1}{4}$; (l) $\log 16$; (m) $\frac{1}{2}$; (n) -1; (o) $\sqrt{2}$; (p) ∞ ; (q) 0; (r) $\frac{-\cos a}{\sin^2 a}$;

4 Vypočtete limity složených funkcí:

- | | |
|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{x^2}{2}}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \log \frac{x-1}{x+1}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x^3+x^2-9}}\right)$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccotg}\left(x \log\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)\right)$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right)$ | (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^7-12x^2+3}{27x^7-12x^2+3}}$ |

4 (a) 1; (b) 0; (c) $\cos \frac{1}{4}$; (d) $e^{\frac{12}{5}}$; (e) $\frac{\pi}{4}$; (f) $\frac{\pi}{3}$; (g) $-\frac{\pi}{2}$; (h) $\frac{\pi}{6}$; (i) $\frac{\pi}{2}$; (j) $\frac{1}{3}$;

Poučka. Známá limita:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Nežřídká se tato známá limita využívá společně s VOLSF (se spojitou vnější funkcí) a zápisem:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \log(f(x))}$$

5 Limity typu „ 1^∞ “:

- | | |
|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x-1}\right)^{2x}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ | (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x^2}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{x+1}$ |

5 (a) $e^{\frac{2}{3}}$; (b) e^a ; (c) 1; (d) neexistuje; (e) 1; (f) e^6 ;

6 Vypočtete limity složených funkcí (těžké příklady):

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\operatorname{cotg} x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \log\left(1 - \frac{1}{x^2 \operatorname{tg} \frac{1}{x}}\right) \left(x^2 \operatorname{tg} \frac{1}{x}\right)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\cos \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(-\cos x\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$ | ✖(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^{\operatorname{tg}\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)} \left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ |

6 (a) $\sqrt{e}$; (b) $\sqrt{15}$; (c) e ; (d) $e^{-\frac{1}{2}}$; (e) e^{-2} ; (f) neexistuje; (g) $e^{-\frac{1}{2}}$; (h) 1;

7 Těžké limity funkce, někdy velmi těžké bez l'Hospitalova pravidla:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} = \frac{n-m}{2}$, kde $n, m \in \mathbb{N}$

Hint: Bez l'Hospitala lze řešit opakovaným použitím stejného triku $-n = -1 - 1 - \dots - 1$.

Věta (Heineho věta). Nechť $c, A \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, pak NVJE:

(a) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$;

(b) Pro libovolnou posloupnost splňující (H1) a (H2)

(H₁) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$,

(H₂) $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c$,

Potom platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Poučka. Heineho věta se použije prakticky při řešení každé složitější posloupnosti, neboť je většinou jednodušší pracovat s limitou funkce než s limitou posloupnosti, protože na to máme více nástrojů.

8 Limity posloupností:

Hint: Přepište si příklady jako limitu funkce a použijte Heineho větu.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\sin \frac{1}{2n-1}\right)$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{6n^3 + \log n}{n^3 - \sqrt{n}}\right)}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$

✚(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(2 \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2 + \frac{1}{n^4}\right)$

[8] (a) $\log 2$; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 1; (d) 0; (e) e^6 ; (f) $\frac{1}{12}$;

9 Jednostranné limity funkcí:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{\log(3-x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \arcsin 4x)^{\frac{1}{-3x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{x+1}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctg x}\right)$

[9] (a) ∞ ; (b) $-\infty$; (c) 0; (d) ∞ ; (e) 1; (f) 5; (g) $+\infty$; (h) $e^{-\frac{4}{3}}$; (i) neexistuje; (j) 0;