Charles University

Faculty of Mathematics and Physics;

Departemnet of Mathematics Education

Developing conceptual knowledge in school mathematics

Lesson #6

Vahid Borji & Petra Surynková

The concept of the derivative in different representations

Koncept/Pojem derivace v různých reprezentacích

5. (Domácí úkol) V kterém bodě protíná tečna ke grafu funkce $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ v bodě $x = 4$ osu y?

5. (Homework) At which point does the tangent to the graph of the function $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ at $x = 4$ intersect the y-axis?

$$f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}(5x-4) = 5x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

dosadíme $x = 4$: $\frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4^3}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ směrnice

Bod dotyku :

$$f(4) = \frac{5 \cdot 4 - 4}{\sqrt{4}} = \frac{16}{2} = 8$$

$\Rightarrow$ tj. bod $[4, 8]$

Sestavíme rovnici tečny

$$y = \frac{3}{2}(x-4) + 8$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x + 2}$$

V jakém bodě protne osu y ?

$\rightarrow$ tj. nechť $x = 0$, $y = ?$

$$y = \frac{3}{2} \cdot 0 + 2 \Rightarrow y = 2$$

Tečna protíná osu y v bodě $[0, 2]$

Using the point-slope form:

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4)$$

The tangent at $x = 4$ intersect th y-axis in $x = 0$.

$$y - 8 = \frac{3}{2}(0 - 4)$$

$$y - 8 = \frac{3}{2}(-4) \Rightarrow y - 8 = -6$$

$$y = -6 + 8 \Rightarrow y = 2$$

So the tangent line intersects the y-axis at the point $(0, 2)$.

5. (Domácí úkol) V kterém bodě protíná tečna ke grafu funkce $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ v bodě $x = 4$ osu y?

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - (5x-4)\cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1}}{x} = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,\frac{5x-4}{\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(4) = \frac{5\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot 4-4}{2}}{4} = \frac{10-4}{4} = \underline{\frac{3}{2}}\,//$$

$a = 3$ 5

$f'(4) = 8$
bod dotyku
$f'(4) = \frac{3}{2}$
sklon

5. (Domácí úkol) V kterém bodě protíná tečna ke grafu funkce $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ v bodě $x = 4$ osu y?

$f(4) = \frac{20-4}{2} = 8$

tečna ... $y - 8 = \frac{3}{2}(x-4)$ $\Big\}\ y - y_0 = k(x - x_0)$

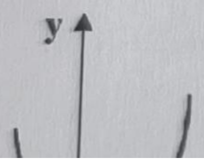
$f(x) = (5x-4)\cdot x^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = 5x^{-\frac{1}{2}} + (5x-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)$

$x = 0 \quad y - 8 = \frac{3}{2}(-4)$

$f'(4) = 5\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{2} - 1 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

$\underline{\underline{y = 2}}$ ...v bodě $[0;2]$

6. Je dán graf funkce $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Určete hodnotu a.



5. domácí úkol

V kterém bode protíná tečna ke grafu funkce $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ v bodě $x = 4$ osu y?

Prvně budeme muset zjistit funkční hodnotu v bodě 4 aby jsme věděli kde se tečna dotýká.

$$f(4) = \frac{5 \cdot 4 - 4}{\sqrt{4}} = \frac{20-4}{2} = 8$$

Budeme tedy pracovat s bodem $[4, 8]$.

Tečna je vlastně hodnota derivace. Budeme tedy potřebovat spočítat derivaci.

$$f'(x) = \frac{[5x-4]' \cdot \sqrt{x} - (5x-4) \cdot [\sqrt{x}]'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{5\sqrt{x} - \frac{5x-4}{2\sqrt{x}}}{x}$$

A následně spočítat její hodnotu v daném bodě 4.

$$f'(4) = \frac{5 \cdot \sqrt{4} - \frac{5 \cdot 4 - 4}{2 \cdot \sqrt{4}}}{4} = \frac{20 - \frac{20-4}{4}}{4} = \frac{10-4}{4} = \frac{3}{2}$$

Víme tedy že sklon tečny bude $k = \frac{3}{2}$. A nyní už jen musíme dosadit do rovnice tečny.

$$\begin{aligned} y - y_0 =& k(x - x_0) \\ y - 8 =& \frac{3}{2}(x - 4) \\ y =& \frac{3}{2}x + 2 \end{aligned}$$

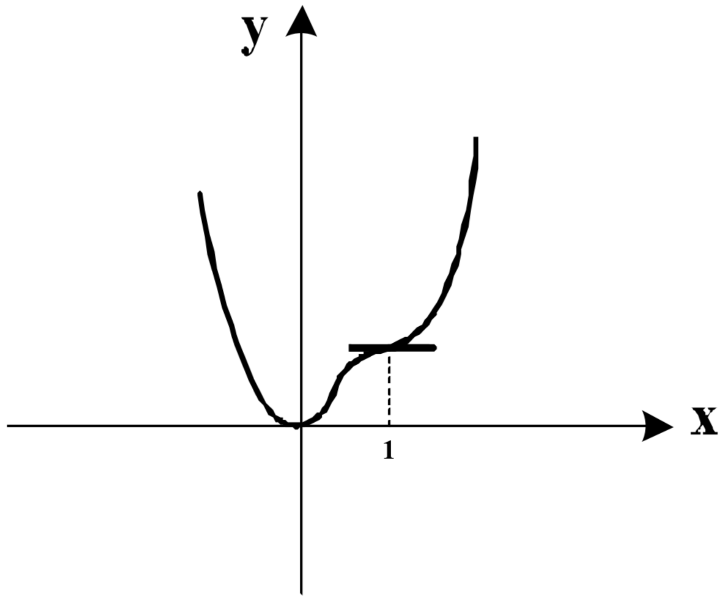
Máme rovnici tečny. Posledním krokem bude zjistit kde graf tečny protíná osu y, tedy tam kde se $x = 0$.

$$\begin{aligned} y =& \frac{3}{2}x + 2 \\ y =& \frac{3}{2} \cdot 0 + 2 \\ y =& 2 \end{aligned}$$

Graf tečny tedy protne osu y v bodě $[0, 2]$.

6. Je dán graf funkce $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Určete hodnotu a.

6. The graph of the function $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ is given. Determine the value of a.

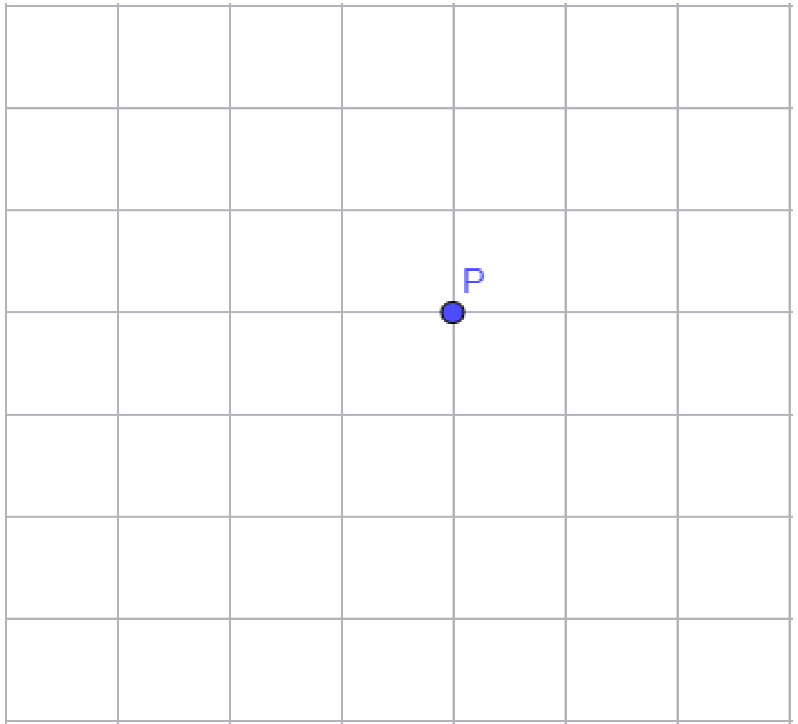


Tangent

$$y = tan(x)$$

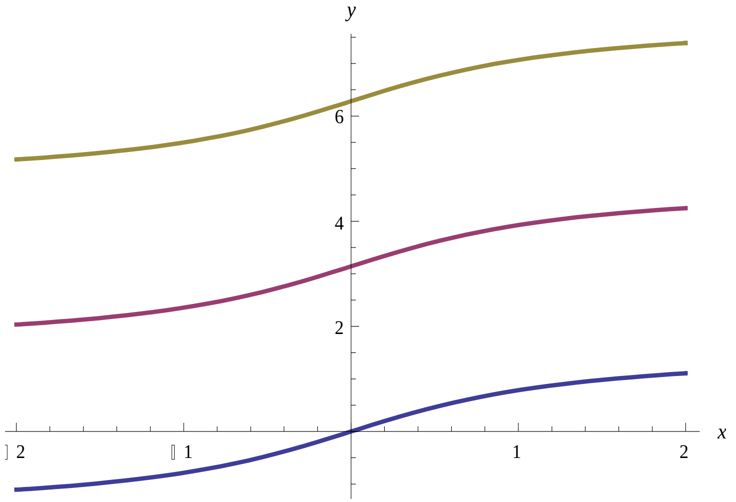
1. Draw a line segment with a slope of -2 passing through the point P. What happens if the slope is 2?

1. Narýsujte přímku se směrnicí -2, která prochází bodem P. Co se stane, pokud je směrnice 2?



2. Consider the graph below and determine whether the graph represents y as a function of x. How would you explain this to students?

2. Uvažujte níže uvedený graf a určete, zda graf vyjadřuje y jako funkci proměnné x. Jak byste to vysvětlili studentům?



3. Consider the graph below and answer the following questions:

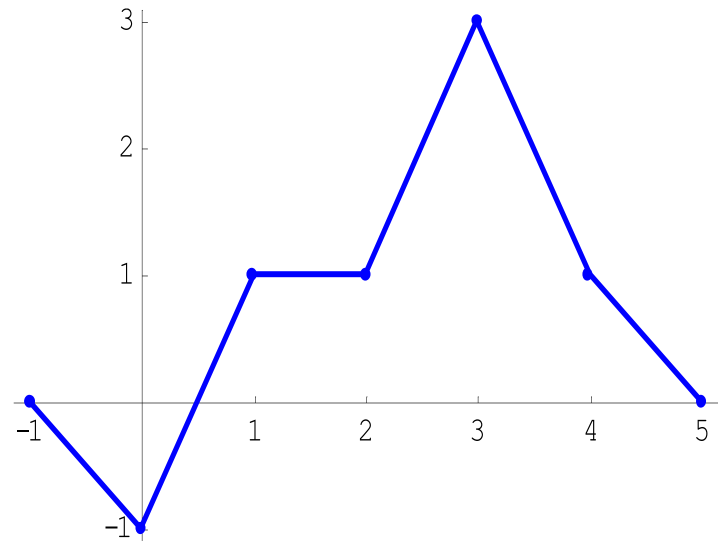
a) Determine whether the graph represents y as a function of x. How would you explain this to students?

b) Determine whether the graph represents a one-to-one function. How would you explain this to students?

3. Uvažujte níže uvedený graf a odpovězte na následující otázky:

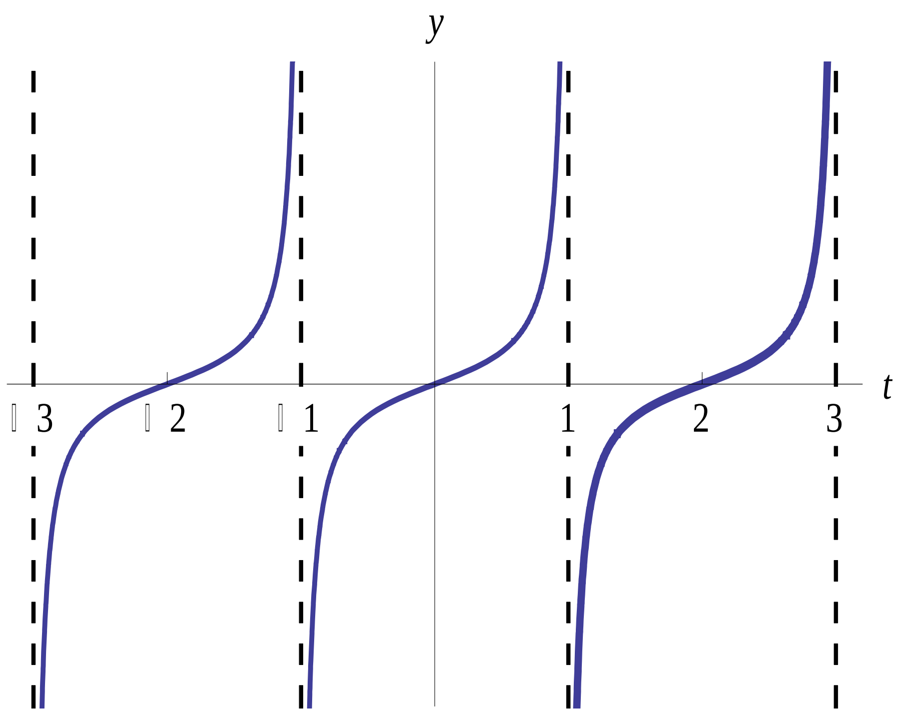
a) Určete, zda graf vyjadřuje y jako funkci proměnné x. Jak byste to vysvětlili studentům?

b) Určete, zda graf představuje prostou funkci. Jak byste to vysvětlili studentům?



4. Consider the graph below. Does this function have an inverse? If so, draw the graph of the inverse function. If not, explain why not.

4. Uvažujte níže uvedený graf. Má tato funkce inverzní funkci? Pokud ano, narýsujte graf inverzní funkce. Pokud ne, vysvětlete proč.

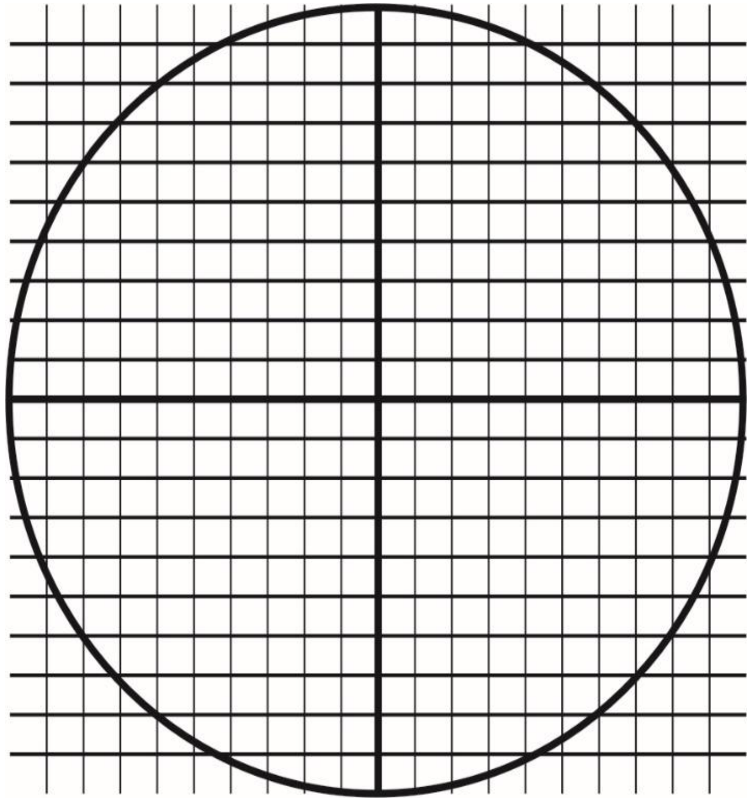


5. How would you explain the tangent function using (a) a right triangle and (b) the unit circle? (c) Can you relate these two explanations?

5. Jak byste vysvětlili funkci tangens pomocí a) pravoúhlého trojúhelníku a b) jednotkové kružnice? c) Lze tyto dva výklady propojit?

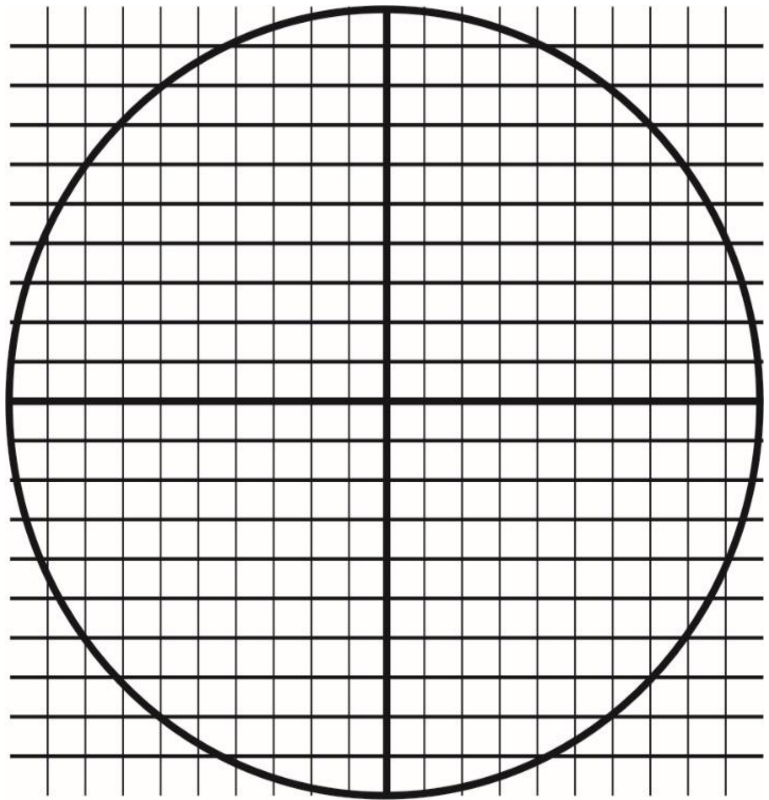
6. a) What do you understand by an angle of 1 radian? b) Can you use the unit circle and a piece of the ribbon to find the tangent of an angle measuring 1 radian ($tan(1)$).

6. a) Co rozumíte úhlem o velikosti 1 radián? b) Můžete pomocí jednotkové kružnice a kousku stuhy určit hodnotu tg(1)?



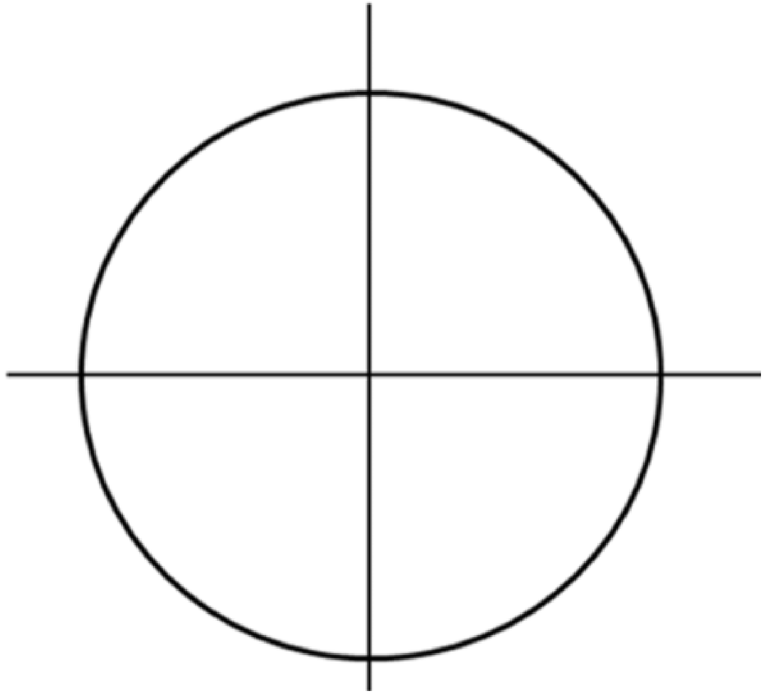
7. How can you compare the values of $\tan(0.5)$ and $\tan(0.9)$ using the unit circle?

7. Jak můžete pomocí jednotkové kružnice porovnat hodnoty $\mathrm{tg}(0{,}5)$ a $\mathrm{tg}(0{,}9)$?



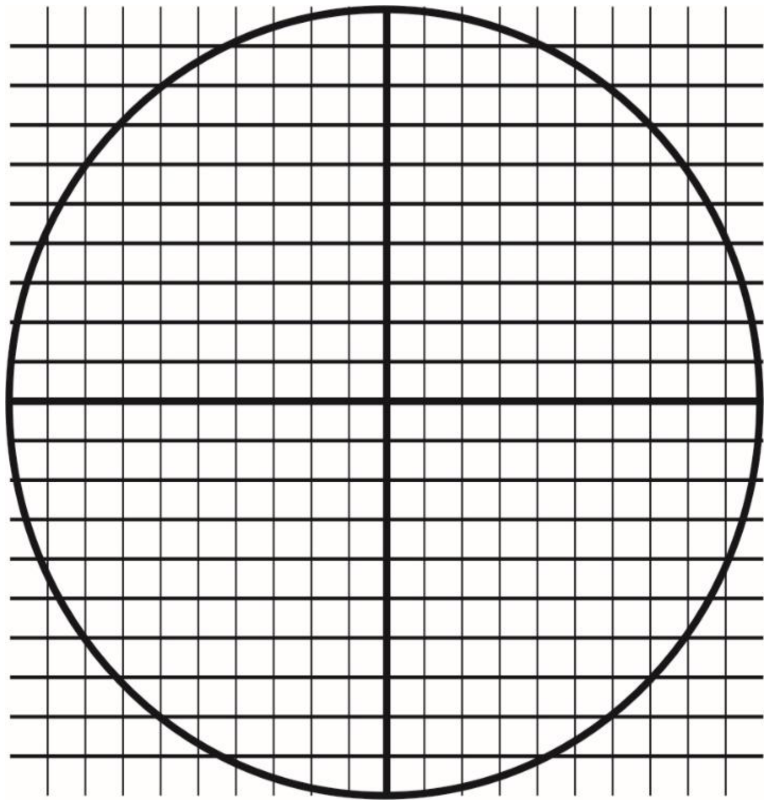
8. How can you compare the values of $\tan x$ and $\tan(x+\pi)$? Give an argument based on the unit circle.

8. Jak můžete porovnat hodnoty $\mathrm{tg}\, x$ a $\mathrm{tg}(x+\pi)$? Uveďte zdůvodnění na základě jednotkové kružnice.



9. Use the given circle and ribbon to find an angle θ (in radians) such that $\tan\theta = 5$? Approximate θ as a real number using the unit circle.

9. Pomocí dané kružnice a stuhy najděte úhel θ (v radiánech), pro který platí $\operatorname{tg}\theta = 5$. Přibližte θ jako reálné číslo pomocí jednotkové kružnice.



10. If $\tan(\frac{9\pi}{5}) = -0.72654253$, find the value of $\arctan(-0.72654253)$.

10. Jestliže $\mathrm{tg}(\frac{9\pi}{5}) = -0.72654253$, určete hodnotu $\mathrm{arctg}(-0.72654253)$.

11. Compute $\arctan(\tan(\frac{4\pi}{5}))$. Explain your solution.

11. Vypočítejte $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\frac{4\pi}{5}))$. Vysvětlete svůj postup.

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz