



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #9

Vahid Borji & Petra Surynková

Kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

Různé metody řešení kvadratické rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$):

- Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)
- Diskriminant
- Rozklad na součin
- Grafická metoda

Definice druhé odmocniny?

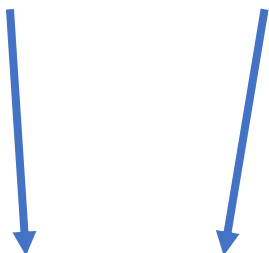
Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla a je nezáporné reálné číslo b , pro které platí, že $b^2 = a$. Značíme $b = \sqrt{a}$.

Řešte $x^2 = 9$ pomocí druhé odmocniny $\sqrt{}$.

**Mylné představy žáků při řešení $x^2 = 9$
pomocí druhé odmocniny.**

$$x^2 = 9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$



$$x = 3$$

$$x^2 = 9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$|x| = 3$$

$$x = \pm 3$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Kontorovich (2021) zjistil, že když jsou studenti požádáni, aby zjednodušili výraz $\sqrt{x^2}$:

mnoho z nich odpoví x

nebo $\pm x$,

zatímco $|x|$ je zmíněno jen zřídka.

Tall (2014) uvedl, že pouze jeden ze 68 středoškoláků v Brazílii dokázal správně vyřešit rovnici $m^2 = 9$.

Předchozí znalosti potřebné k řešení kvadratických rovnic:

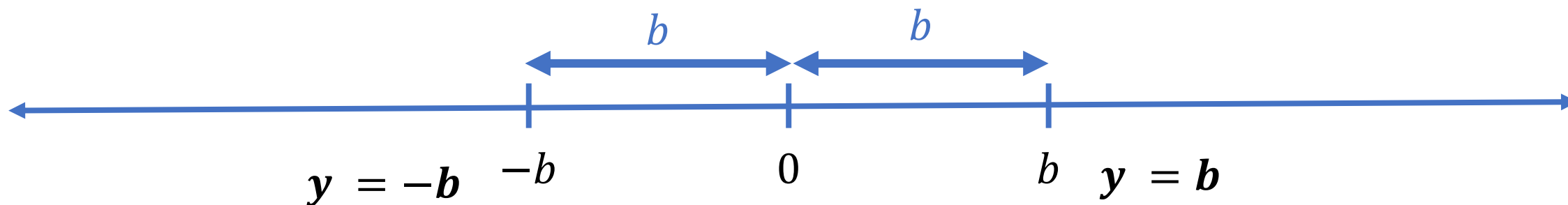
1) Dovednost řešit lineární rovnice: $ax + b = c$

2) Dovednost řešit lineární rovnice s absolutní hodnotou ve tvaru:

$$|x - a| = b$$

(geometricky, numericky a symbolicky)

$$|y| = b \quad (b \geq 0) \Rightarrow y = \pm b$$



Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)

Numerické zkoumání možných řešení rovnic:

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Poté numerické zkoumání rovnice:

$$\sqrt{(x+1)^2} = x+1$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$\sqrt{(-x+1)^2} = -x+1$$

$$\sqrt{(-x+1)^2} = |-x+1|$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|}$$

Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x^2 = 10$$

$$x^2 = b \quad (b \geq 0) \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{b} \Rightarrow |x| = \sqrt{b} \Rightarrow x = \pm\sqrt{b}$$

$$(2x + 1)^2 = 25$$

$$(-x + 1)^2 = 16$$

$$(x - 3)^2 = 10$$

$$(ax + b)^2 = c \quad (a \neq 0, c \geq 0) \Rightarrow \sqrt{(ax + b)^2} = \sqrt{c} \Rightarrow |ax + b| = \sqrt{c} \Rightarrow ax + b = \pm\sqrt{c}$$

Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)

$$x^2 + bx = c$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (\text{Řešení metodou druhé odmocniny})$$

$$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3} \quad \times$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x = 3 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3 + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x + 1| = 2 \\ &\Rightarrow x + 1 = \pm 2 \\ &\Rightarrow x = 1, x = -3 \end{aligned}$$

Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)

Koeficient u x^2 není 1 $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

(Doplnění na čtverec a následné použití druhé odmocniny)

$$4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 3 \Leftrightarrow x^2 - x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = 1 \quad x - \frac{1}{2} = 1 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} = -1 \quad x = \frac{-1}{2}$$

Diskriminant

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Diskriminant

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

(Řešení pomocí doplnění na čtverec, kdy a , b a c jsou ponechány jako parametry)

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Metoda diskriminantu poskytuje všechna řešení v množině $\mathbb{R}$.

Počet kořenů může být 0, 1 nebo 2.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Použití diskriminantu k řešení rovnic ekvivalentních $ax^2 + bx + c = 0$

References

- Chaachoua, H., Mizoguchi, T., Bessot, A., Kaspary, D., Barquero, B., Nguyen, A. Q., & Pilet, J. (2024). A comparative study of the teaching of quadratic equations in five curricula: Brazil, France, Japan, Spain and Vietnam. *Recherches en didactique des mathématiques*, 44(1), 75–113. <https://doi.org/10.46298/rdm.13753>
- Crisan, C. (2012). I thought I knew all about square roots. In C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 32(3), 43–48.
- Crisan, C. (2014). The case of the square root: Ambiguous treatment and pedagogical implications for prospective mathematics teachers. In Pope, S. (Ed.) *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education*, 75–82.
- Didiş, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and difficulties of students in formulating and solving quadratic equations with one unknown. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 15(4), 1137–1150. <https://doi.org/10.12738/estp.2015.4.2743>
- Didiş, M. G. (2018). Secondary school students' conception of quadratic equations with one unknown. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 19(1), 112–129. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v19i1.94>
- Didiş, M. G. (2023). A thematic review of quadratic equation studies in the field of mathematics education. *Participatory Educational Research*, 10(4), 29–48. <http://dx.doi.org/10.17275/per.23.58.10.4>
- Hong, D.S., & Choi, K.M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 241–263. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9512-4>
- Kontorovich, I. (2018). Undergraduates' images of the root concept in $\mathbb{R}$ and in $\mathbb{C}$. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 184–193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.002>.
- Kontorovich, I. (2021). Pre-university students square-root from squared things: A commognitive account of apparent conflicts within learners' mathematical discourses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 64, 100910. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100910>
- Li, X. (2011). Mathematical knowledge for teaching algebraic routines: A case study of solving quadratic equations. *Journal of Mathematics Education*, 4(2), 1–16.

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz