



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #5

Vahid Borji & Petra Surynková

Goniometrické funkce a jejich inverze

$\sin x$

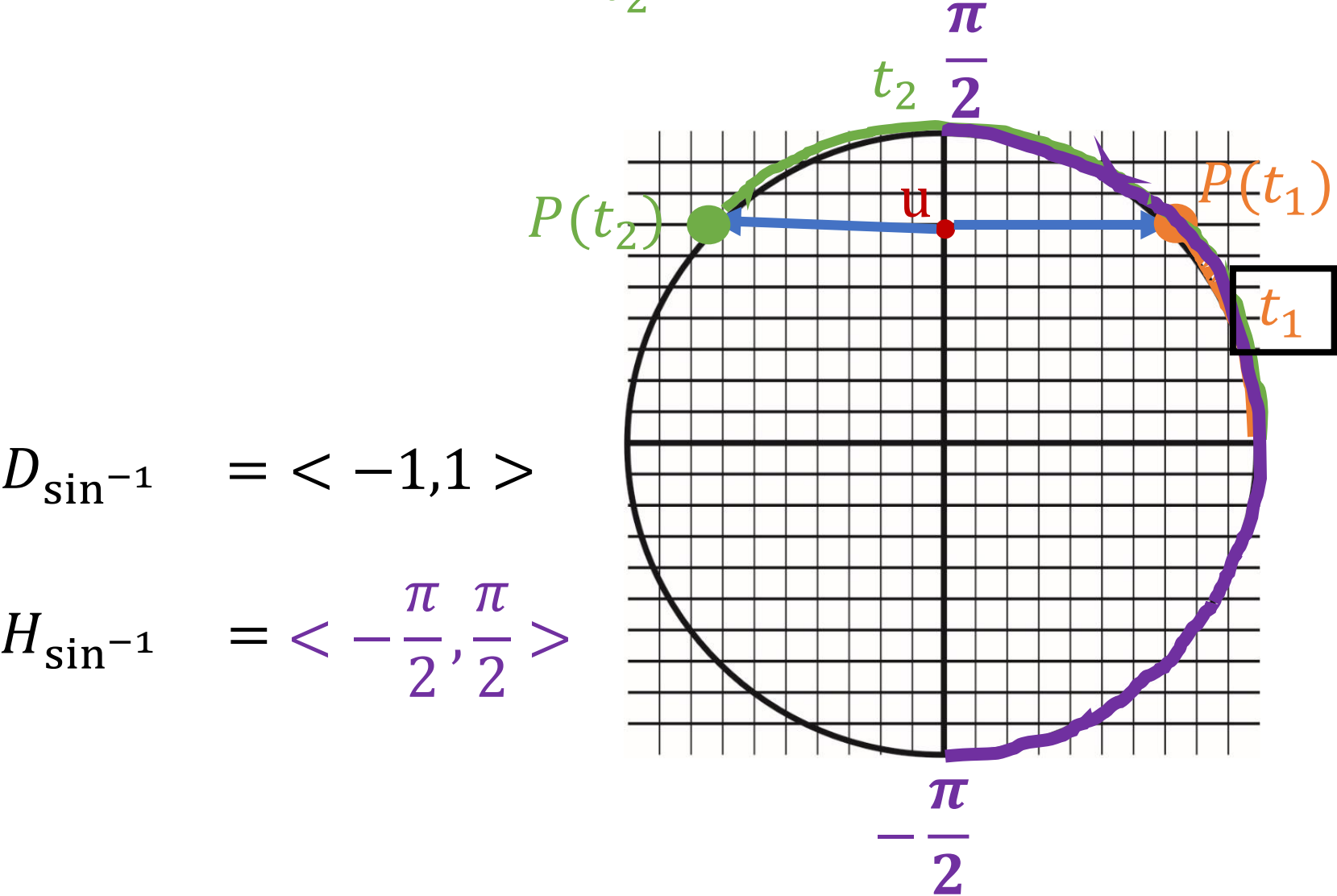
$\cos x$

$\arcsin$

$\arccos$

- ❑ Vytváření inverze sinu ($\arcsin$) pomocí jednotkové kružnice.
- ❑ Vytváření inverze kosinu ($\arccos$) pomocí jednotkové kružnice

$$\operatorname{arcsin} u = \sin^{-1} u = \boxed{t_1}^{t_2}$$



$$\sin^{-1} u = t$$

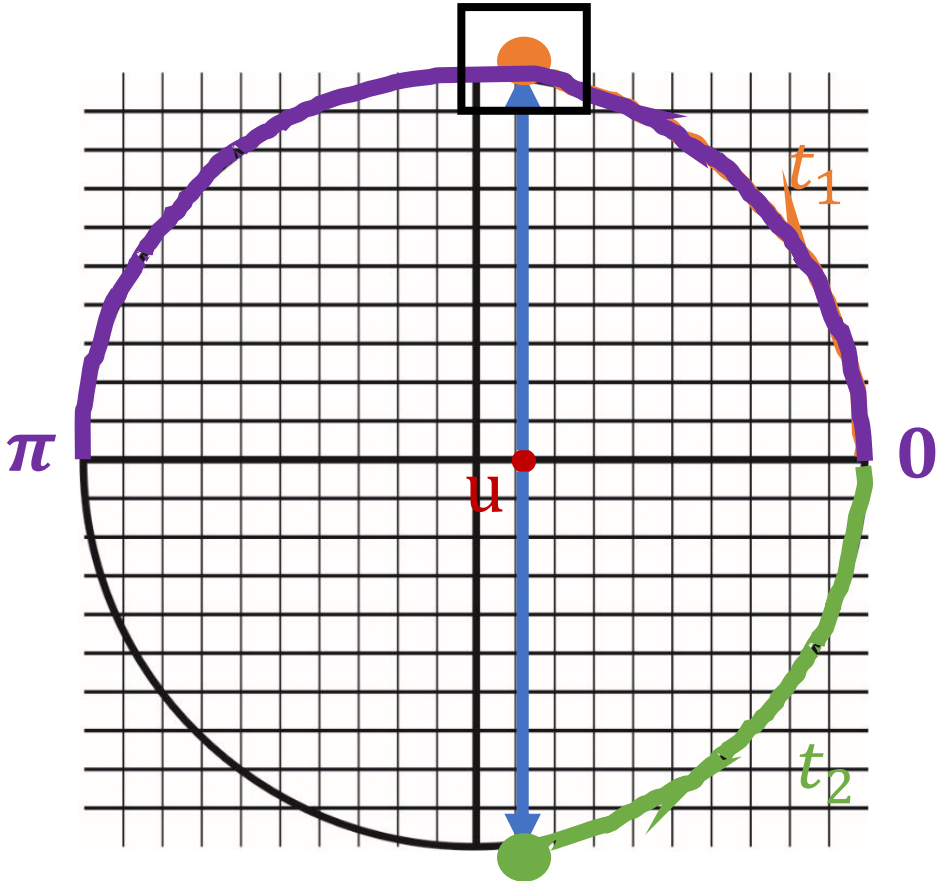
$$D_{\sin^{-1}} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$H_{\sin^{-1}} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$\operatorname{arccos} u = \cos^{-1} u = \begin{matrix} \boxed{t_1} \\ t_2 \end{matrix}$$

$$D_{\cos^{-1}} = \langle -1,1 \rangle$$

$$H_{\cos^{-1}} = \langle 0,\pi \rangle$$



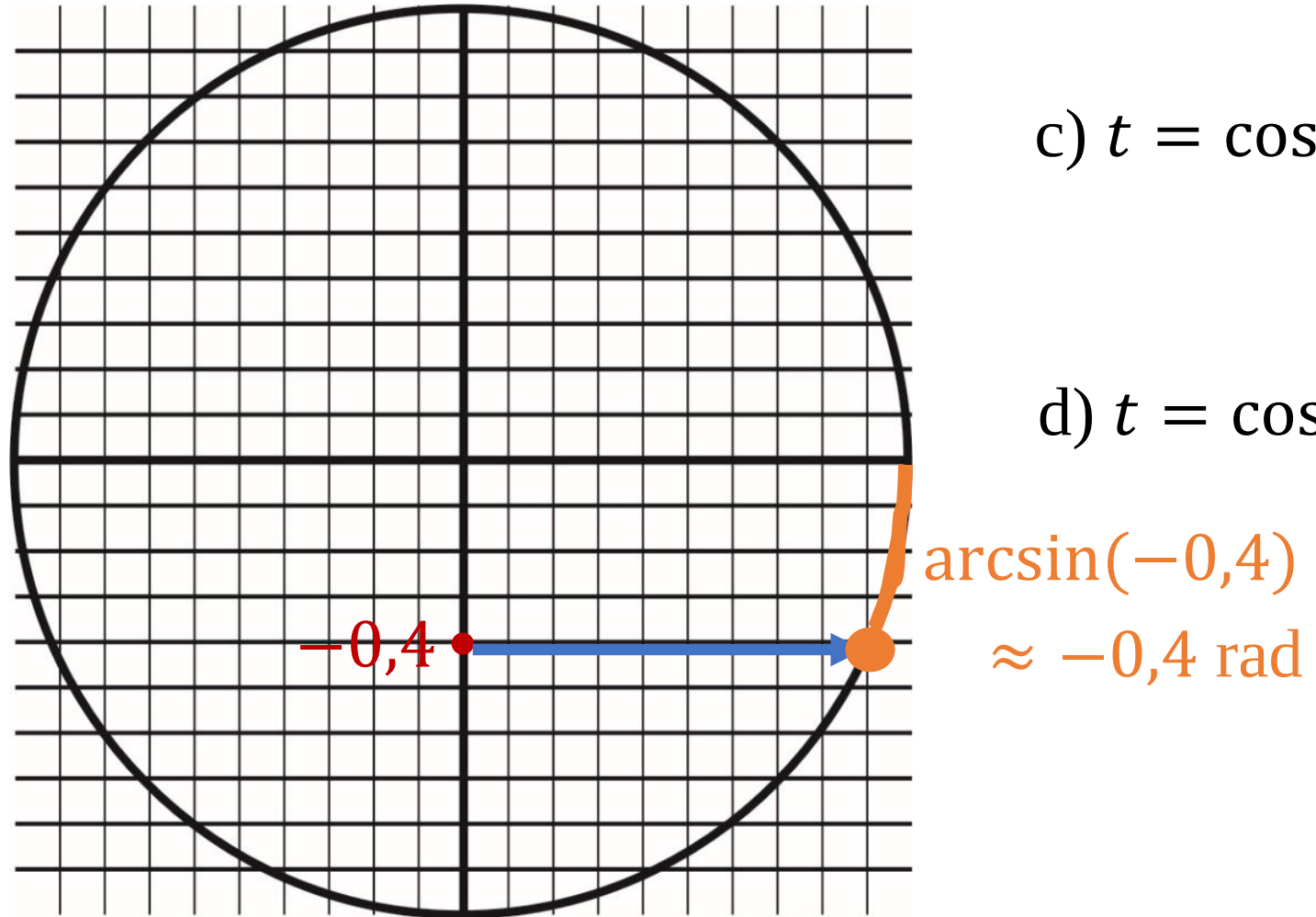
20. Použijte kousek stuhy a kružnici a podle výše uvedeného postupu co nejpřesněji přibližte hodnotu t , kde:

a) $t = \sin^{-1}(-0,4)$

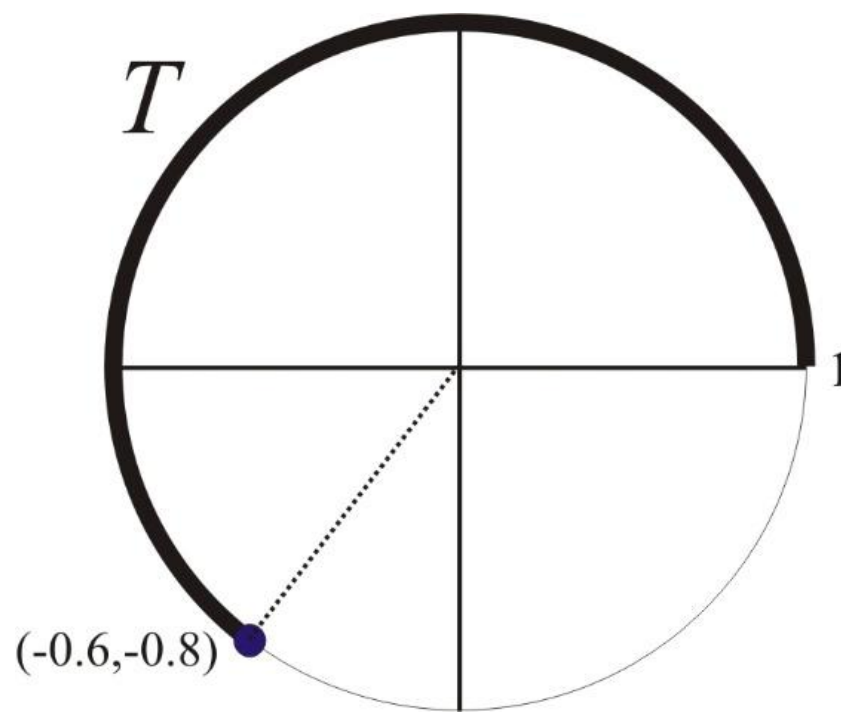
b) $t = \sin^{-1}(0,6)$

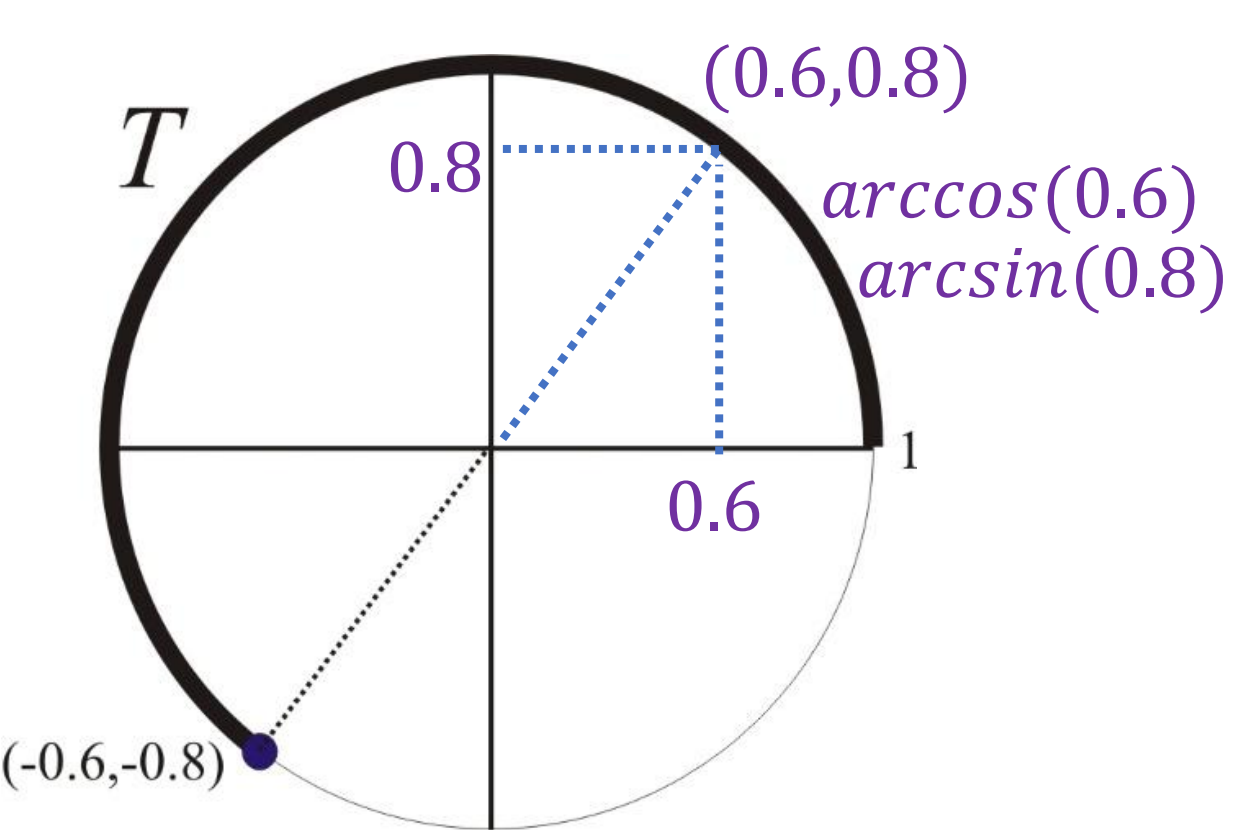
c) $t = \cos^{-1}(-0,3)$

d) $t = \cos^{-1}(0,7)$



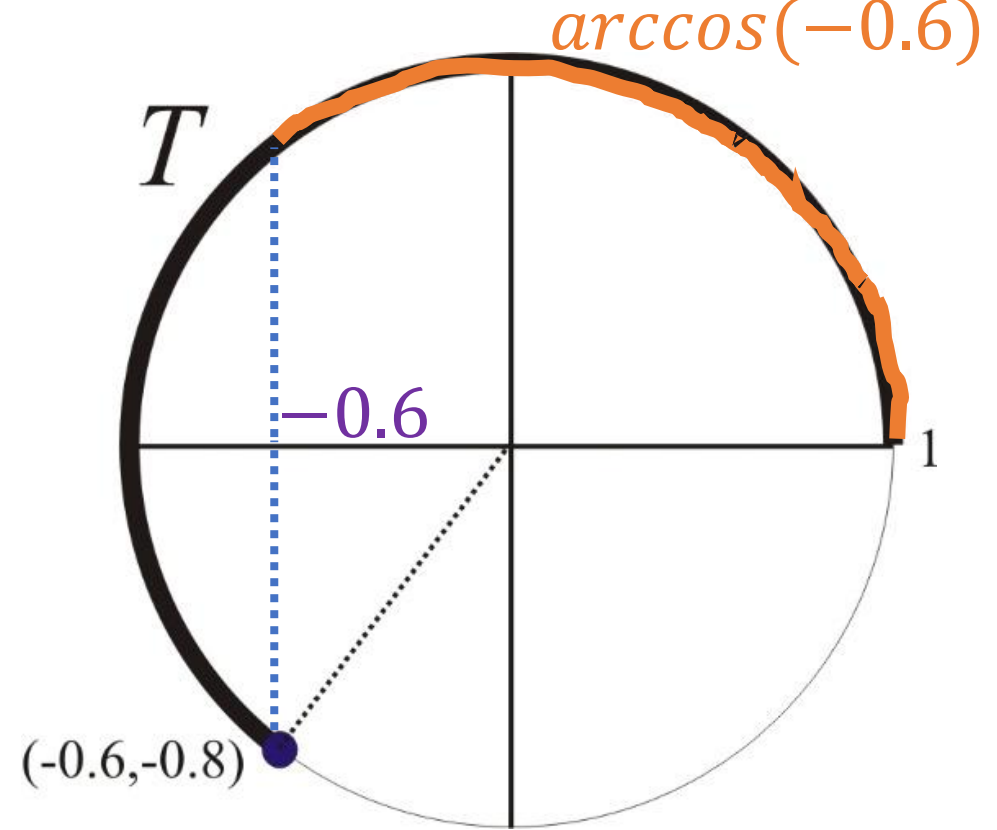
22. Pokud začneme v bodě $[1,0]$ na jednotkové kružnici a urazíme po kružnici proti směru hodinových ručiček vzdálenost T , jak je znázorněno na obrázku, skončíme v bodě $[-0,6, -0,8]$. Jaká je hodnota T ? (T je délka oblouku.)



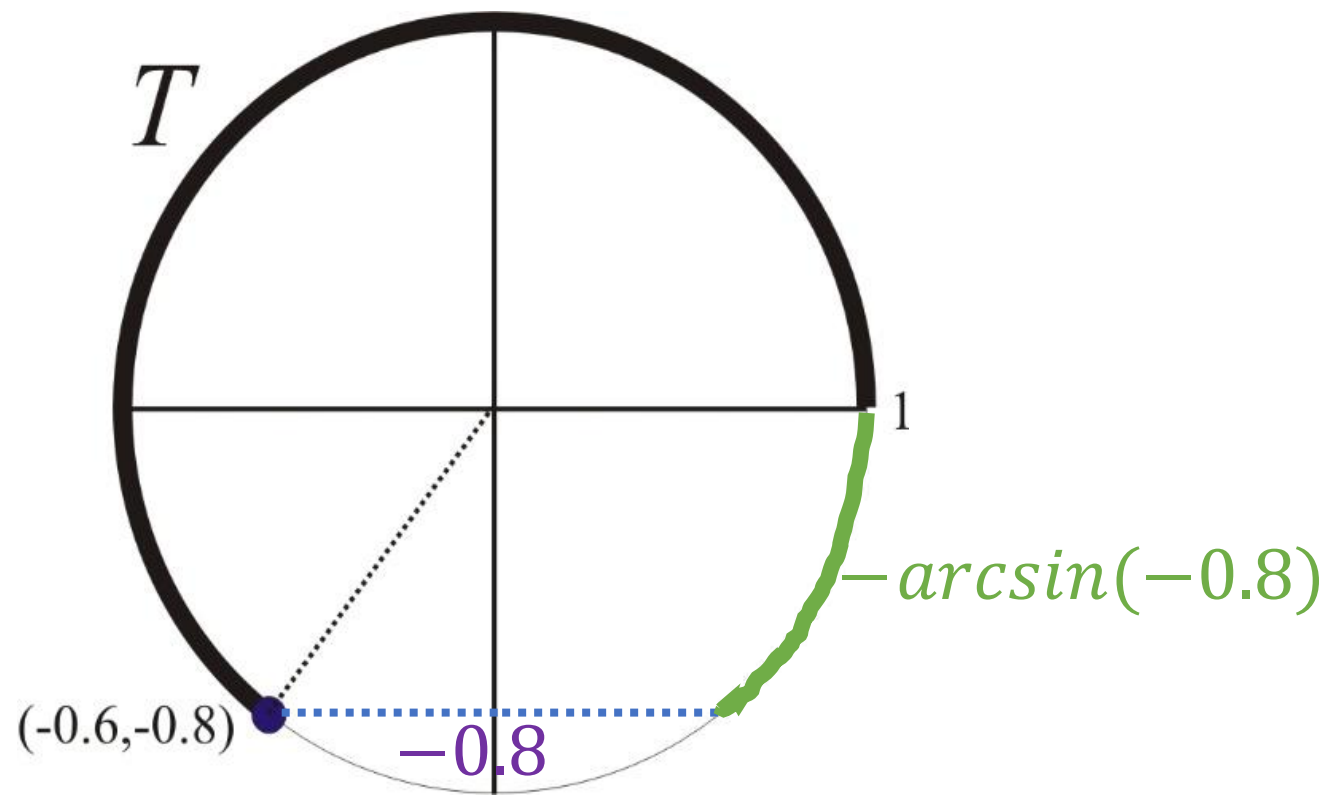


$$\pi + \arccos(0.6)$$

$$\pi + \arcsin(0.8)$$



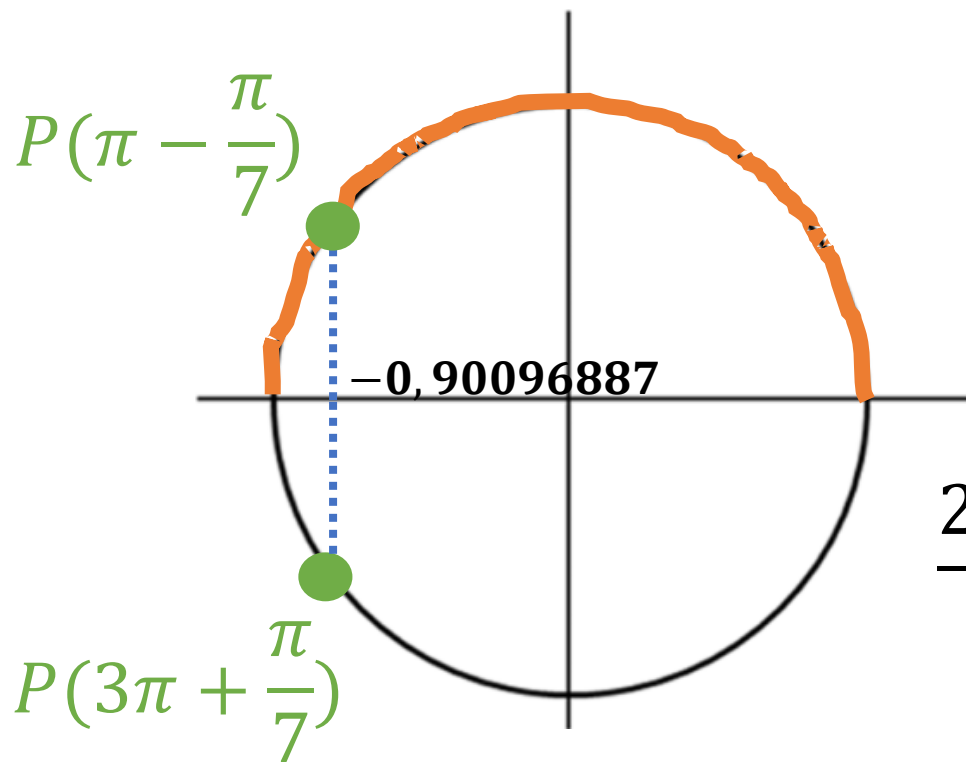
$$2\pi - \arccos(-0.6)$$



$$\pi + (-\arcsin(-0.8))$$

$$= \pi - \arcsin(-0.8)$$

23. Pokud $\cos(\frac{22\pi}{7}) = -0,90096887$, určete $\cos^{-1}(-0,90096887)$?

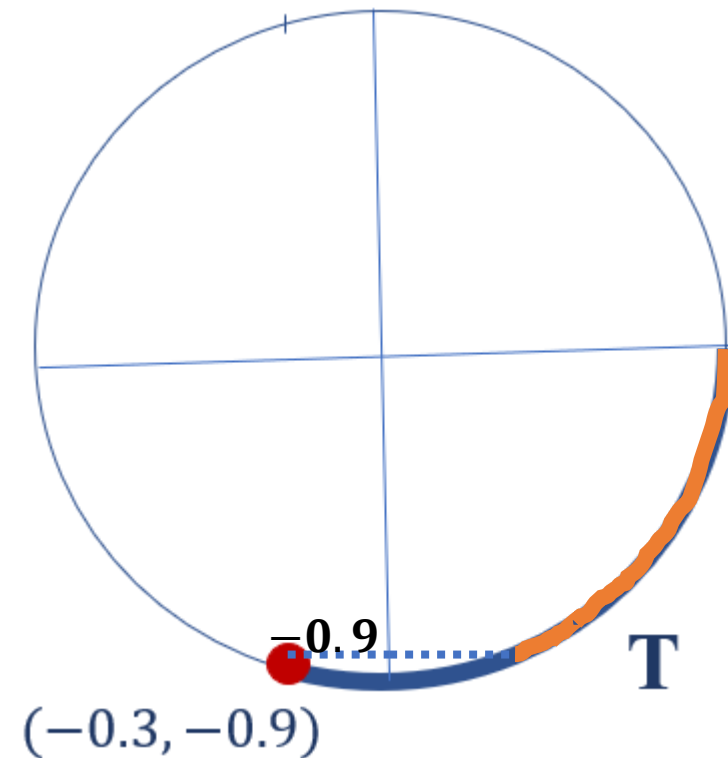
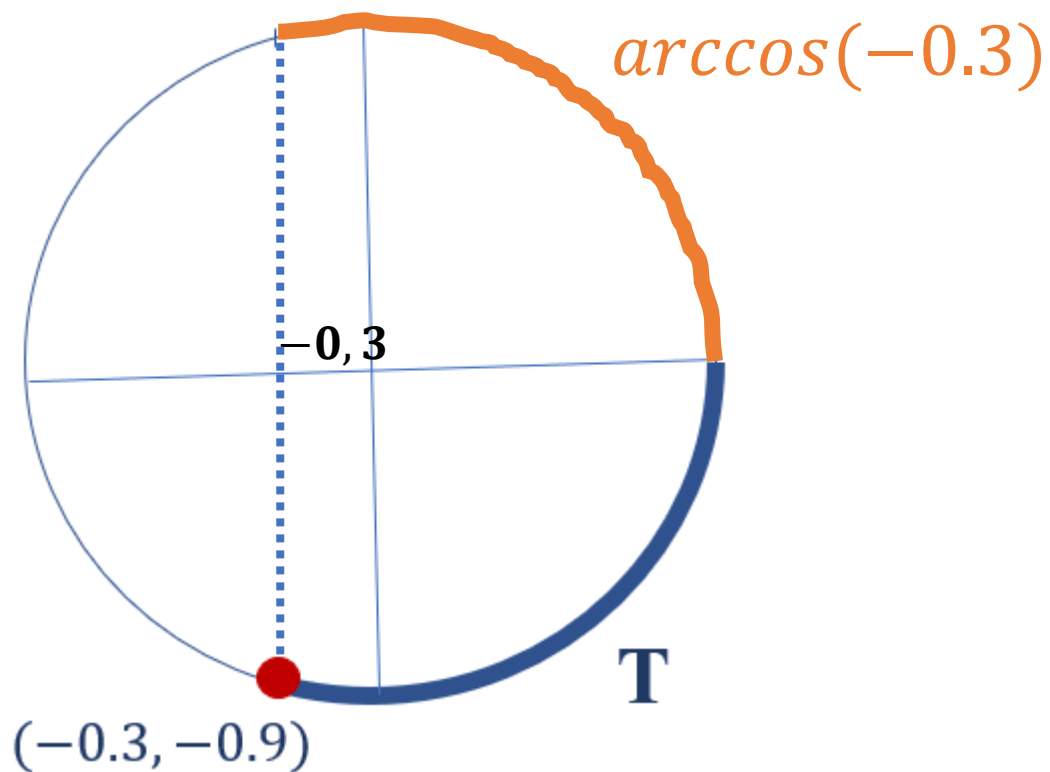


$$\frac{22\pi}{7} = \frac{21\pi + \pi}{7} = 3\pi + \frac{\pi}{7}$$

$$\frac{22\pi}{7} \notin \langle 0, \pi \rangle \Rightarrow \cos^{-1}(-0,90096887) \neq \frac{22\pi}{7}$$

$$\cos^{-1}(-0,90096887) = \pi - \frac{\pi}{7}$$

24. Pokud začneme v bodě $[1,0]$ na jednotkové kružnici a urazíme po kružnici ve směru hodinových ručiček vzdálenost T , jak je znázorněno na obrázku, skončíme v bodě $[-0,3, -0,9]$. Jaká je hodnota T ? (T je délka oblouku.)



$$\begin{aligned} & \pi - (-\arcsin(-0.9)) \\ &= \pi + \arcsin(-0.9) \end{aligned}$$

25. Požádali jsme studenta, aby vyřešil trigonometrickou rovnici $\sin(2x) = 0,7$. Student předložil následující řešení:

$$\sin(2x) = 0,7$$

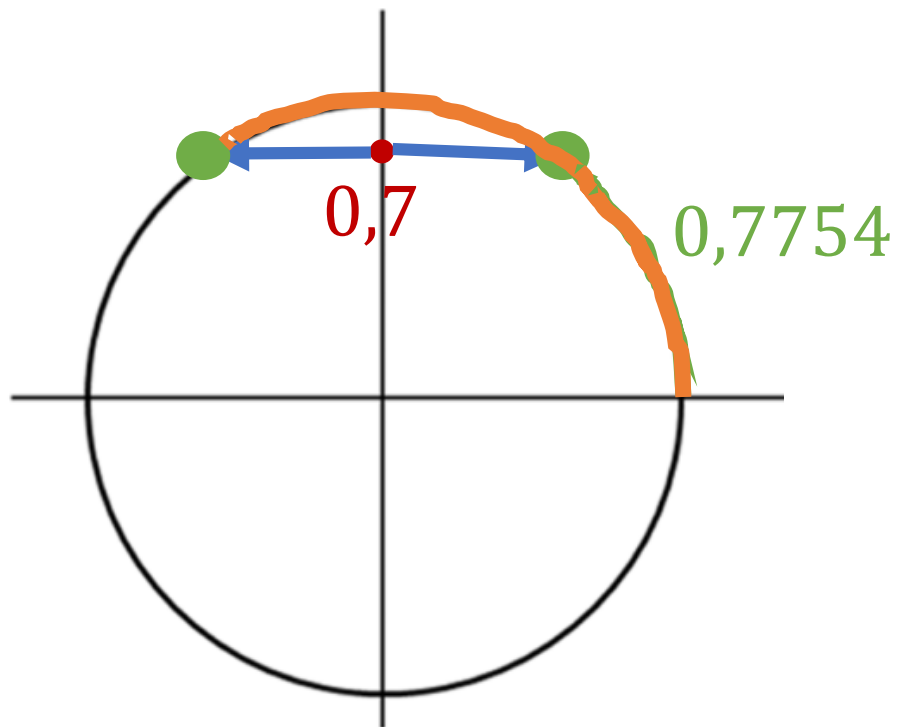
$$2x = \arcsin(0,7)$$

$$2x = 0,7754$$

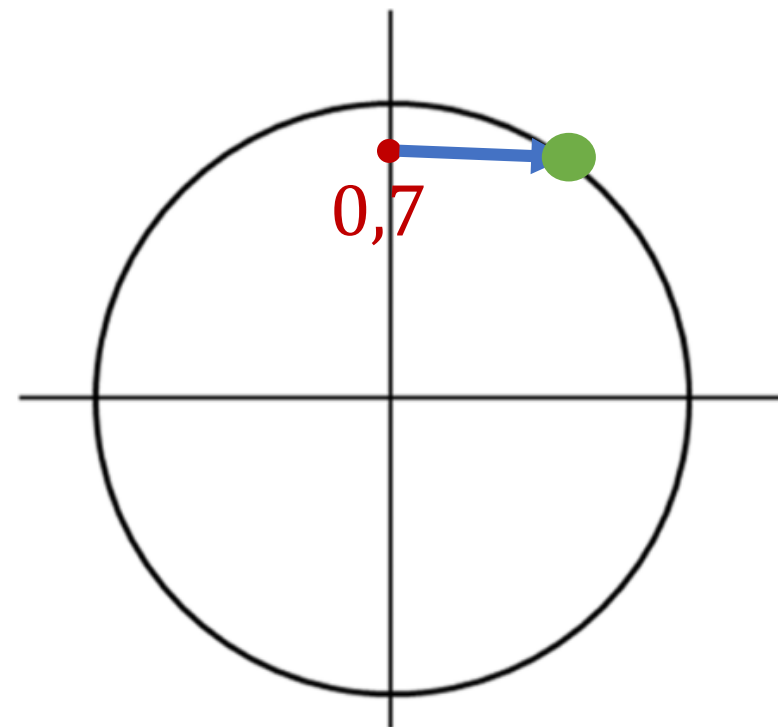
$$x = 0,3877 + 2\pi k$$

- (a)** Zhodnoťte práci studenta – je správná nebo nesprávná?
- (b)** Pokud si myslíte, že tam jsou chyby, určete je a vysvětlete, proč jsou to chyby.
- (c)** Pokud si myslíte, že uvedené řešení je nesprávné, uveďte správnou odpověď.

$$\sin(2x) = 0,7$$



$$2x = \arcsin(0,7)$$



$$2x = 0,7754 + 2k\pi \Rightarrow x = 0,3877 + k\pi$$

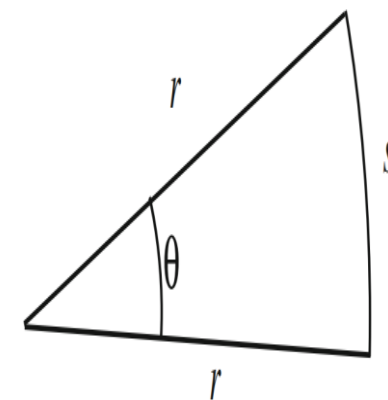
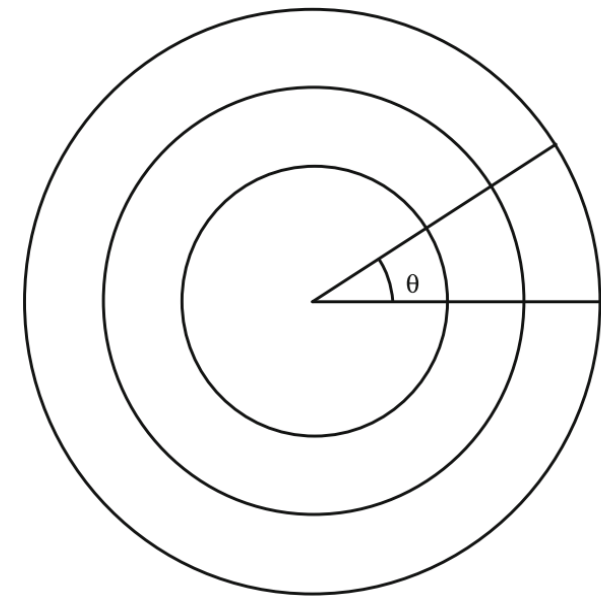
∨

$$2x = \pi - 0,7754 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 0,3877 + k\pi$$

$$2x = 0,7754$$

$$x = 0,3877$$

Je-li velikost úhlu θ rovna 0,5 rad, určete délku každého oblouku vymezeného tímto úhlem. Uvažujte kružnice s poloměry 2,2 cm, 4,2 cm a 6,2 cm.



Délka oblouku = počet poloměrů v daném oblouku $\times$ délka jednoho poloměru

$$\text{První oblouku} = 0,5 \times 2,2 = 1,1 \text{ cm}$$

$$s = \theta \times r$$

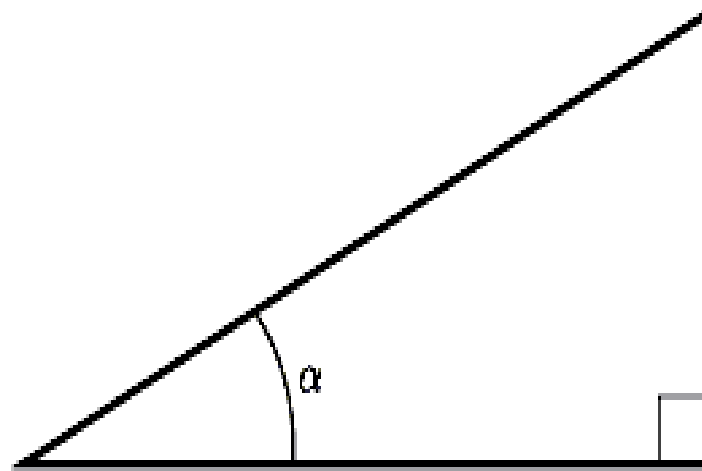
$$\text{Druhý oblouk} = 0,5 \times 4,2 = 2,1 \text{ cm}$$

$$\text{Třetí oblouk} = 0,5 \times 6,2 = 3,1 \text{ cm}$$

Pomocí jednotkové kružnice a procesu projekce můžete vysvětlit proč?

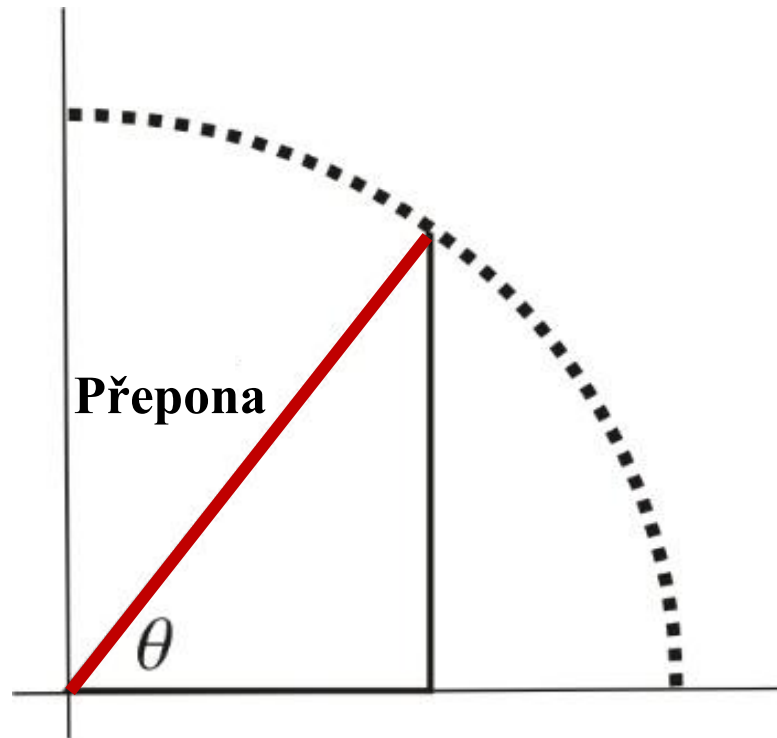
$$\sin \theta = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$



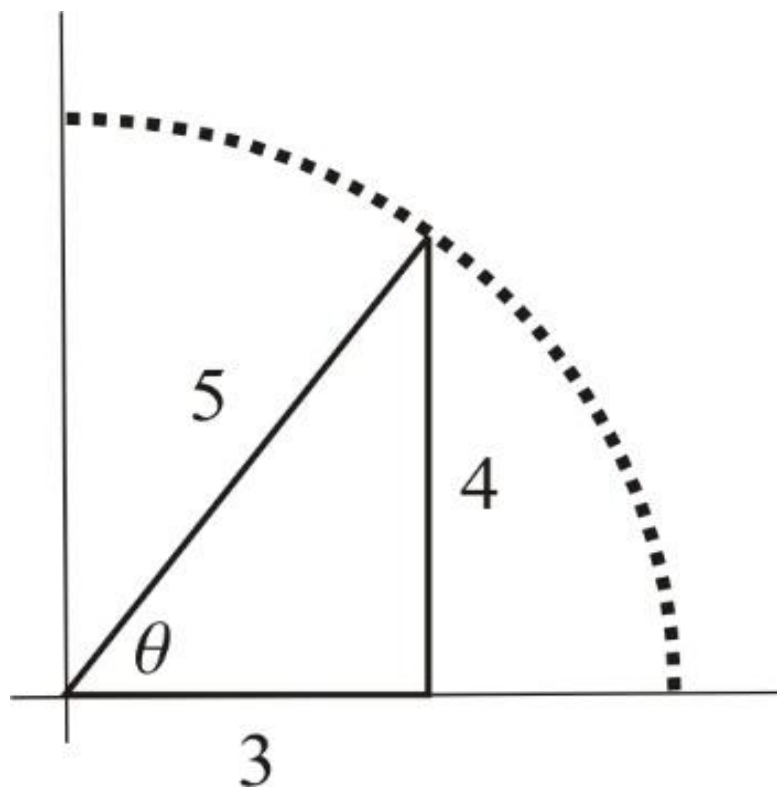
Definice sinu a kosinu na pravoúhlém trojúhelníku:

Definici sinus a kosinus lze rozšířit přímo na ostré úhly pravoúhlého trojúhelníku, pokud uvažujeme o přeponě jako o poloměru kružnice (vid'te obrázek).



Ostrý úhel ($< 90^\circ$, $< \frac{\pi}{2}$ rad) je úhel menší než pravý úhel.

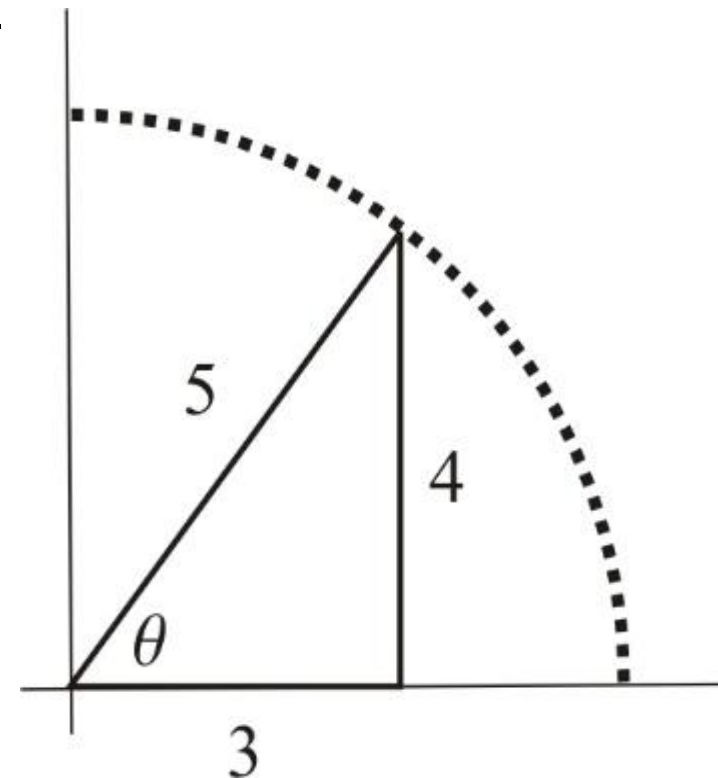
Níže je uveden příklad. Uvažujme ostrý úhel θ pravoúhlého trojúhelníku s protilehlou odvěsnou délky 4, přilehlou odvěsnou délky 3 a přeponou délky 5.



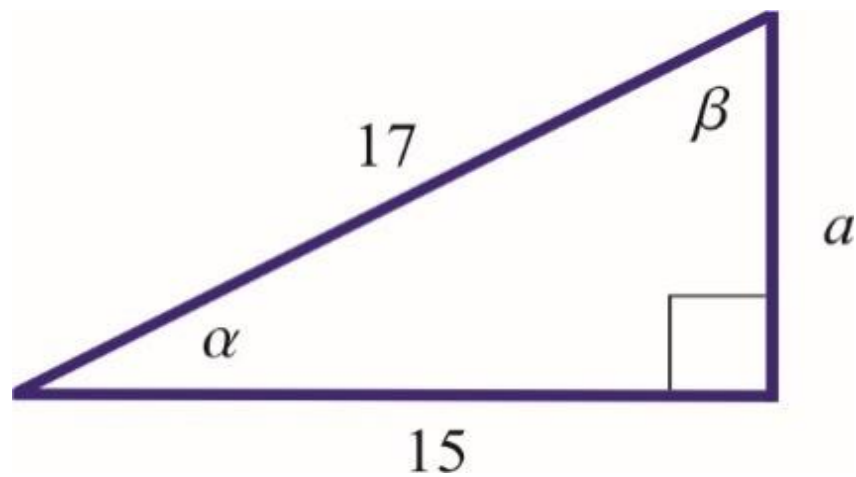
Takže projekce jako vždy:

$$\sin \theta = \frac{\text{projekce na osu } y}{\text{poloměr}} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{projekce na osu } x}{\text{poloměr}} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}} = \frac{3}{5}$$

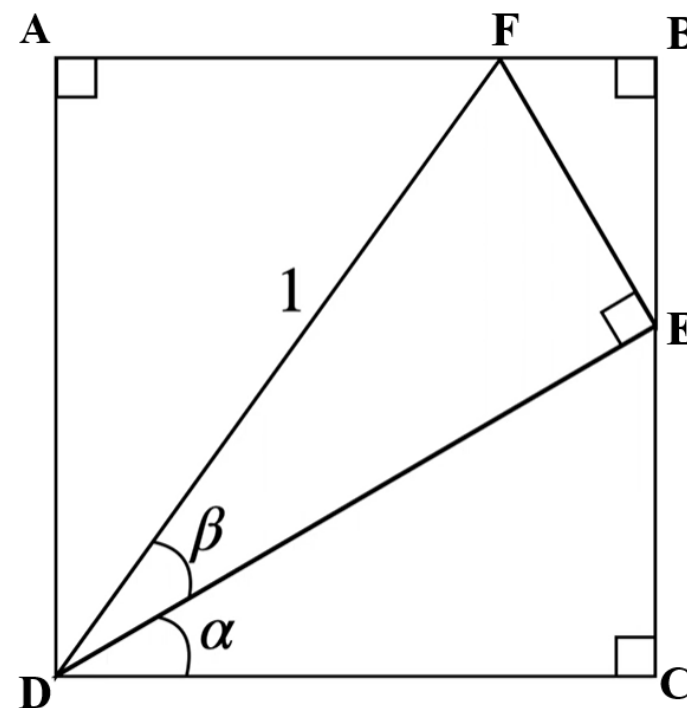


Najděte sinus a kosinus úhlů α a β na obrázku (potřebujete Pythagorovu větu).



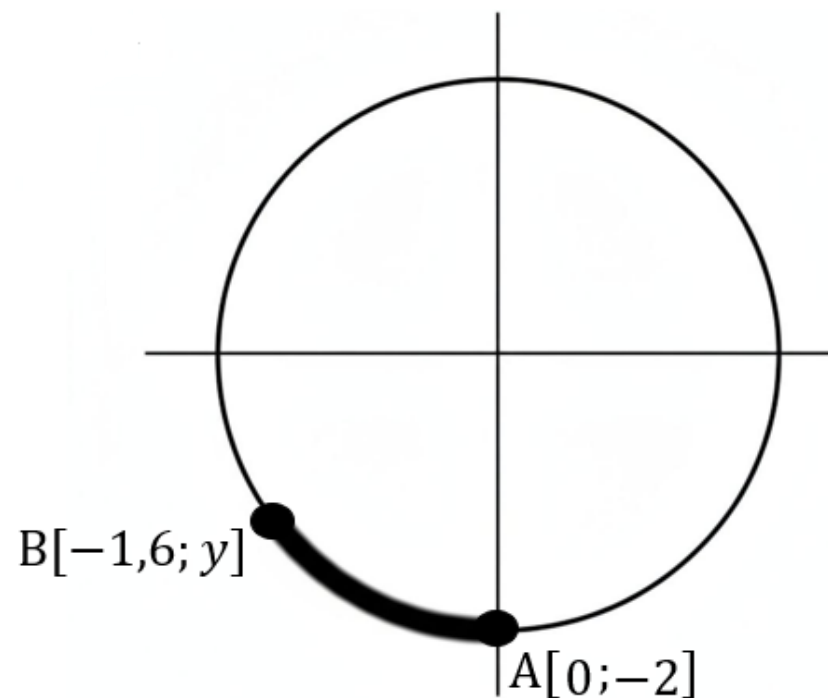
Uvažujte obdélník ABCD.

- a) V pravoúhlém trojúhelníku DEF určete strany DE a EF v závislosti na β .
- b) V pravoúhlém trojúhelníku DEC určete strany DC a CE v závislosti na α a β .
- c) Určete úhel $F\hat{E}B$ v závislosti na α , poté určete BF a BE v závislosti na α a β .
- d) Určete úhel $A\hat{F}D$ v závislosti na α a β , poté určete strany AF a AD.
- e) Na základě získaných stran se pokuste odvodit vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha + \beta)$.



(Domácí úkol) Zvažte kružnici o poloměru 2 cm . Pokud se pohybujeme z bodu $A[0; -2]$ do bodu $B[-1,6; y]$:

- a) Určete délku oblouku AB ve centimetrech dvěma různými způsoby pomocí inverze kosinu [nepoužívejte absolutní hodnotu].
- b) Určete délku oblouku AB ve centimetrech dvěma různými způsoby pomocí inverze sinu [nepoužívejte absolutní hodnotu].



Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz