



UNIVERZITA KARLOVA

**Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky**

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #4

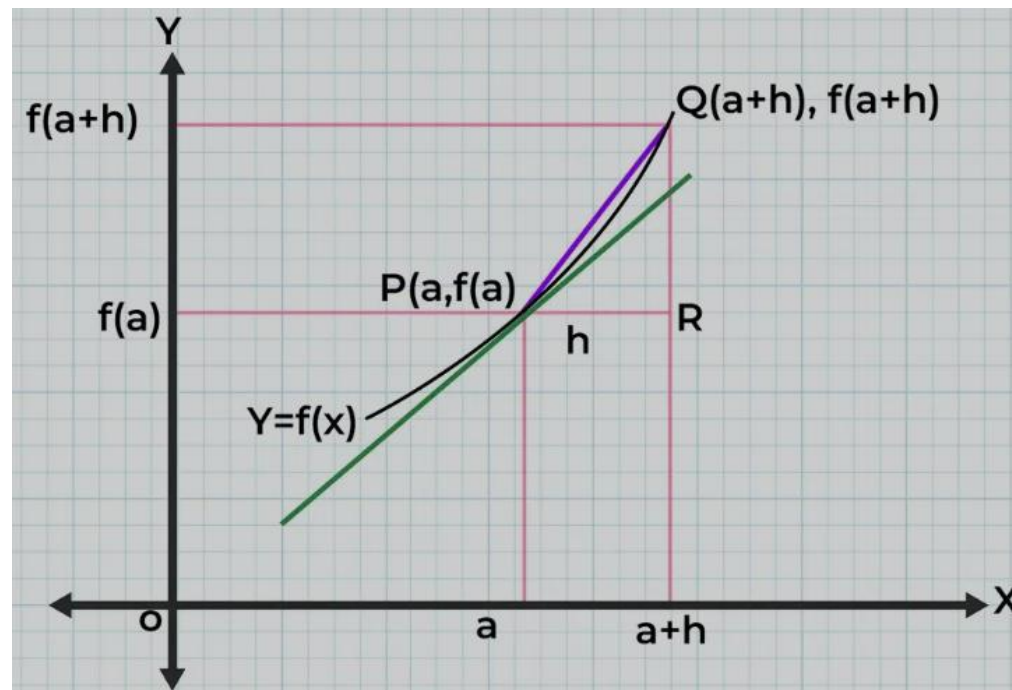
Vahid Borji & Petra Surynková

Koncept/Pojem derivace v různých reprezentacích

□ Potíže studentů při učení pojmu derivace

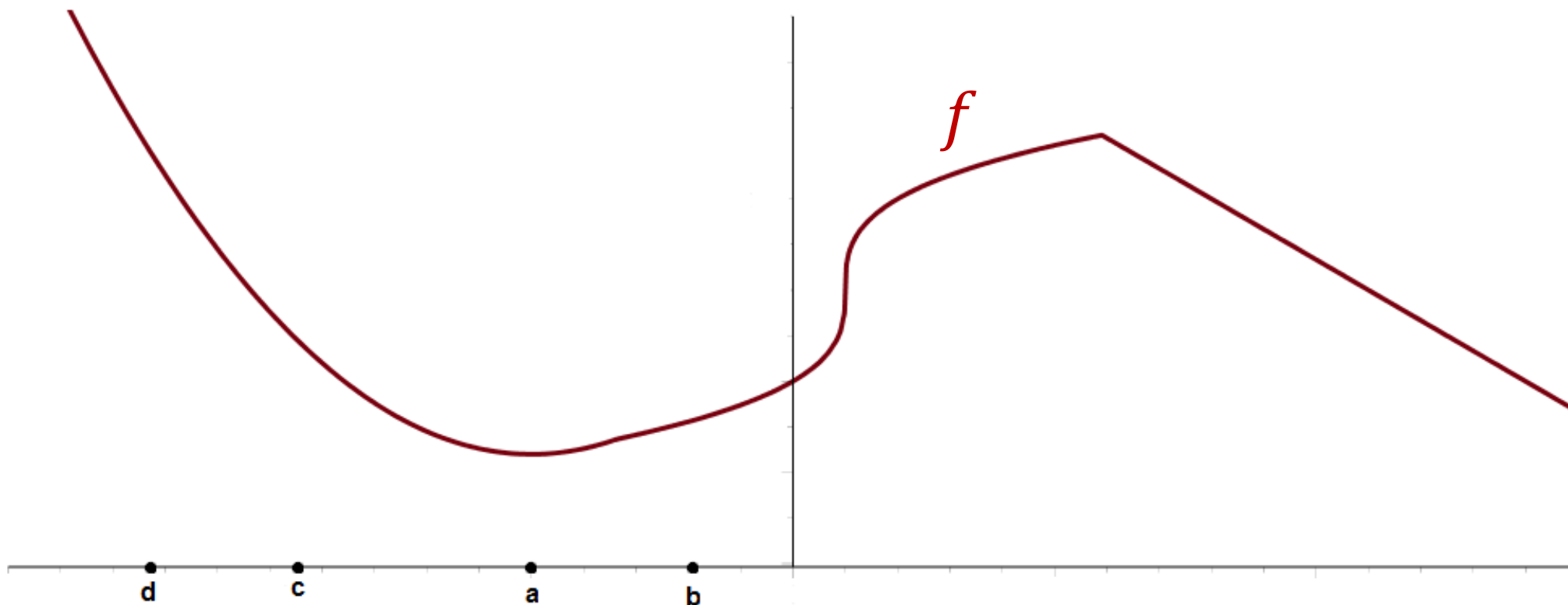
- Předchozí studie uvádějí, že mnoho studentů se při učení derivace zaměřuje více na symbolické než grafické reprezentace (Biza, 2021; Ryberg, 2018) a mají potíže s vytvářením logických spojení mezi těmito reprezentacemi (Chang et al., 2016; Haghjoo & Reyhani, 2021; Zandieh, 2000).

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\operatorname{cosec}^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) &= -\operatorname{cosec} x \cot x \\ \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x \\ \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x \\ \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{coth} x) &= -\operatorname{cosech}^2 x \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) &= -\operatorname{sech} x \tanh x \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{cosech} x) &= -\operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x\end{aligned}$$



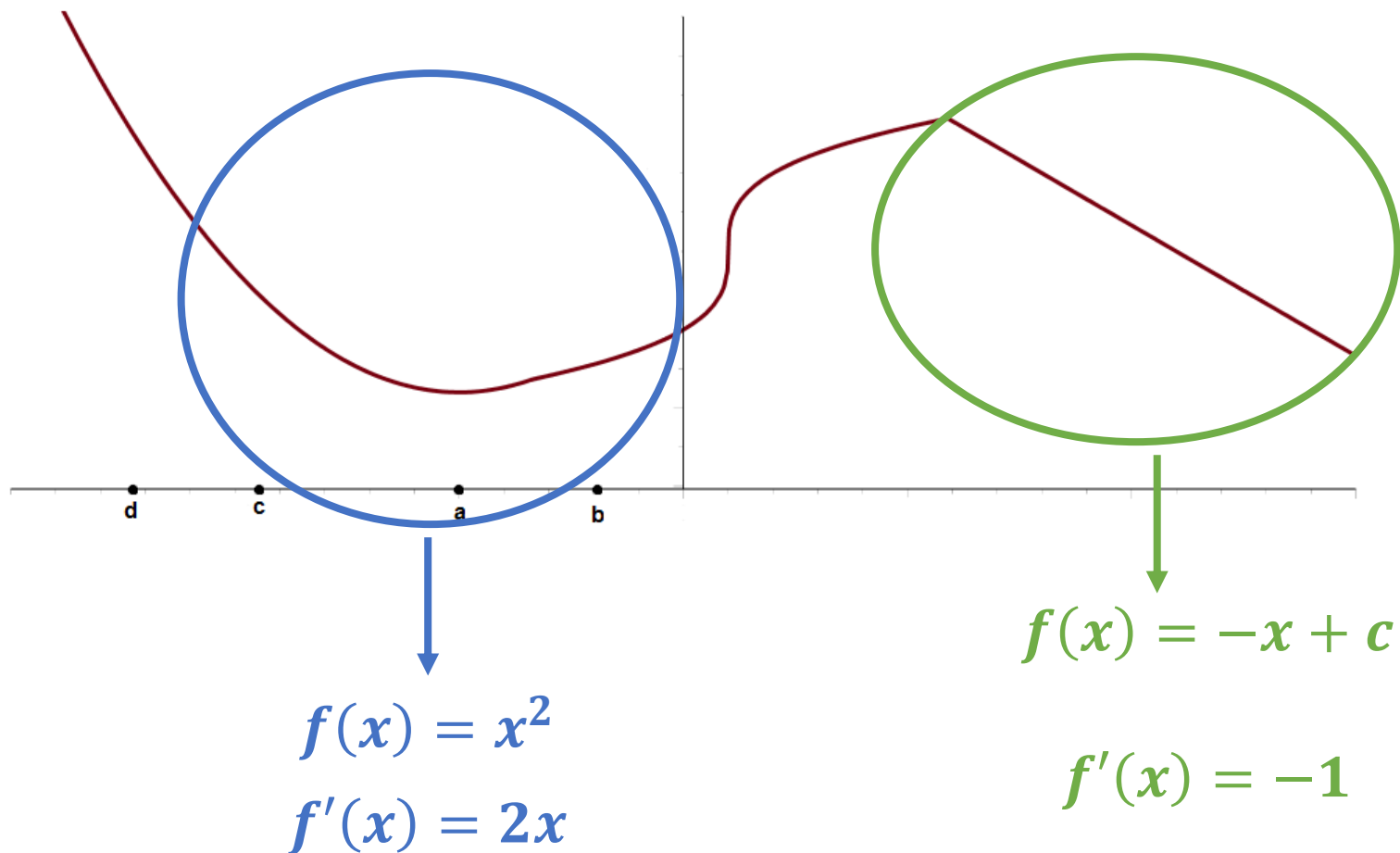
□ Potíže studentů při učení pojmu derivace

- Pro studenty je obtížné nakreslit graf derivace, když mají pouze graf f .



❑ Potíže studentů při učení pojmu derivace

- Při kreslení grafu derivace (f') mají studenti často pocit, že nutně potřebují algebraické vyjádření funkce (f) (Garcia-Garcia & Dolores-Flores, 2021).



□ **Koncept/Pojem derivace v různých reprezentacích:**

Můžeme zvážit různé reprezentace konceptu derivace:

- Algebraická reprezentace [Symbolická reprezentace]
- Grafická reprezentace
- Numerická reprezentace

➤ **Algebraická reprezentace [Symbolická reprezentace]**

Existují tři různé algebraické reprezentace pro formální definici derivace funkce f v bodě, které se používají k výpočtu derivace v x_0 :

$$f'(x_0) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Rozlišujeme mezi těmito třemi definicemi derivace v určitém bodě a každou považujeme za samostatnou realizaci, protože mnoho studentů čelí problémům při uvědomění si, jak spolu tyto tři reprezentace souvisí.

➤ Grafická reprezentace [Geometrická reprezentace]

- ❖ Kontrola existence derivace v bodě přiblížením [pomocí zoomování] grafu funkce v okolí bodu.

<https://www.geogebra.org/graphing?lang=en>

- ❖ $f(x) = x^2$ $A[0,0]$ ✓

- ❖ $g(x) = \sin(x)$ $B[1, \sin(1)]$ ✓

- ❖ $h(x) = |x|$ $C[0,0]$ ✗

➤ Grafická reprezentace

❖ Aproximace derivace v bodě pomocí směrnic sečen.

<https://www.geogebra.org/m/ykzk8YgF>

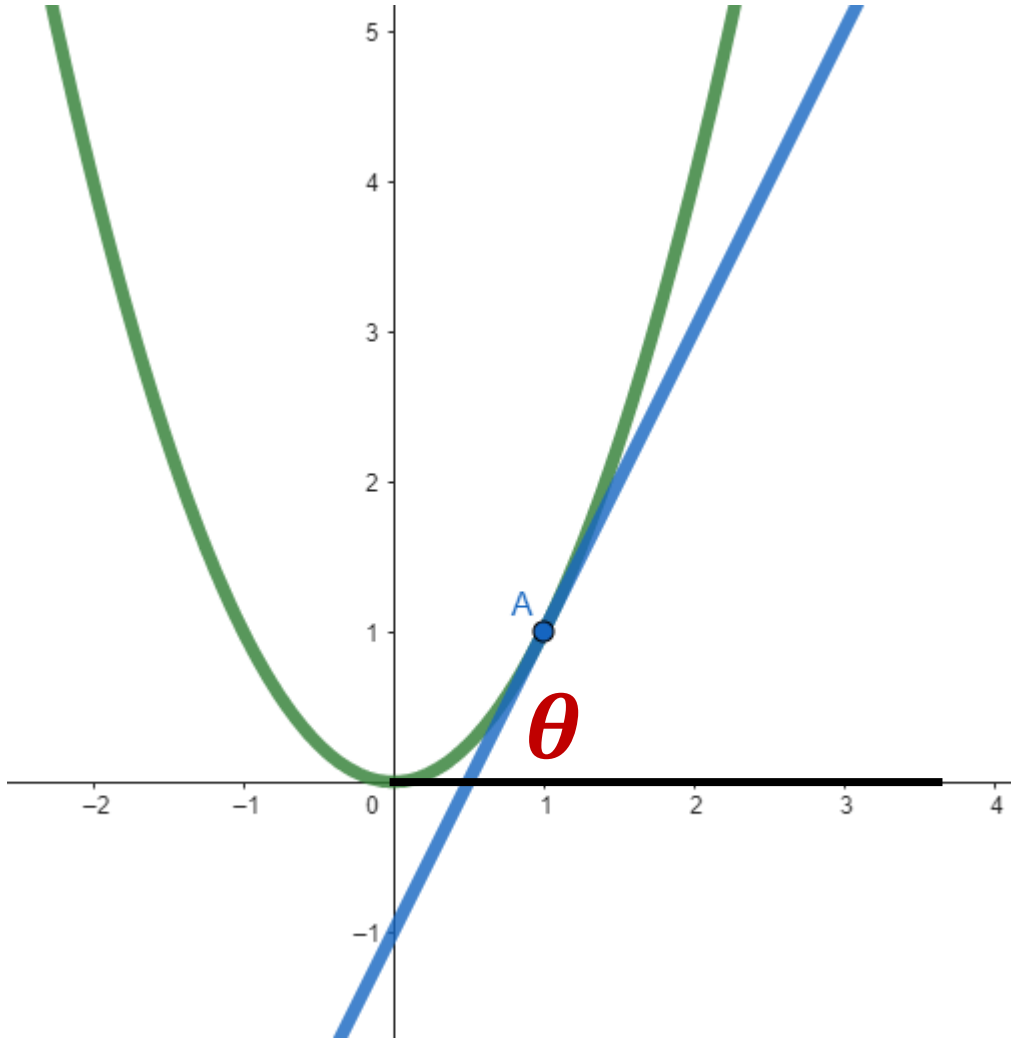
➤ **Grafická reprezentace**

- ❖ Výpočet derivace v bodě pomocí limity směrnic sečen.

<https://www.geogebra.org/m/ykzk8YgF>

➤ Grafická reprezentace

- ❖ Výpočet derivace v bodě pomocí $\tan \theta$ (kde θ je úhel mezi tečnou a kladným směrem osy x).



➤ Numerická reprezentace

❖ Aproximace derivace v bodě x_0 pomocí diferenčního podílu.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

ale bez použití formálního postupu $h \rightarrow 0$

➤ Numerická reprezentace

Aproximace derivace v bodě x_0 pomocí diferenčního podílu.

x	3	3,2
$f(x)$	28	33,768

$f'(3) \approx ?$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$


$$f'(3) \approx \frac{f(3,2) - f(3)}{3,2 - 3} = \frac{33,768 - 28}{0,2} = 28,84$$

$$f'(3) \approx 28,84$$

Numerická reprezentace

Aproximace derivace v bodě pomocí tabulky hodnot pro diferencní podíl, když se h blíží nule.

x	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	$f'(2) \approx ?$
$f(x)$	4,59	5,04	5,51	6	6,51	7,04	7,59	
$x - 2$	-0,3	-0,2	-0,1		0,1	0,2	0,3	
$f(x) - f(2)$	-1,41	-0,96	-0,49		0,51	1,04	1,59	
$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	4,7	4,8	4,9		5,1	5,2	5,3	


5

Pomocí hodnot spojité funkce $f(x)$ uvedených v tabulce aproximujte hodnotu její derivace v bodě $x = 2$.

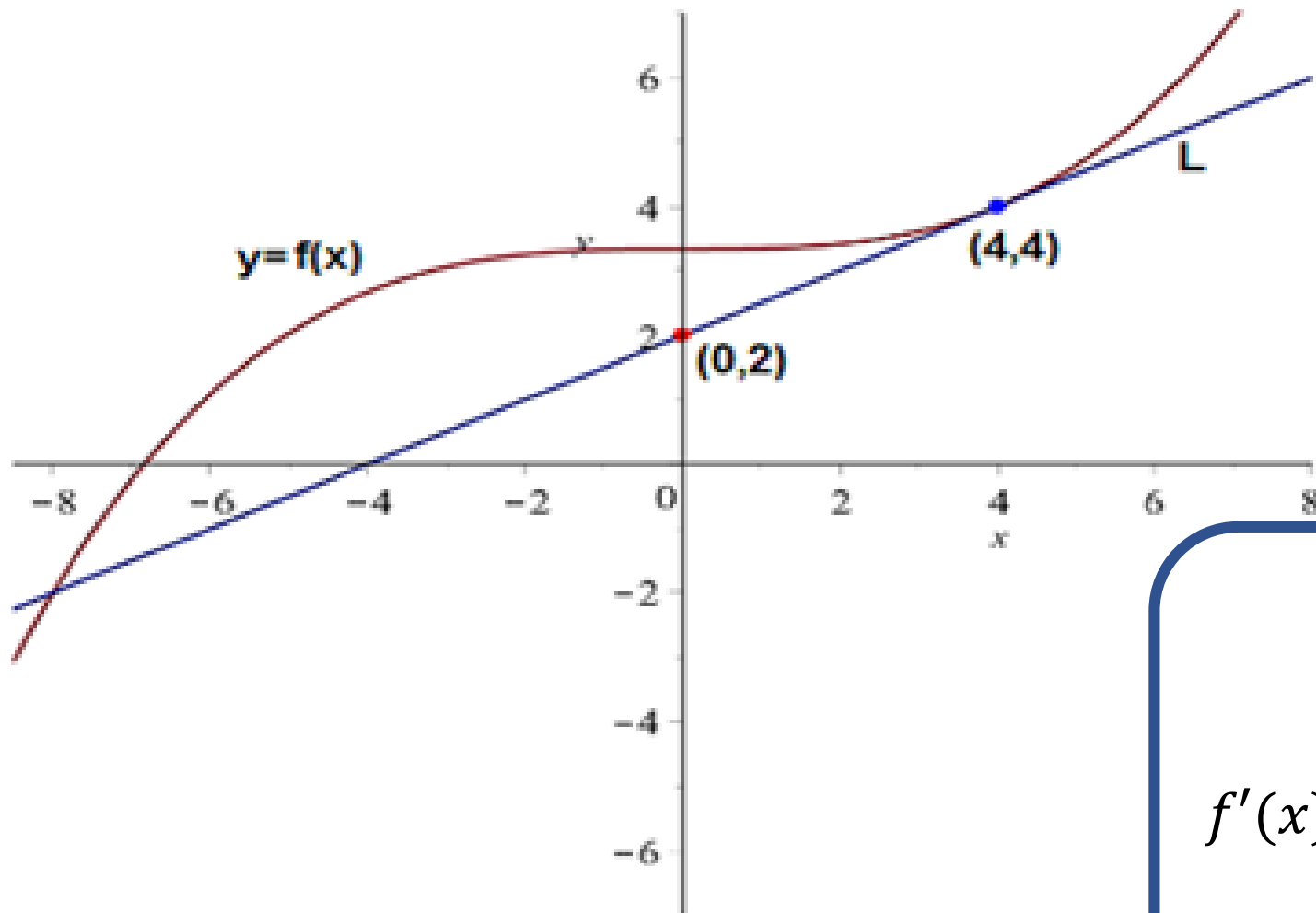
x	1,9	1,99	1,999	2	2,0001	2,001	2,1
$f(x)$	3,61	3,9601	3,996001	4	4,00040001	4,004001	4,41

$$f'(2) = ?$$

$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	3,9	3,99	3,999		4,0001	4,001	4,1

$$f'(2) = 4$$

Předpokládejte, že přímka L je tečnou ke grafu funkce f v bodě $[4; 4]$, jak je naznačeno na obrázku. Najděte $f'(4)$.



$$[4; 4] \quad [0; 2]$$

$$m_L = \frac{4-2}{4-0} = \frac{1}{2}$$

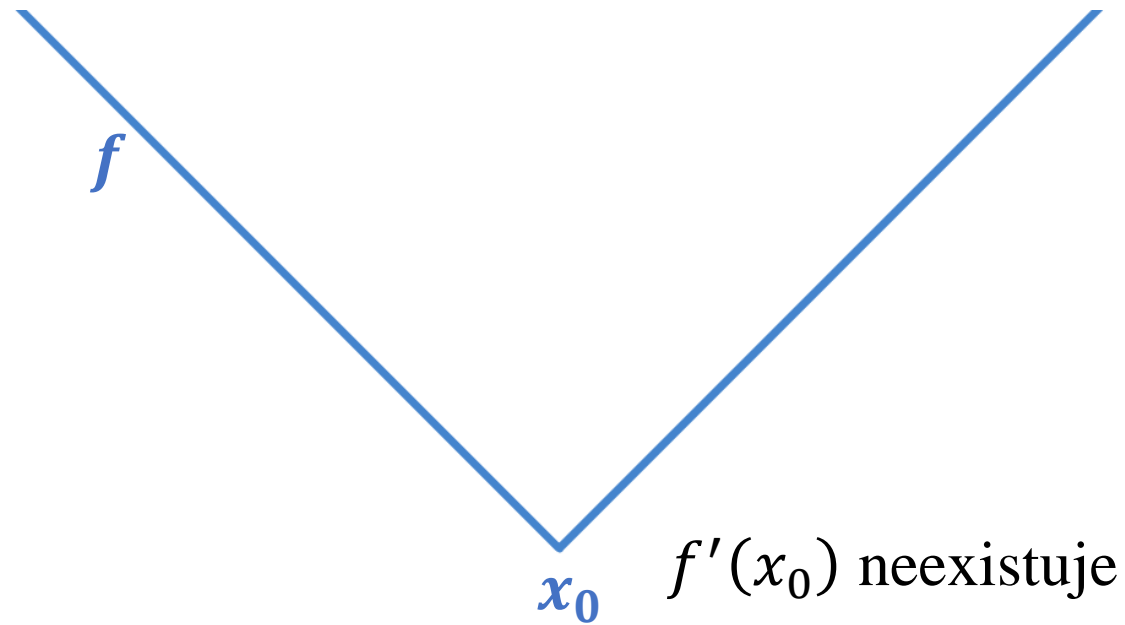
$$y = \frac{1}{2}x + 2$$
$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right)' = \frac{1}{2}$$
$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

Pravda nebo nepravda?

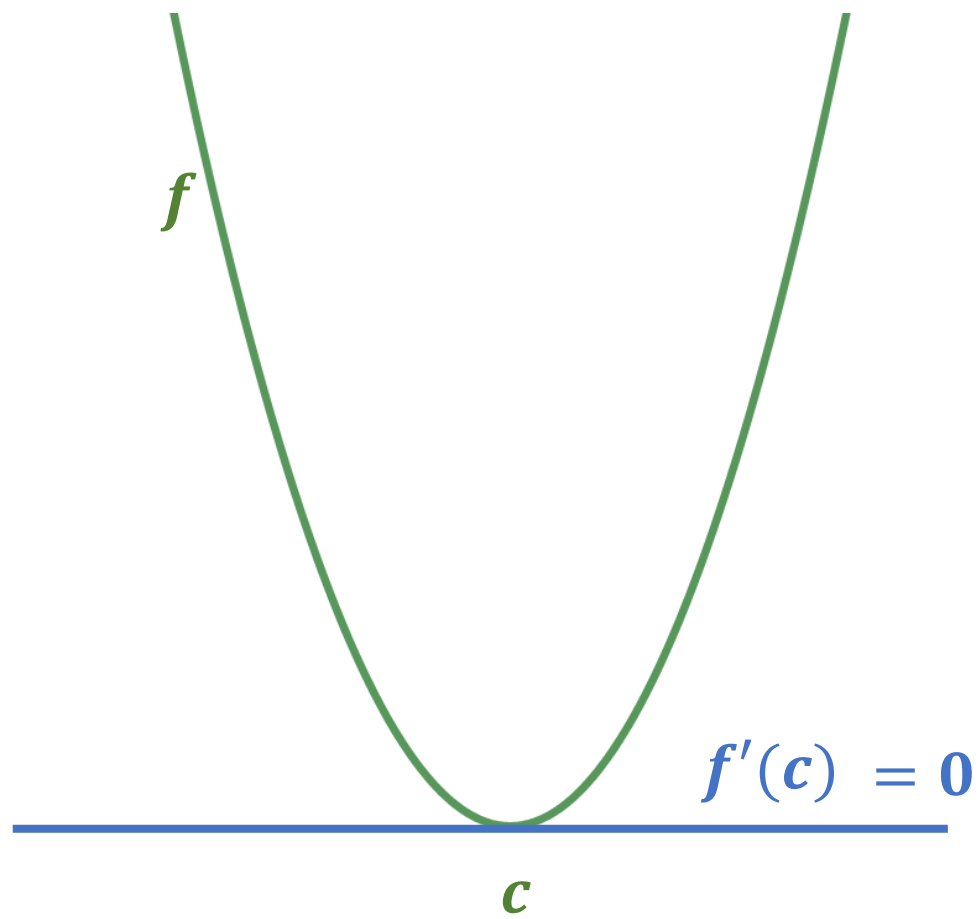
Výrok 1:

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Jestliže je $(x_0, f(x_0))$ minimální bod, pak $f'(x_0) = 0$.

Pravda / Nepravda

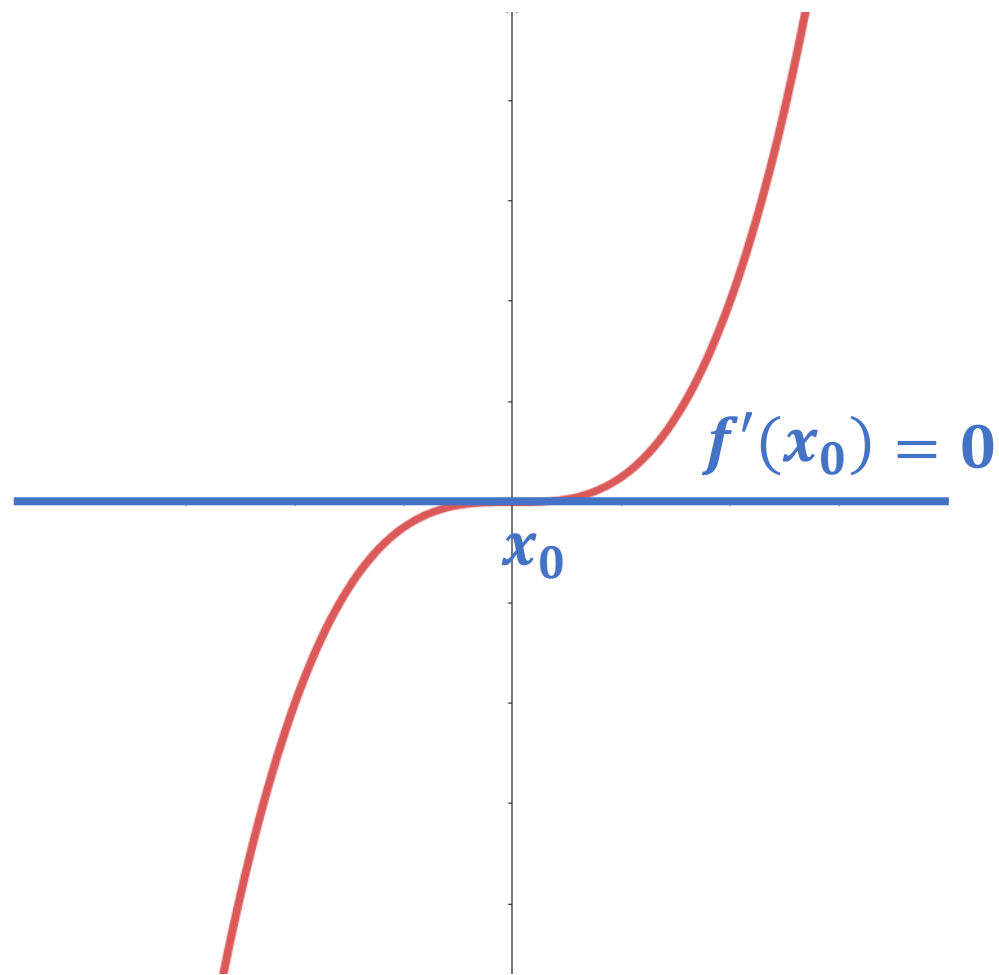


Věta: Necht' má funkce f v bodě c lokální extrém. Existuje-li $f'(c)$, pak $f'(c) = 0$.



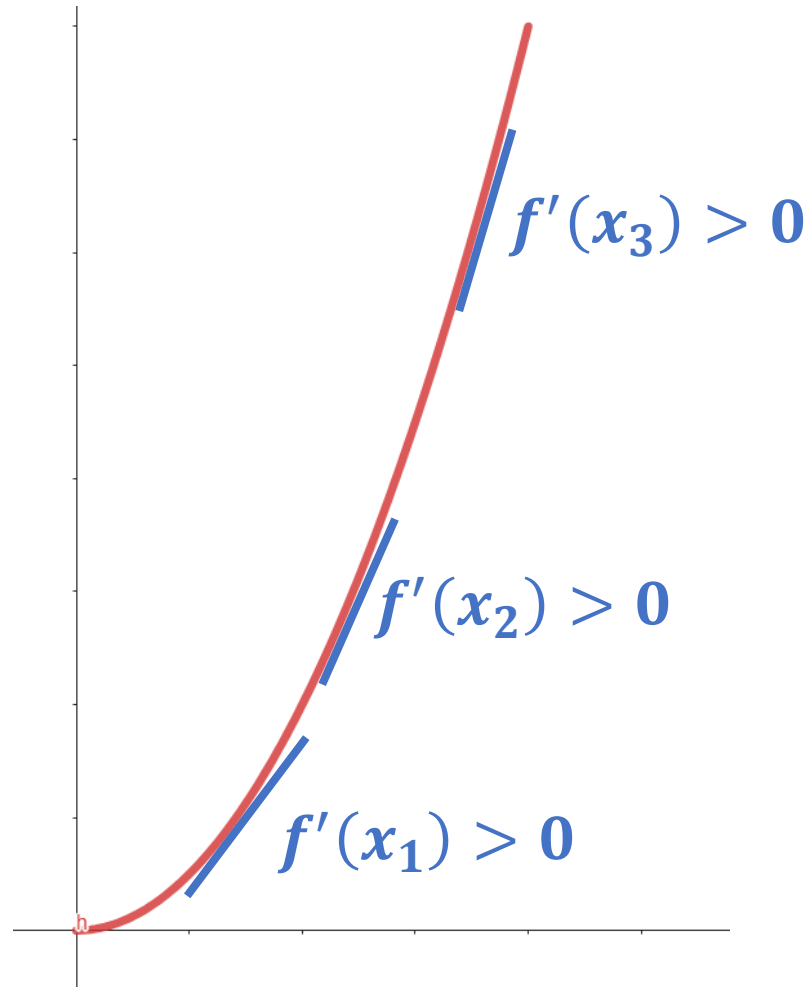
Výrok 2: Necht' $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce. Jestliže $f'(x_0) = 0$, pak $(x_0, f(x_0))$ je minimální nebo maximální bod.

Pravda / Nepravda



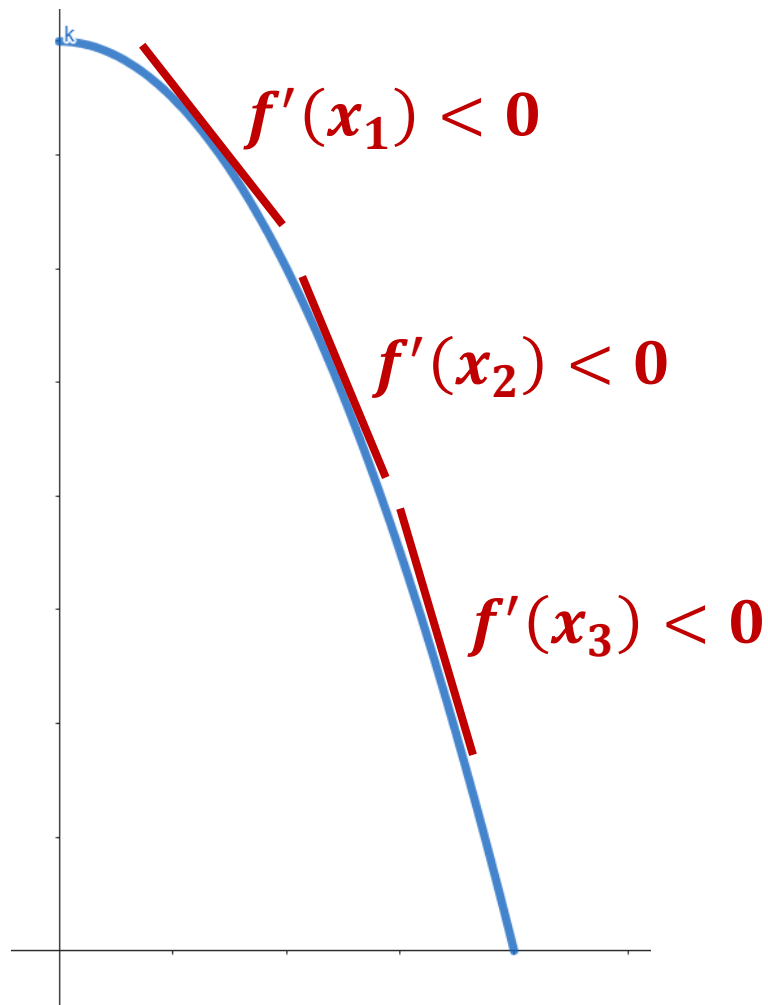
Nechť je funkce f spojitá na interval $[a, b]$ a necht' $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in (a, b)$. Pak platí:

$$\forall x \in (a, b): f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ je rostoucí na } (a, b)$$

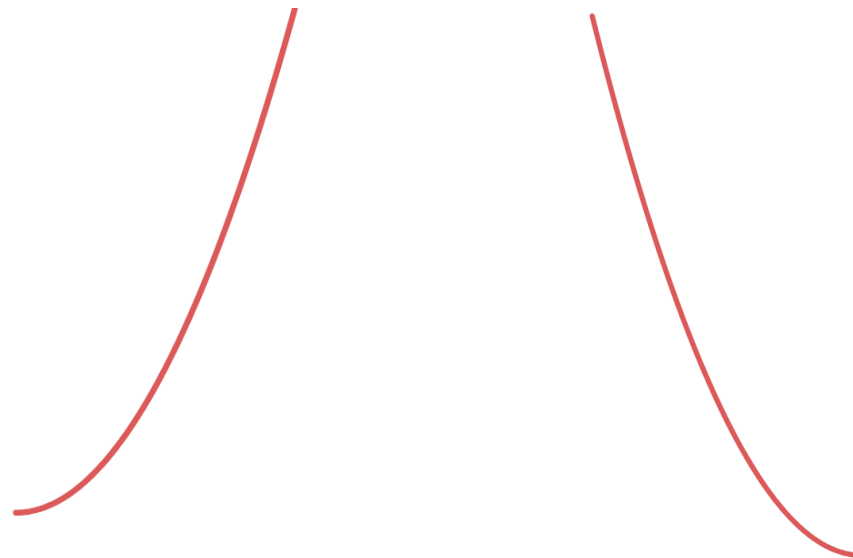
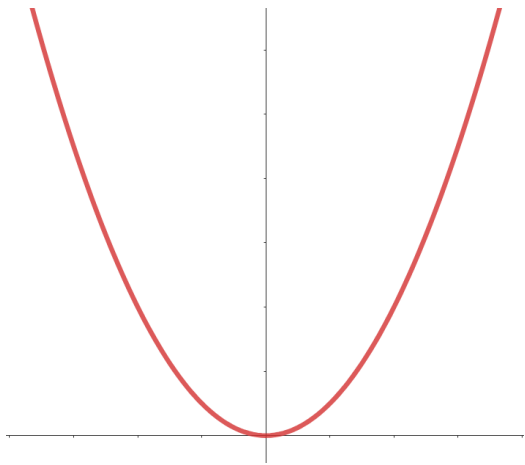


Necht' je funkce f spojitá na interval $[a, b]$ a necht' $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in (a, b)$. Pak platí:

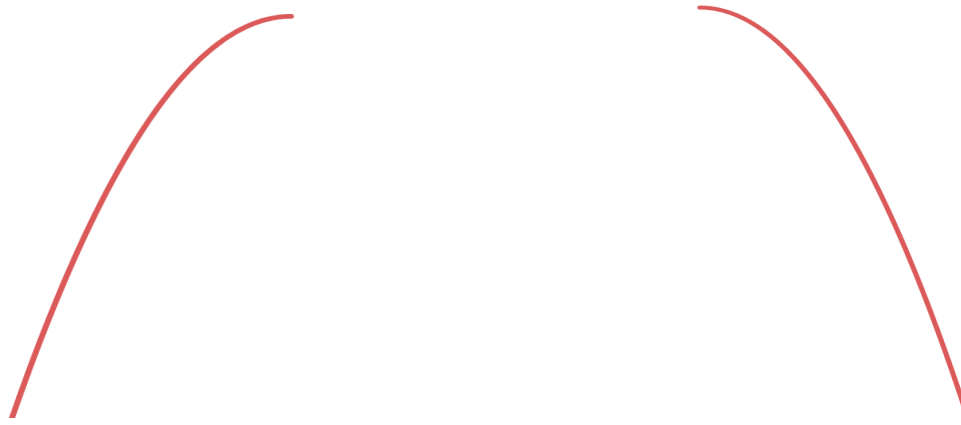
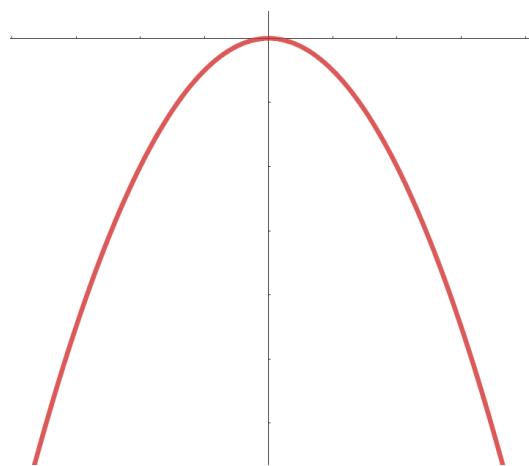
$$\forall x \in (a, b): f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ je klesající na } (a, b)$$

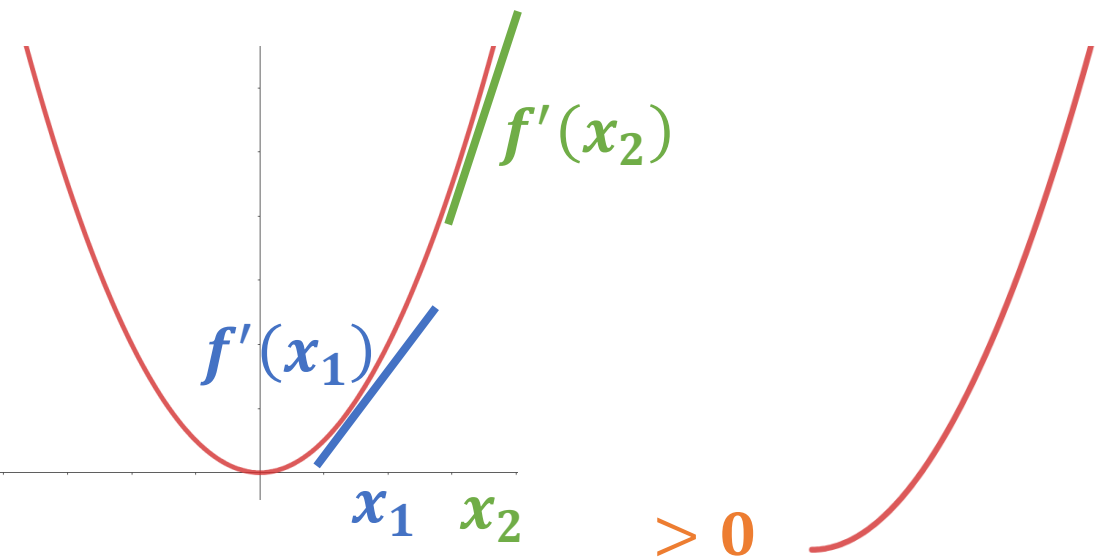


□ Je-li f spojitá na intervalu I a $f''(x) > 0$ pro všechny vnitřní body x intervalu I , pak f je konvexní na I .

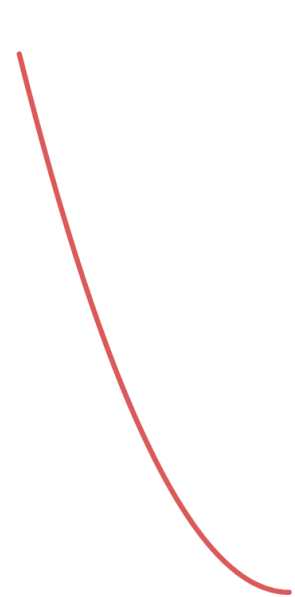


Je-li f spojitá na intervalu I a $f''(x) < 0$ pro všechny vnitřní body x intervalu I , pak f je konkávní na I .



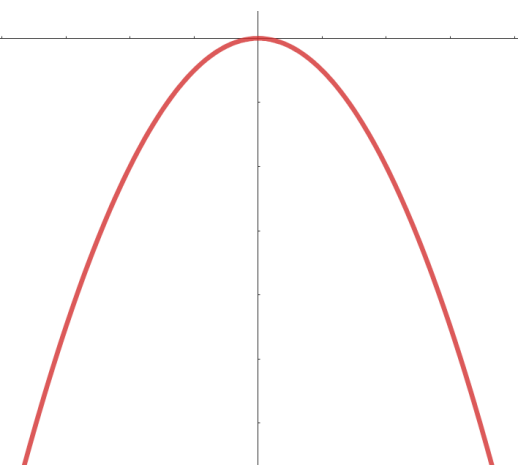


$$f''(x) \approx \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$



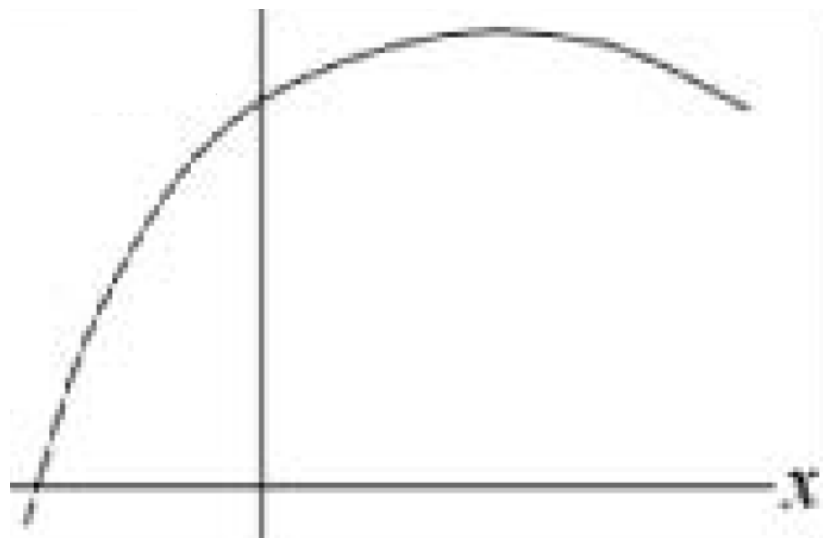
$$f''(x) > 0$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

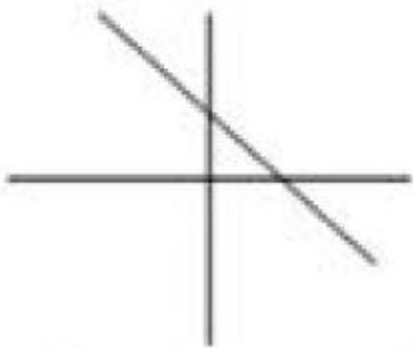


$$f''(x) < 0$$

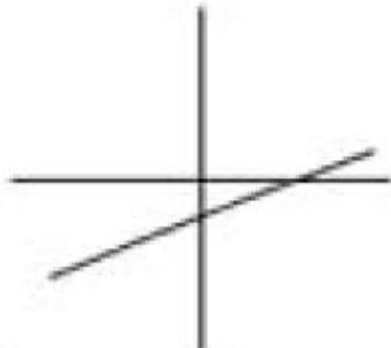
Graf funkce f je uveden níže. Která volba z (a) až (e) by mohla být grafem f' ?



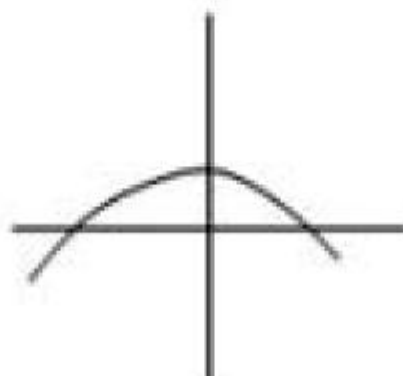
(a) ✓



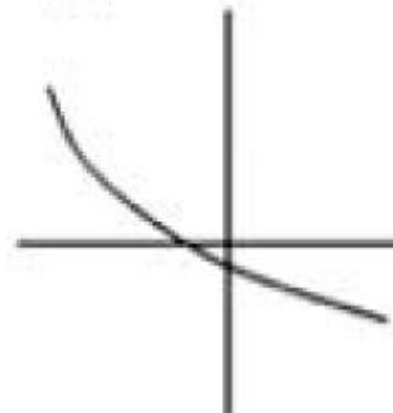
(b)



(c)



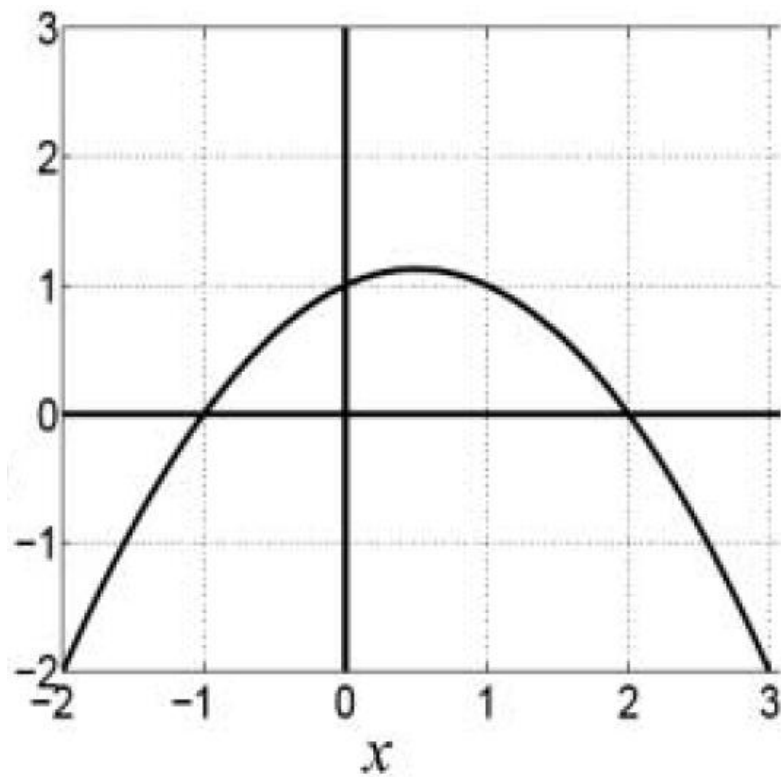
(d)

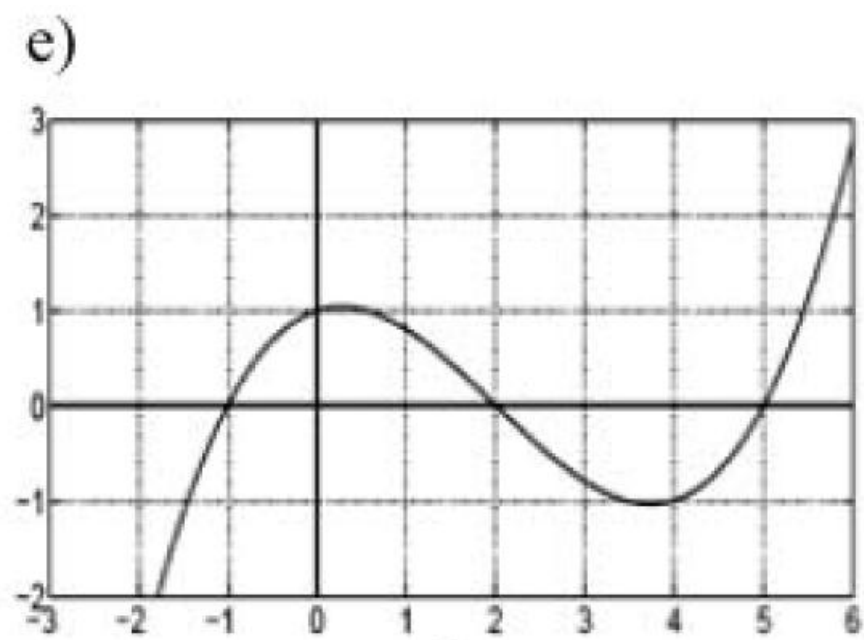
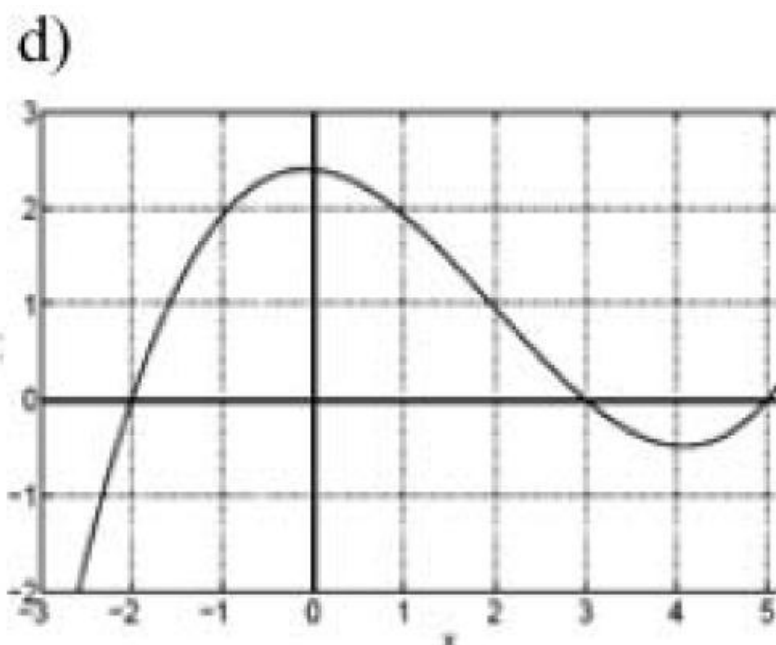
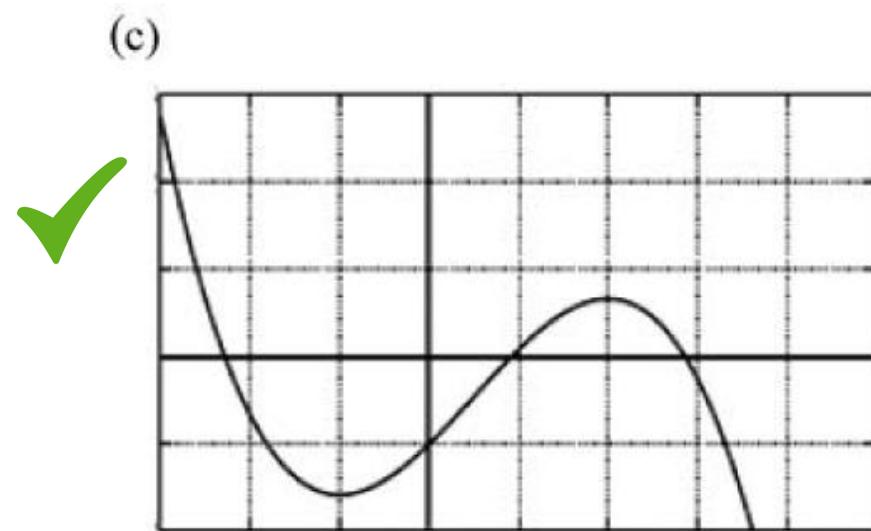
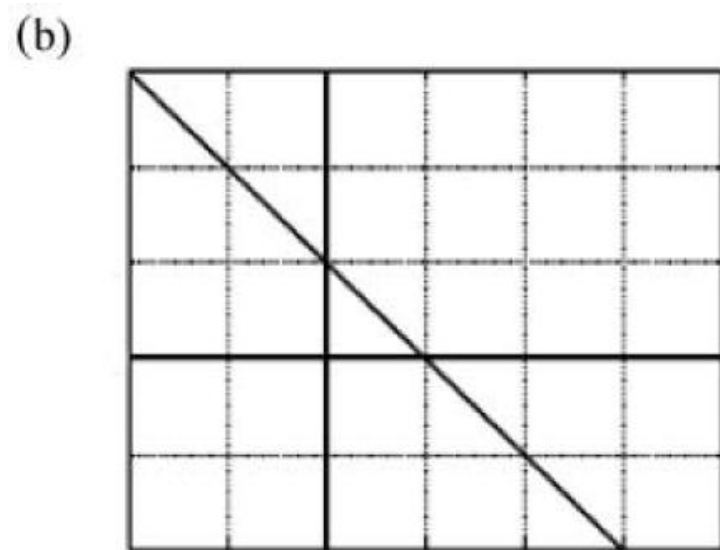
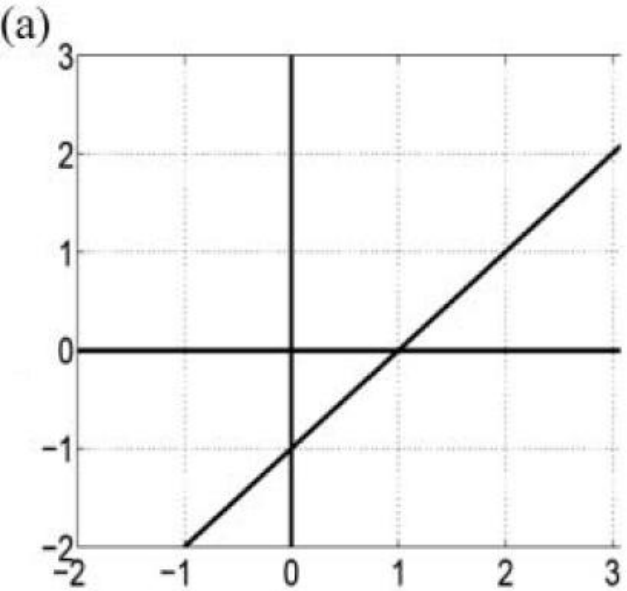


(e)



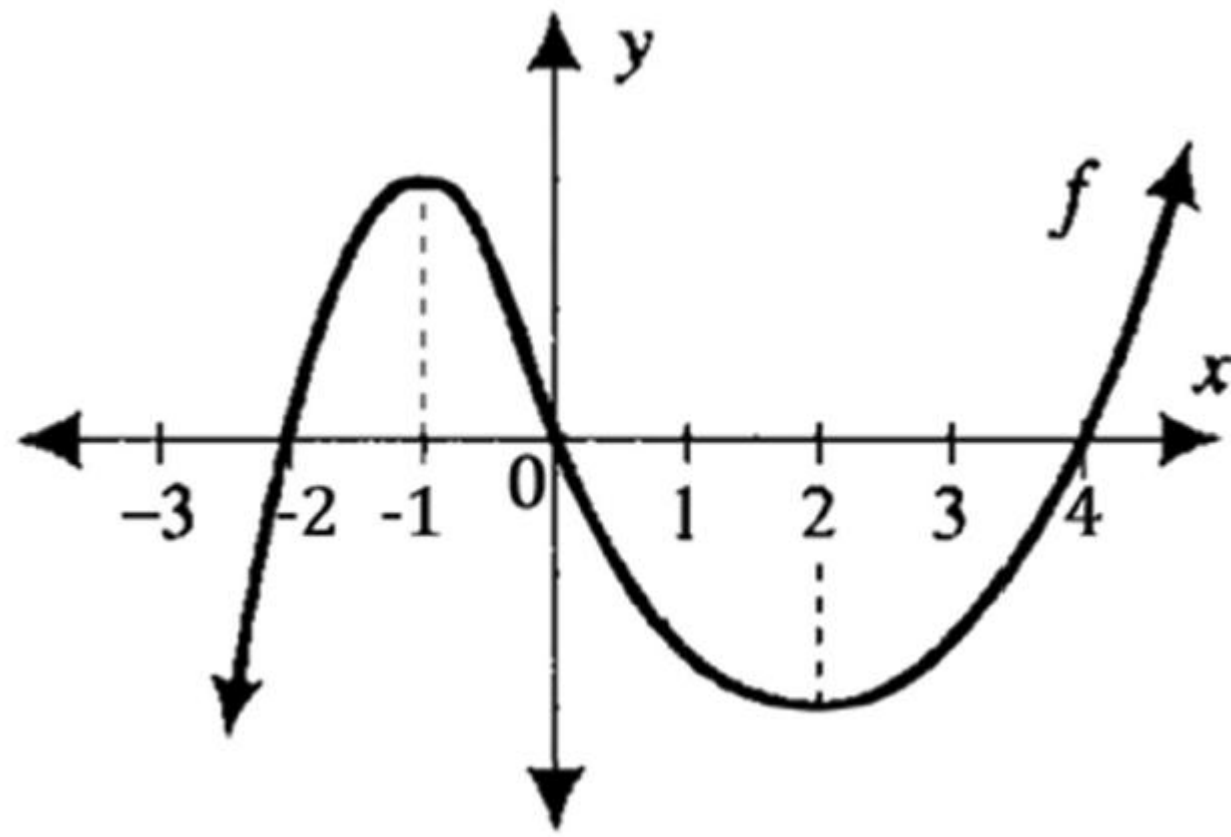
Graf f' je uveden níže. Která volba (a) až (e) by mohla být grafem f ?





Domácí úkol. Vzhledem k zobrazenému grafu funkce f určete:

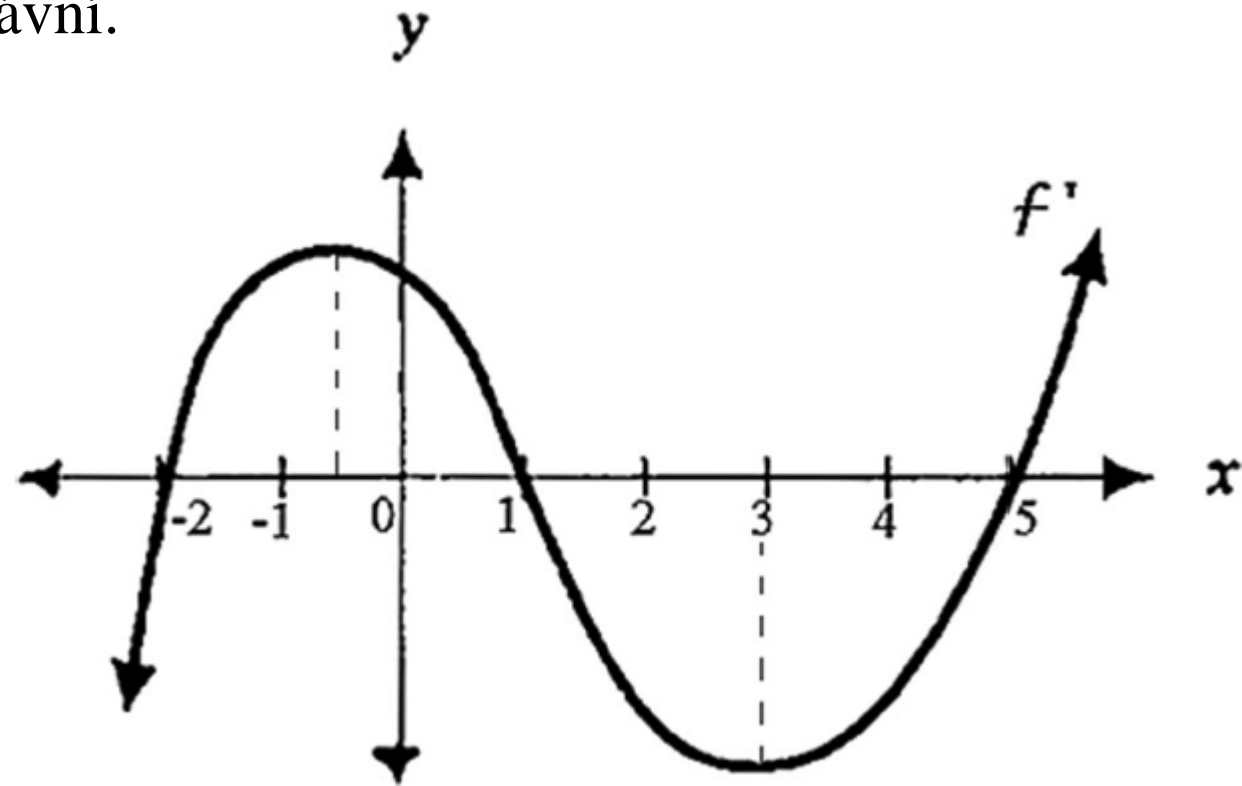
- Intervaly, na kterých f je rostoucí, resp. klesající.
- V jakém bodě má funkce f lokální maximum, resp. lokální minimum.
- Souřadnice inflexních bodů funkce f .
- V jakém intervalu je funkce f konkávní, resp. konvexní?
- Vytvořte možný graf derivace f' .



Domácí úkol. Vzhledem k zobrazenému grafu derivace f' nakreslete možný graf funkce f .

Vysvětlete svou odpověď a také určete:

- Intervaly, na kterých f je rostoucí, nebo klesající.
- Maximální nebo minimální hodnoty f .
- Inflexní body.
- Intervaly, na kterých je f konvexní, nebo konkávní.



Nakreslete graf funkce f , která splňuje následující podmínky:

funkce f je spojitá

$$f(0) = 2, f'(-2) = f'(3) = 0, \text{ a } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$$

$$f'(x) > 0 \text{ když } -4 < x < -2, \text{ a když } -2 < x < 3,$$

$$f'(x) < 0 \text{ když } x < -4, \text{ a když } x > 3,$$

$$f''(x) < 0 \text{ když } x < -4, \text{ když } -4 < x < -2, \text{ a když } 0 < x < 5,$$

$$f''(x) > 0 \text{ když } -2 < x < 0, \text{ a když } x > 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$$

References

- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–430.
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557–578.
- Borji, V., & Martínez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(2), 163–179. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09991-y>
- Haghjoo, S., Radmehr, F., & Reyhani, E. (2023). Analyzing the written discourse in calculus textbooks over 42 years: The case of primary objects, concrete discursive objects, and a realization tree of the derivative at a point. *Educational Studies in Mathematics*, *112*, 73–102. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10168-y>
- Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics*, *89*(2), 233–250.
- Radmehr, F., & Turgut, M. (2024). *Learning more about derivative: Leveraging online resources for varied realizations*. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(4), 589–604. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01564-0>
- Stewart, J. (2010). *Calculus (7th ed.)*. Belmont, CA: Brooks/Cole.

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz