



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #4

Vahid Borji & Petra Surynková

Goniometrické funkce a jejich inverze

$\sin x$

$\cos x$

$\arcsin$

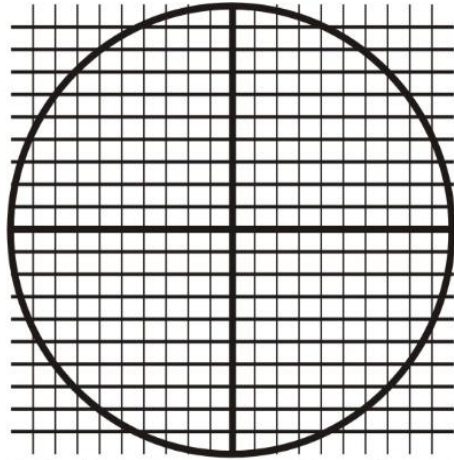
$\arccos$

Konstrukce funkcí sinus a kosinus na základě myšlenek jednotkové kružnice:

- 1) Proces $t \rightarrow P(t)$
- 2) Proces projekce

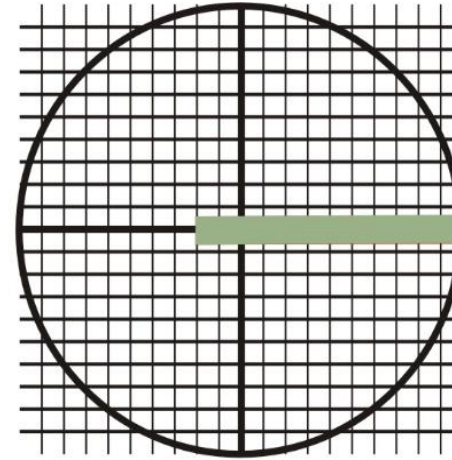
$$t \rightarrow P(t)$$

$$1,2 \rightarrow P(1,2)$$

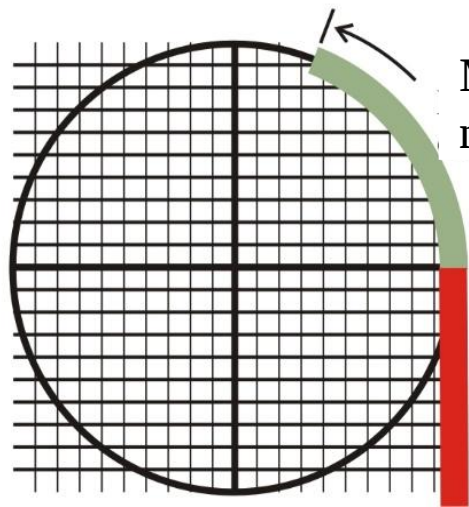


Jednotková kružnice v měřítku 1 poloměr. Každý čtverec má strany o délce 1/10 poloměru.

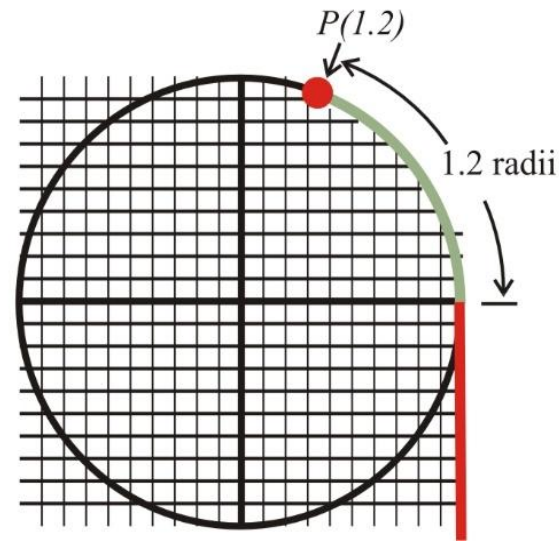
Stuha 



Změřte 1,2 radiánů pomocí stuhy

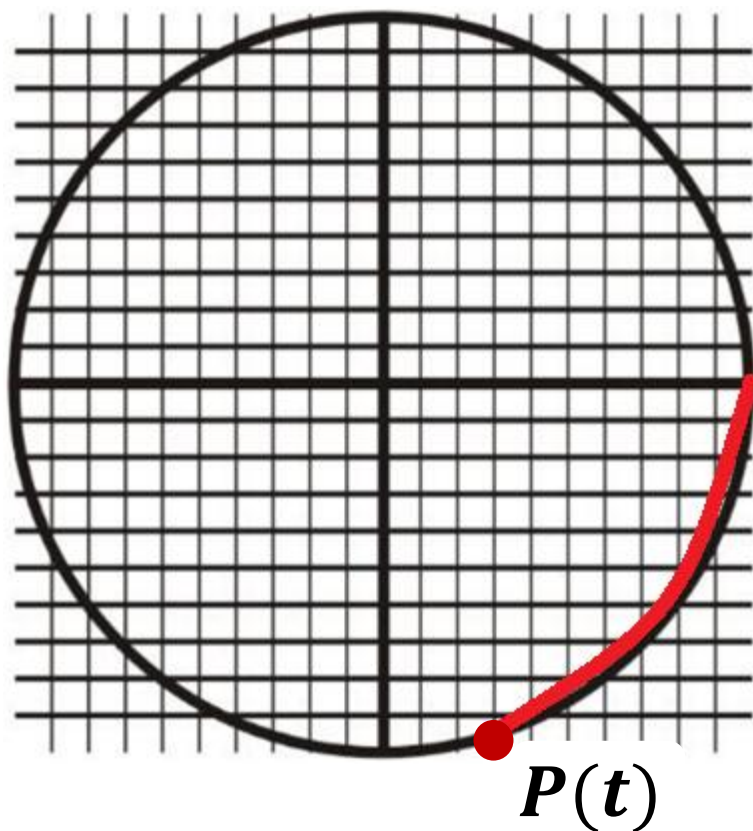


Míra 1,2 radiánů na stuze

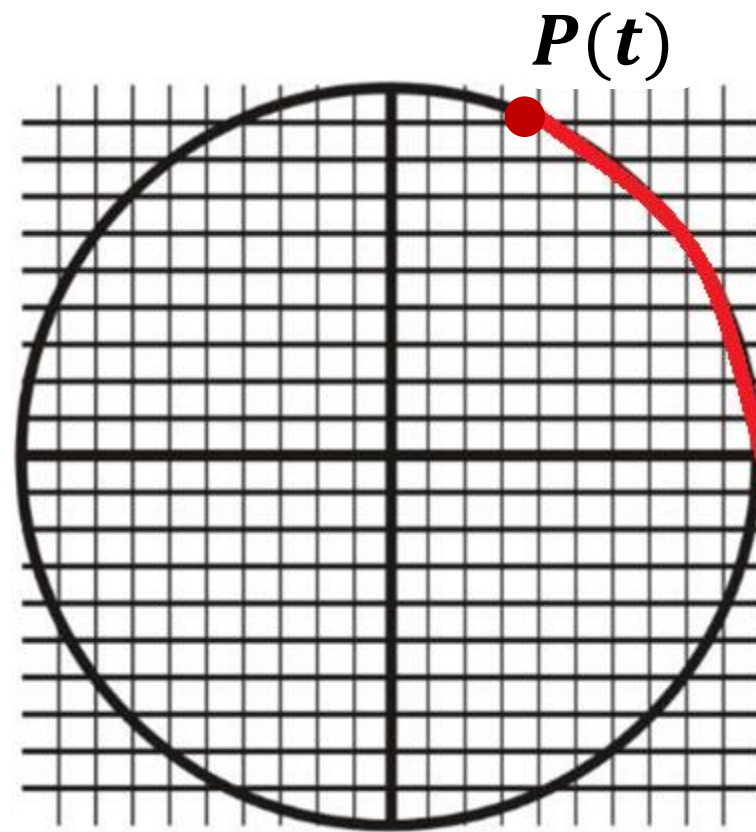


Míra = measure

- Pokud $t \geq 0$, oblouk se měří **proti směru hodinových ručiček** a pokud $t < 0$, oblouk se měří **ve směru hodinových ručiček**. Bod, ve kterém skončíte, je $P(t)$.



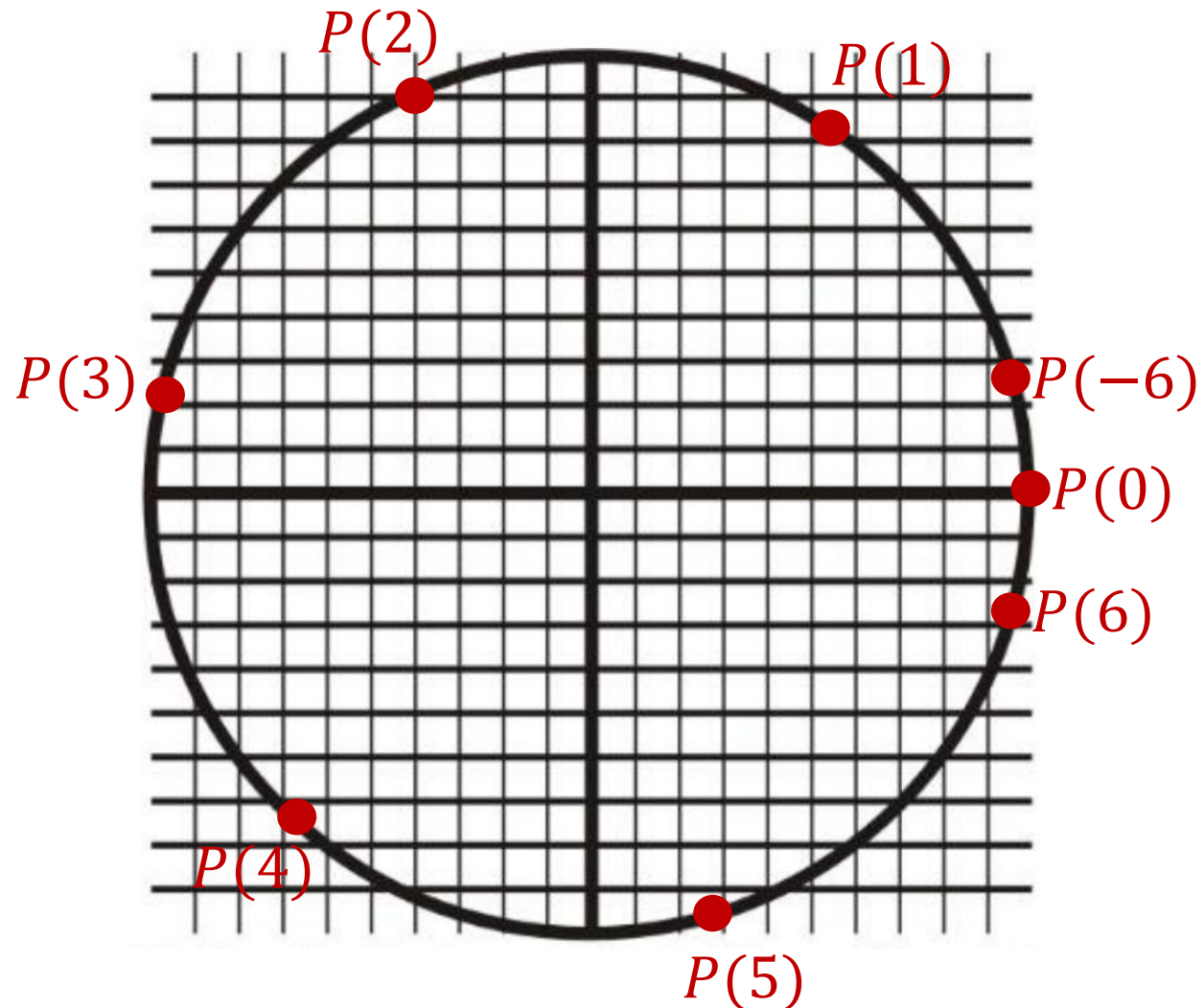
Pokud $t < 0$



**Pokud
 $t \geq 0$**

2. V každém z následujících problémů, pomocí kružnice a kousku stuhy co nejpřesněji najděte bod $P(t)$ na kružnici určené daným číslem t (v jednotkách radiánů). (Nápověda: všimněte si, že každý čtverec sítě má strany, které měří $1/10$ poloměru.)

- | | |
|--------------|-----------------|
| a) 0 radiánů | b) 1 radián |
| c) 2 radiány | d) 3 radiány |
| e) 4 radiány | f) 5 radiánů |
| g) 6 radiánů | h) -6 radiánů |

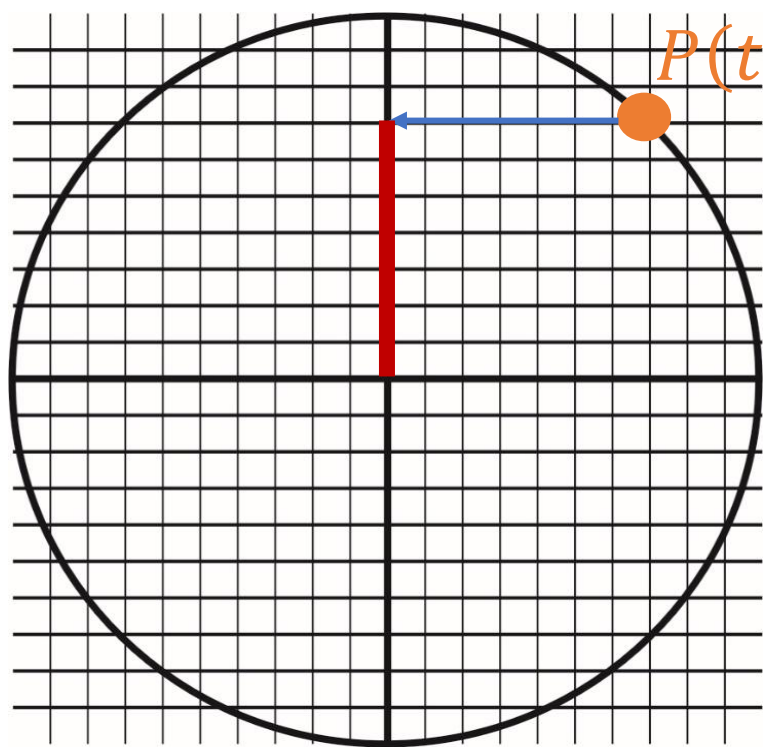


Projekce na osu y :

Nechť $P(t) = [a, b]$ je bod na kružnici se středem v počátku (předpokládejme, že a a b jsou měřeny v nějakých jednotkách [cm, mm, ...]).

Projekcí bodu $P(t) = [a, b]$ na osu y (v jednotkách poloměru) získáme zlomek $\frac{b}{r}$.

Jeho grafická reprezentace zahrnuje šipku a tmavý svislý segment:

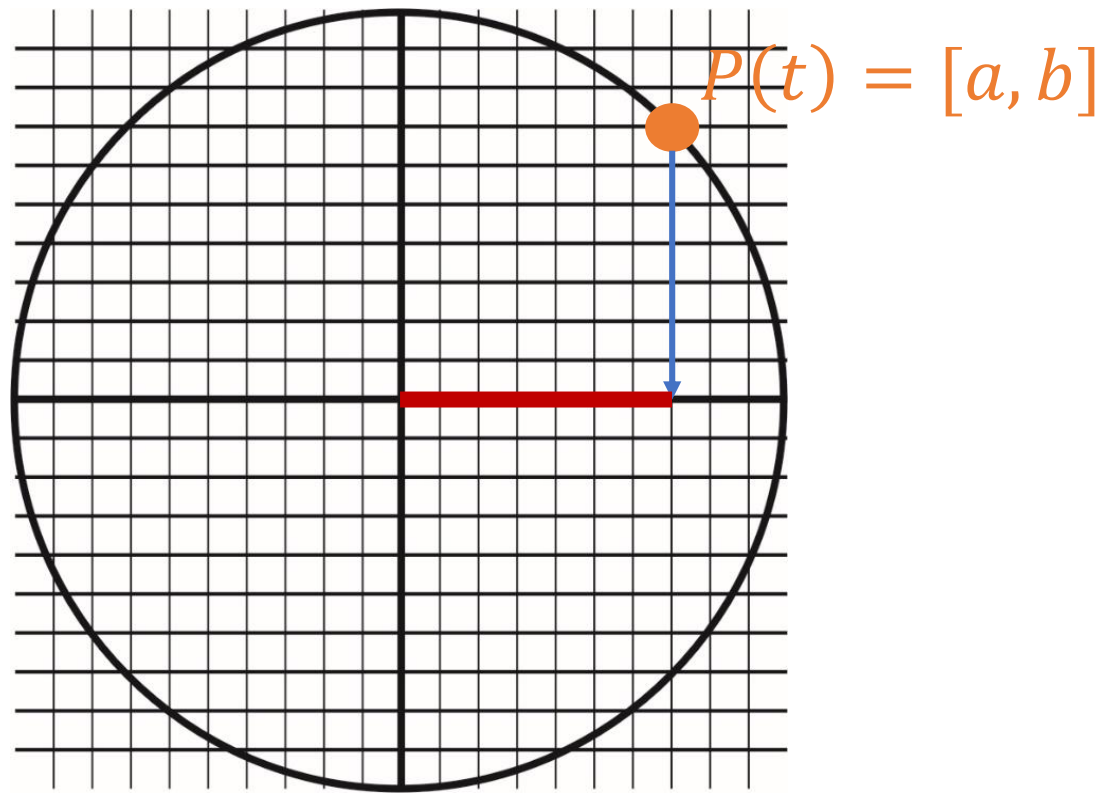


$$\text{zlomek} = \frac{b}{\text{poloměr}} = \frac{b}{r}$$

Projekce na osu x:

Projekcí na osu x získáme a/r .

$$\text{zlomek} = \frac{a}{\text{poloměr}} = \frac{a}{r}$$



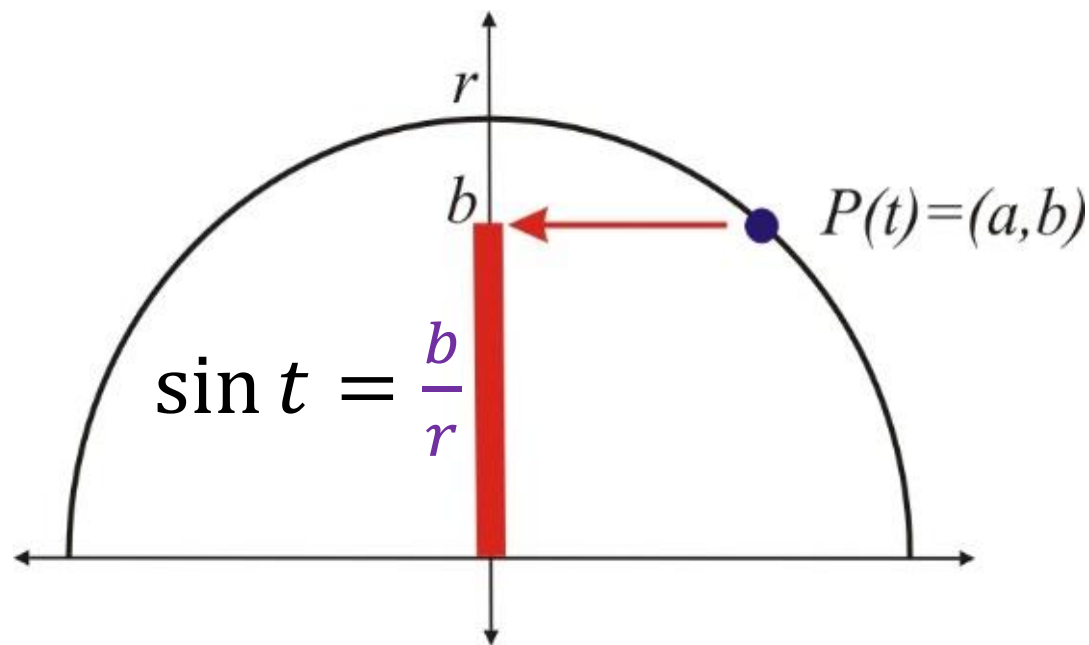
Definice sinu:

Pro libovolné reálné číslo t , je sinus t definován, $\sin(t)$, takto:

- Nejprve najděte bod $P(t)$ na kružnici.
- Potom promítněte $P(t)$ na osu y a výsledek uvedete v jednotkách poloměru.

$$D_{\sin t} = \mathbb{R}$$

$$H_{\sin t} = \langle -1, 1 \rangle$$



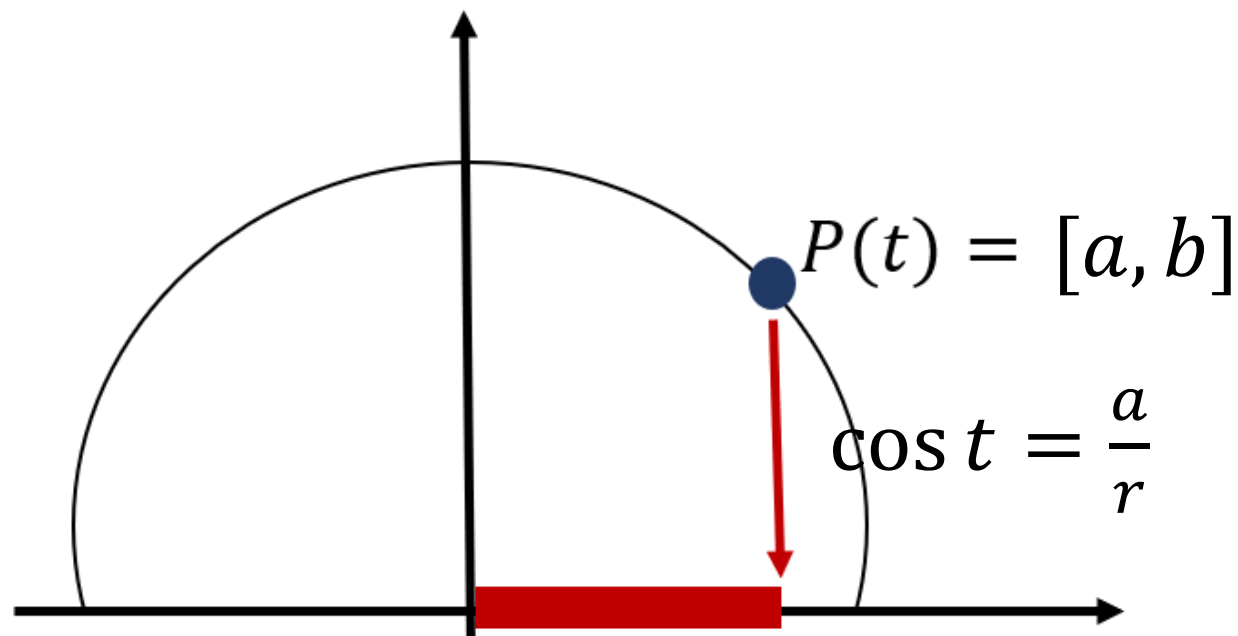
Definice kosinu

Je-li dané libovolné reálné číslo t , je kosinus t definován, **cos**(t), takto:

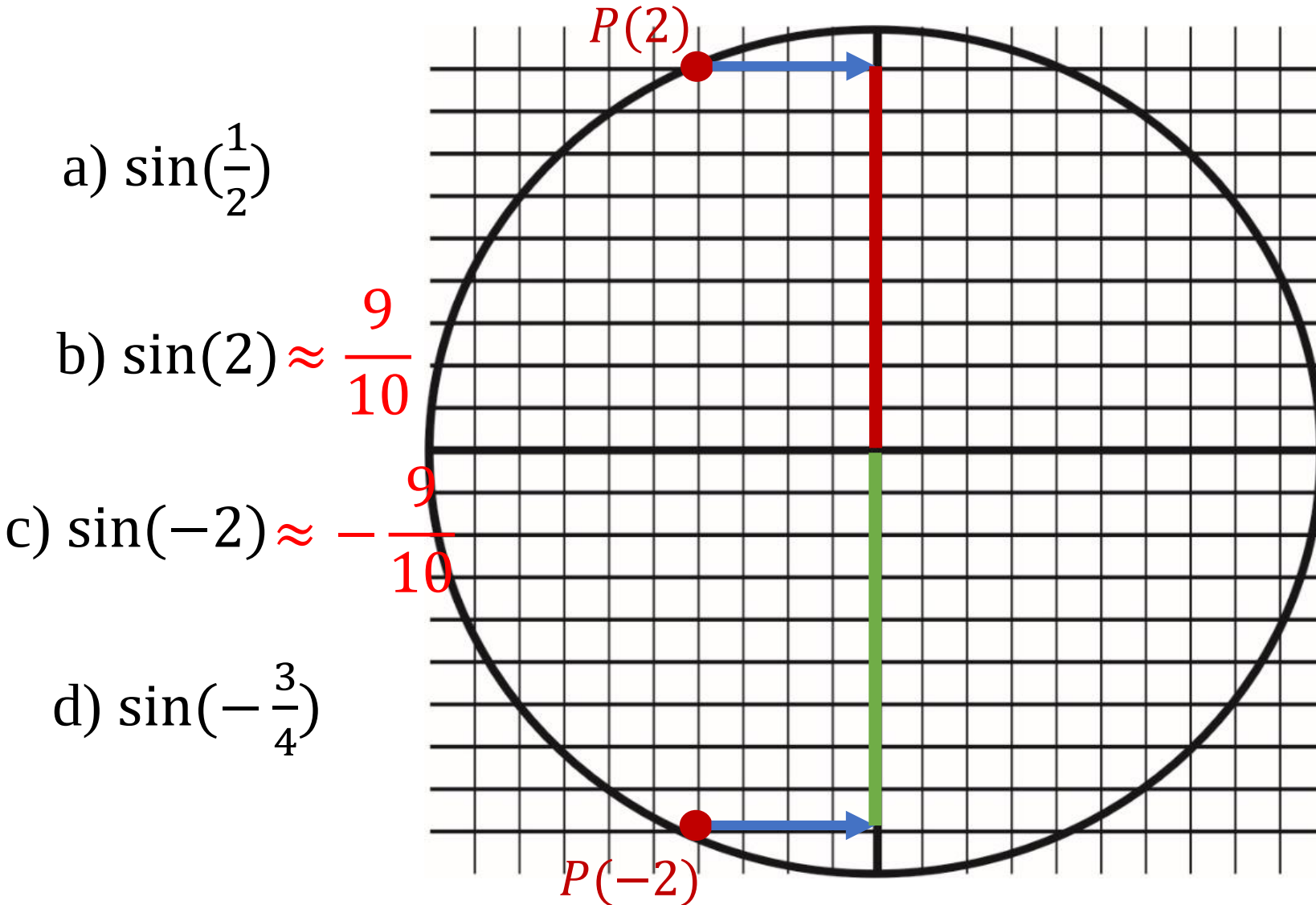
- Nejprve najděte $P(t)$ na kružnici.
- Potom promítněte $P(t)$ na osu x a výsledek uvedete v jednotkách poloměru.

$$D_{\cos t} = \mathbb{R}$$

$$R_{\cos t} = \langle -1, 1 \rangle$$



9. Pro každý z následujících případů použijte kružnici na obrázku níže a kousek stuhy k aproximaci každé z následujících hodnot sinu co nejpresněji:



a) $\sin(\frac{1}{2})$

b) $\sin(2) \approx \frac{9}{10}$

c) $\sin(-2) \approx -\frac{9}{10}$

d) $\sin(-\frac{3}{4})$

e) $\sin(0,4)$

f) $\sin(\pi - 0,4)$

g) $\sin(\pi + 0,4)$

h) $\sin(1,6)$

10. Pamatujte, že půlkružnice má délku π krát poloměr [π násobek poloměru], musíte být schopni najít následující hodnoty sinu, aniž byste museli používat kalkulačku nebo si je pamatovat. Představte si, že umístíte odpovídající bod na kružnici a poté ho promítnete na osu y .

a) $\sin(0)$

b) $\sin(\pi) = \frac{0}{10} = 0$

c) $\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{10}{10} = 1$

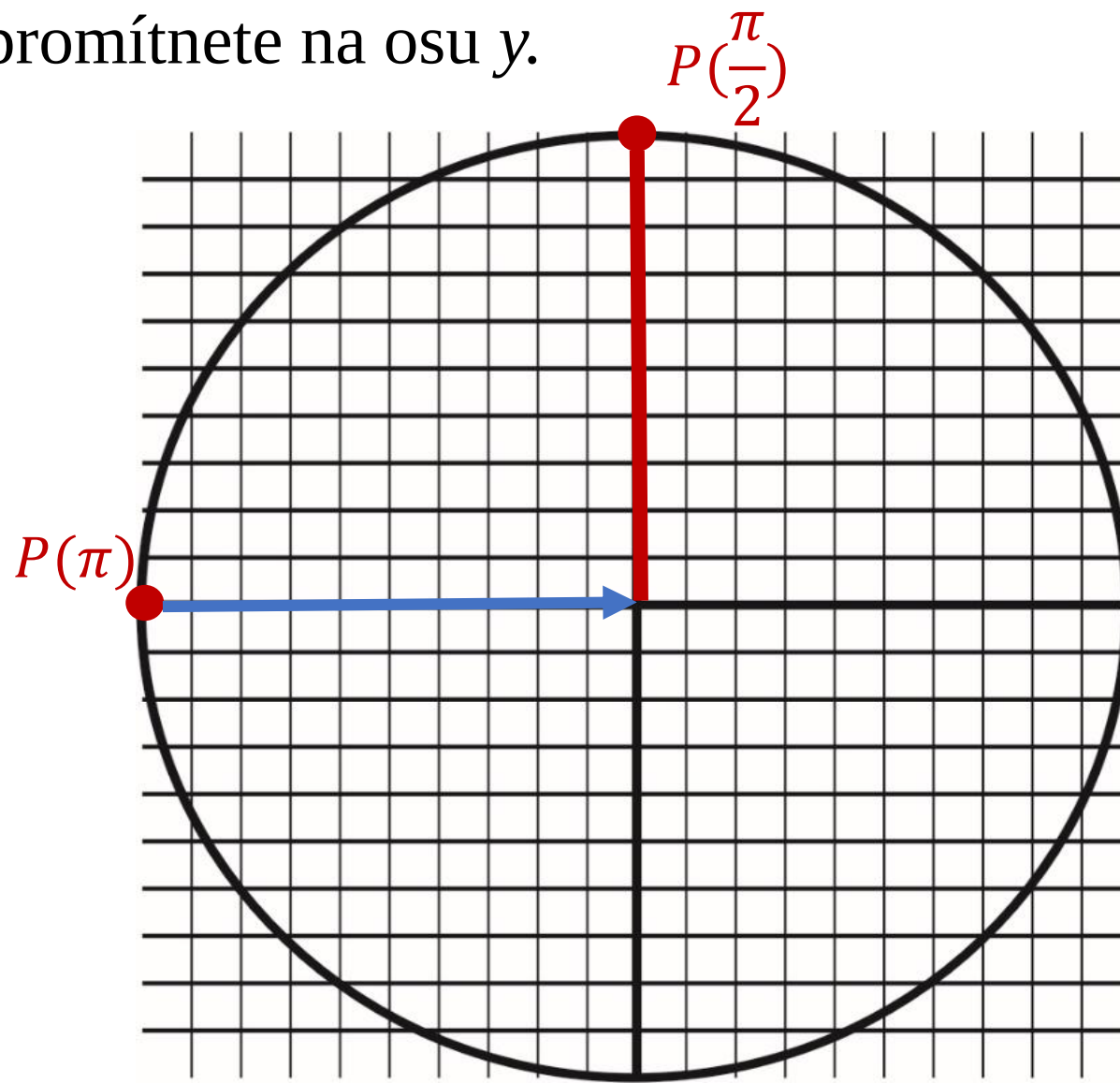
d) $\sin(-\frac{3\pi}{2})$

e) $\sin(-\frac{\pi}{2})$

f) $\sin(2\pi)$

g) $\sin(\frac{5\pi}{2})$

h) $\sin(-3\pi)$



11. Toto cvičení byste měli zvládnout bez použití kalkulačky nebo stuhy. Použijte pouze svou představivost (představte si umístění bodu a pak jeho projekci) a to, co víte o π .

Seřad'te od nejmenší po největší hodnotu:

$$\sin(1), \sin\left(\frac{1}{10}\right), \sin(3), \sin(-4), \sin(4), \sin(6)$$

$$\sin(4) < \sin(6) < \sin\left(\frac{1}{10}\right) < \sin(3) < \sin(-4) < \sin(1)$$

$$-0,7 < -0,2 < 0,1 < 0,14 < 0,75 < 0,84$$

12. Pro každý z následujících případů použijte kružnici na obrázku níže a kousek stuhky k aproximaci každé z následujících hodnot kosinu co nejpřesněji:

a) $\cos(\frac{1}{2})$

b) $\cos(2)$

c) $\cos(-2)$

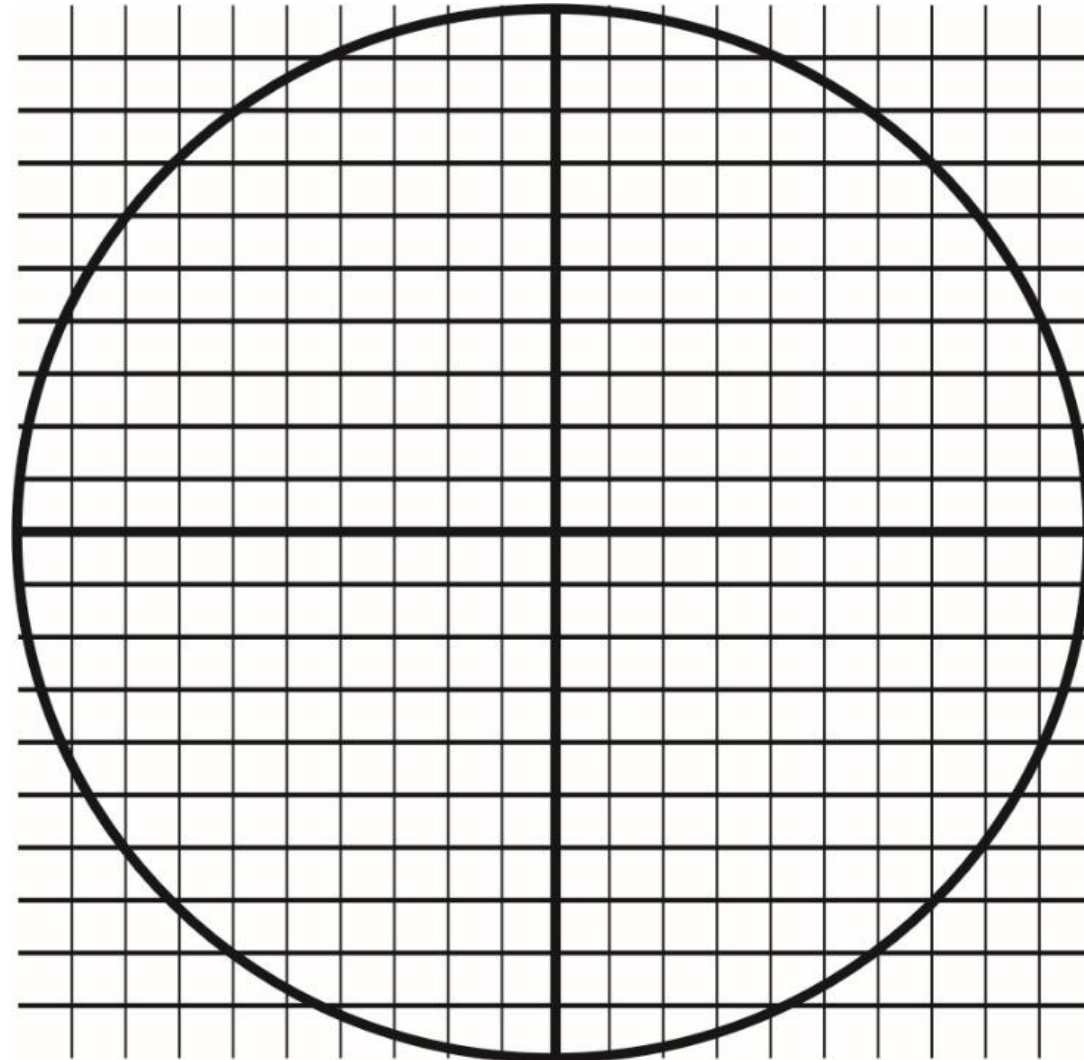
d) $\cos(-\frac{3}{4})$

e) $\cos(0,4)$

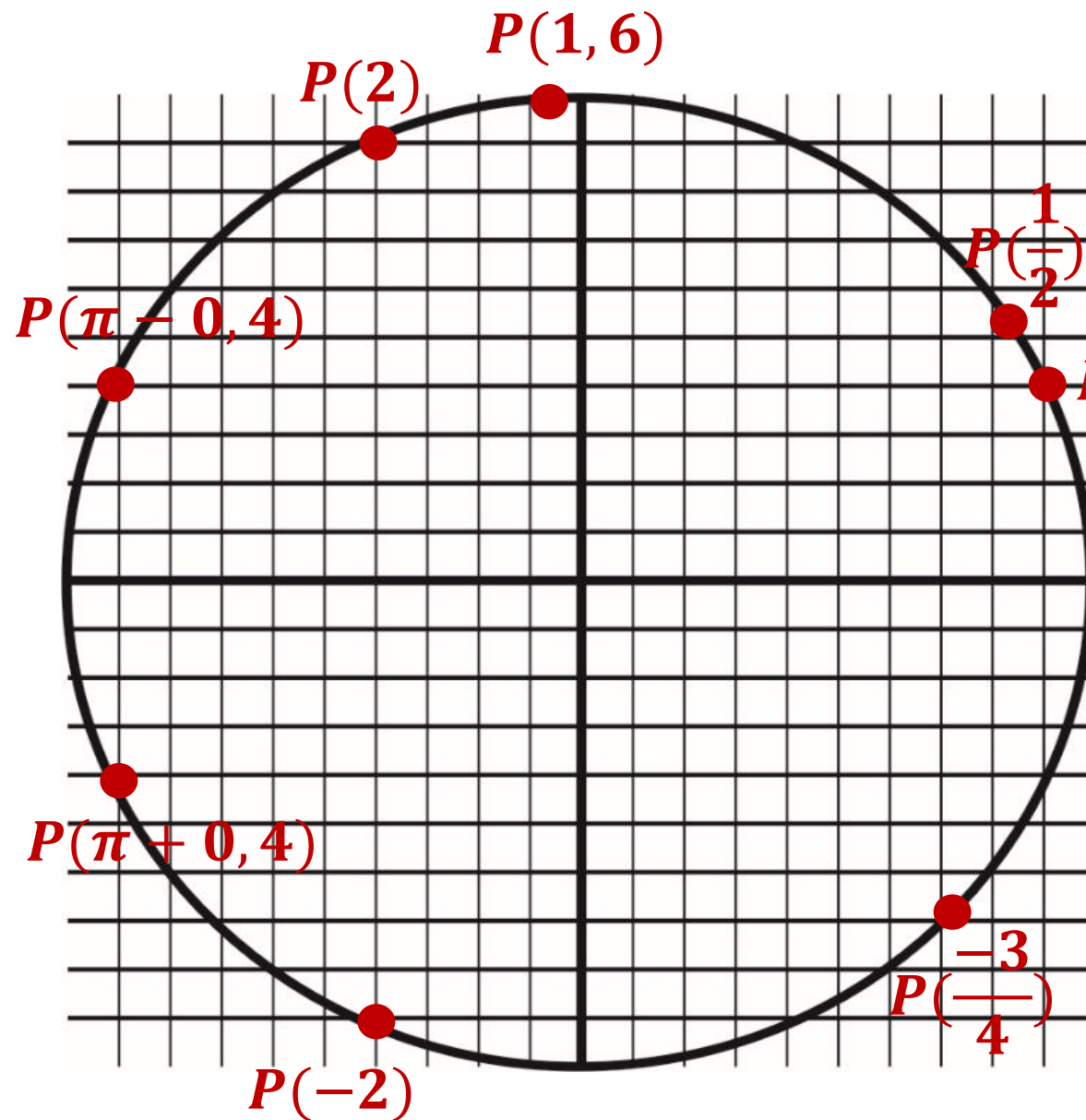
f) $\cos(\pi - 0,4)$

g) $\cos(\pi + 0,4)$

h) $\cos(1,6)$



12.



a) $\cos(\frac{1}{2}) \approx \frac{8}{10}$

b) $\cos(2) \approx \frac{-4}{10}$

c) $\cos(-2) \approx \frac{-4}{10}$

d) $\cos(-\frac{3}{4}) \approx \frac{7}{10}$

e) $\cos(0,4) \approx \frac{9}{10}$

f. $\cos(\pi - 0,4) \approx \frac{-9}{10}$

g. $\cos(\pi + 0,4) \approx \frac{-9}{10}$

h. $\cos(1,6) \approx -0,02$

13. Pamatujte, že půlkružnice má délku π krát poloměr, musíte být schopni najít následující hodnoty kosinu, aniž byste museli používat kalkulačku nebo si je pamatovat. Představte si, že umístíte odpovídající bod a poté ho promítnete na osu x .

a) $\cos(0)$

b) $\cos(\pi)$

c) $\cos(\frac{\pi}{2})$

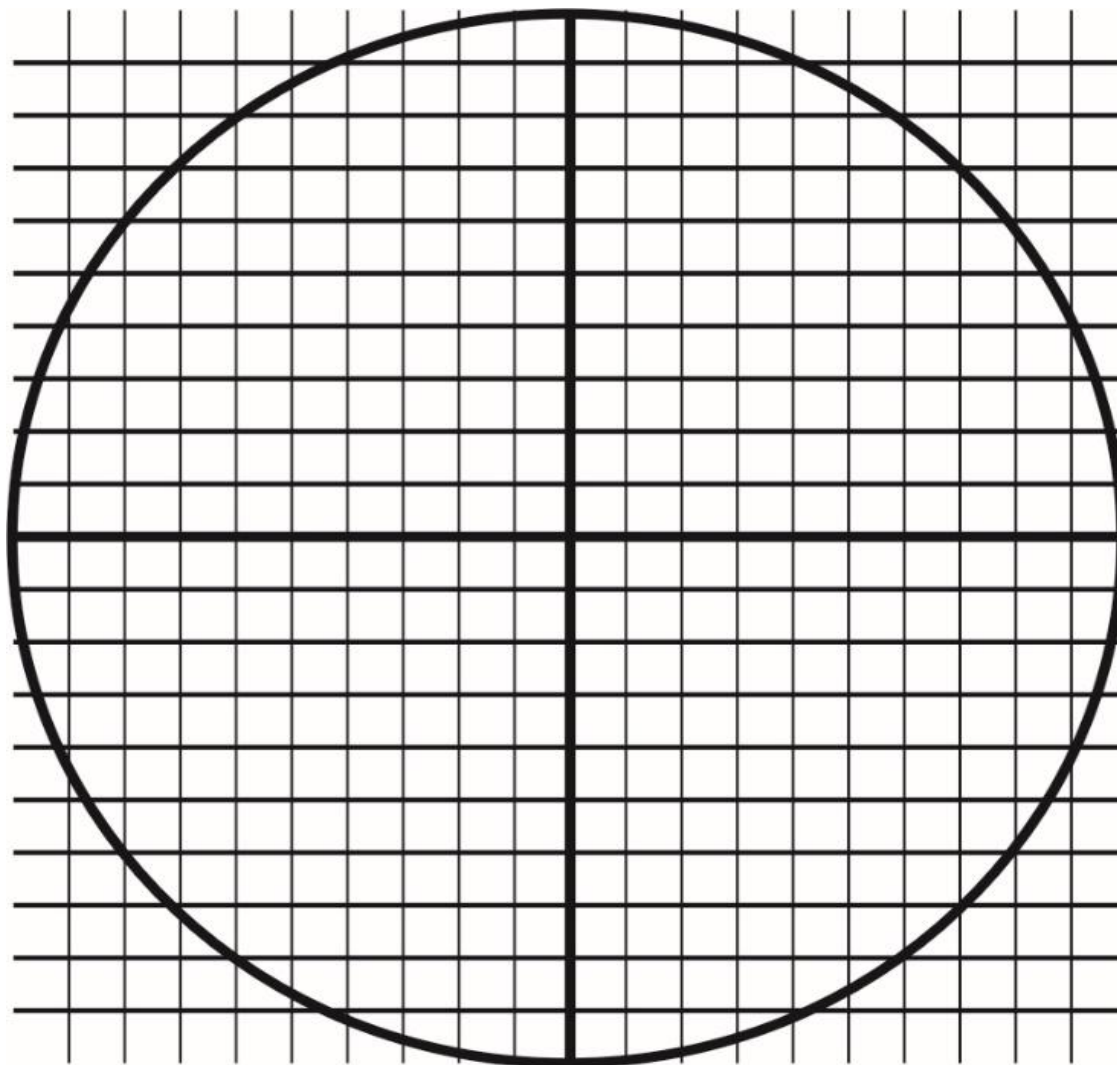
d) $\cos(-\frac{3\pi}{2})$

e) $\cos(-\frac{\pi}{2})$

f) $\cos(2\pi)$

g) $\cos(\frac{5\pi}{2})$

h) $\cos(-3\pi)$



14. Toto cvičení byste měli zvládnout bez použití kalkulačky nebo stuhy. Použijte pouze svou představivost (představte si umístění bodu a pak jeho projekci) a to, co víte o π .

Seřad'te od nejmenší po největší hodnotu:

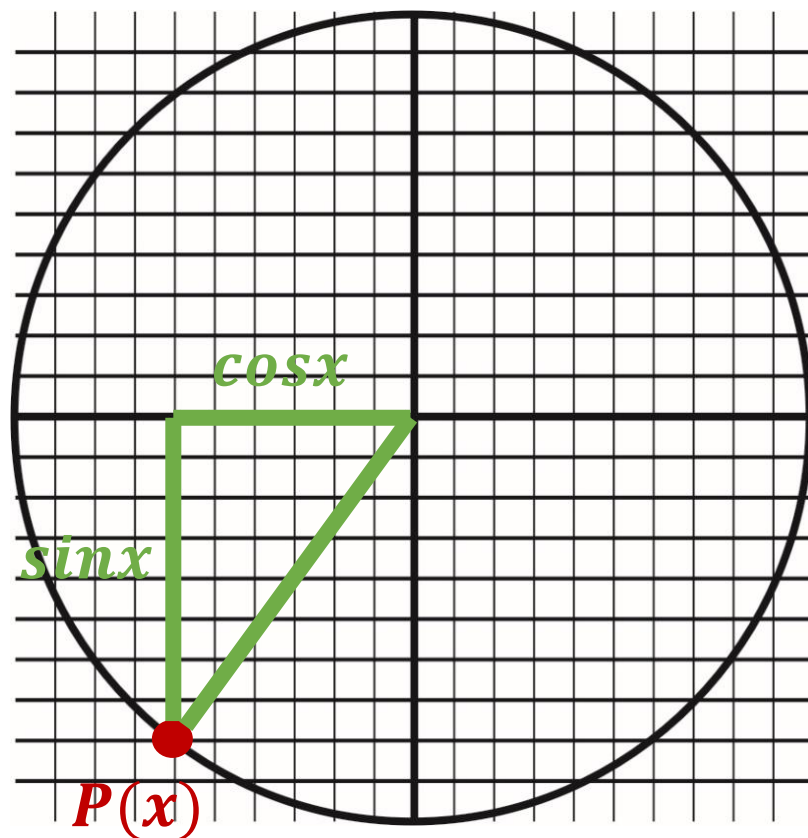
$$\cos(1), \cos\left(\frac{1}{10}\right), \cos(3), \cos(-4), \cos(4), \cos(6)$$

$$\cos(3) < \cos(4) = \cos(-4) < \cos(1) < \cos(6) < \cos\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$-0.9 < -0.6 = -0.6 < 0.5 < 0.96 < 0.99$$

15. Pokud je x úhel ve třetím kvadrantu, použijte myšlenku jednotkové kružnice k odvození následující trigonometrické vlastnosti.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



16. Najděte všechny hodnoty t v rovnici $\cos t = \sqrt{3} \sin t$, přičemž nelze použít funkce $tg(t)$ a $cotg(t)$.

17. Použijte myšlenku jednotkové kružnice a zjednodušte následující výrazy.

a) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \dots$ b) $\cos^3(\pi + x) = \dots$ c) $\sin^2(2\pi - x) = \dots$

- ❑ Vytváření inverze sinu ($\arcsin$) pomocí jednotkové kružnice.
- ❑ Vytváření inverze kosinu ($\arccos$) pomocí jednotkové kružnice

$$\sin t = u$$

$$t \rightarrow P(t)$$

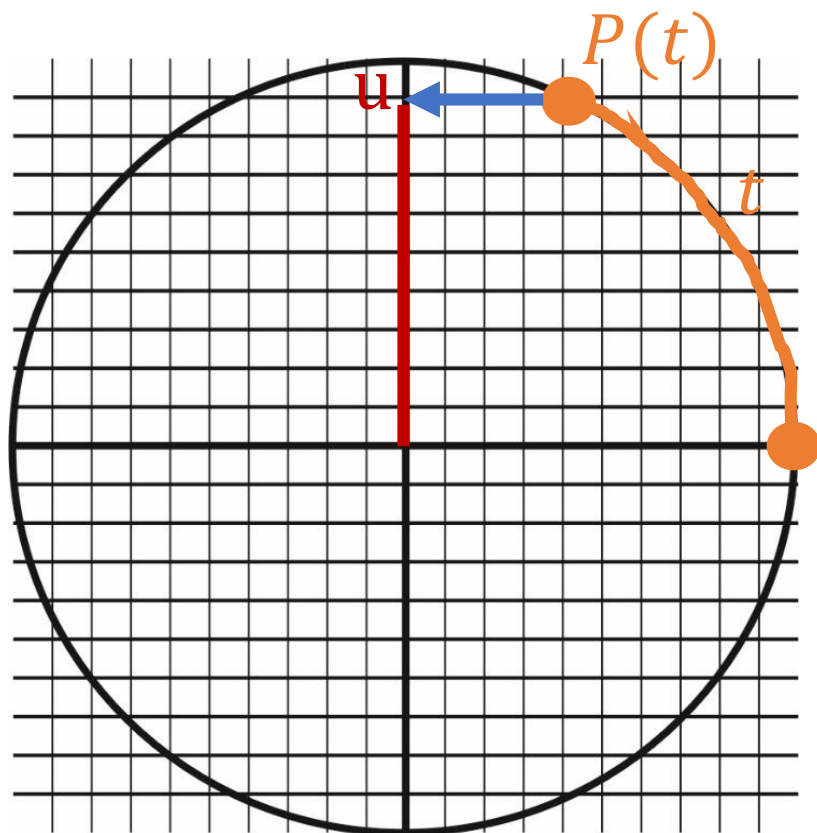
Projekce na osu y :

$$t \rightarrow u$$

$$u \rightarrow t$$

Inverze projekce

Inverze: $t \rightarrow P(t)$



$$\cos t = u$$

$$t \rightarrow P(t)$$

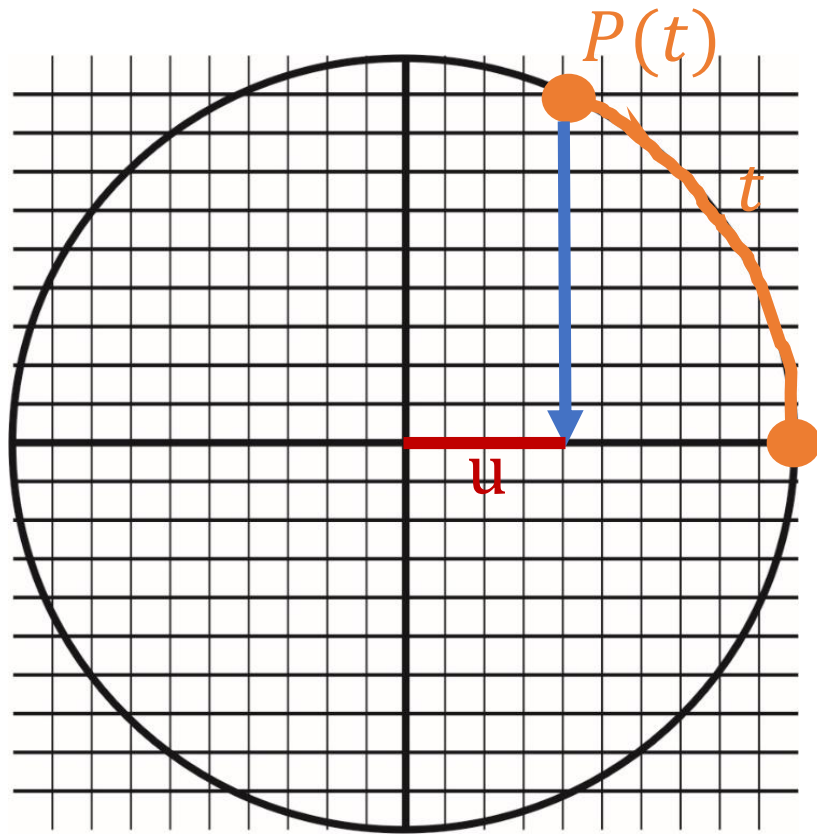
Projekce na osu x :

$$t \rightarrow u$$

$$u \rightarrow t$$

Inverze projekce

$$\text{Inverze: } t \rightarrow P(t)$$



Cvičení 18 začíná číslem mezi -1 a 1 jako vstupem a body se tvoří v jednotkovém kružnici jako výstup (od čísla k bodu).



Inverze projekce

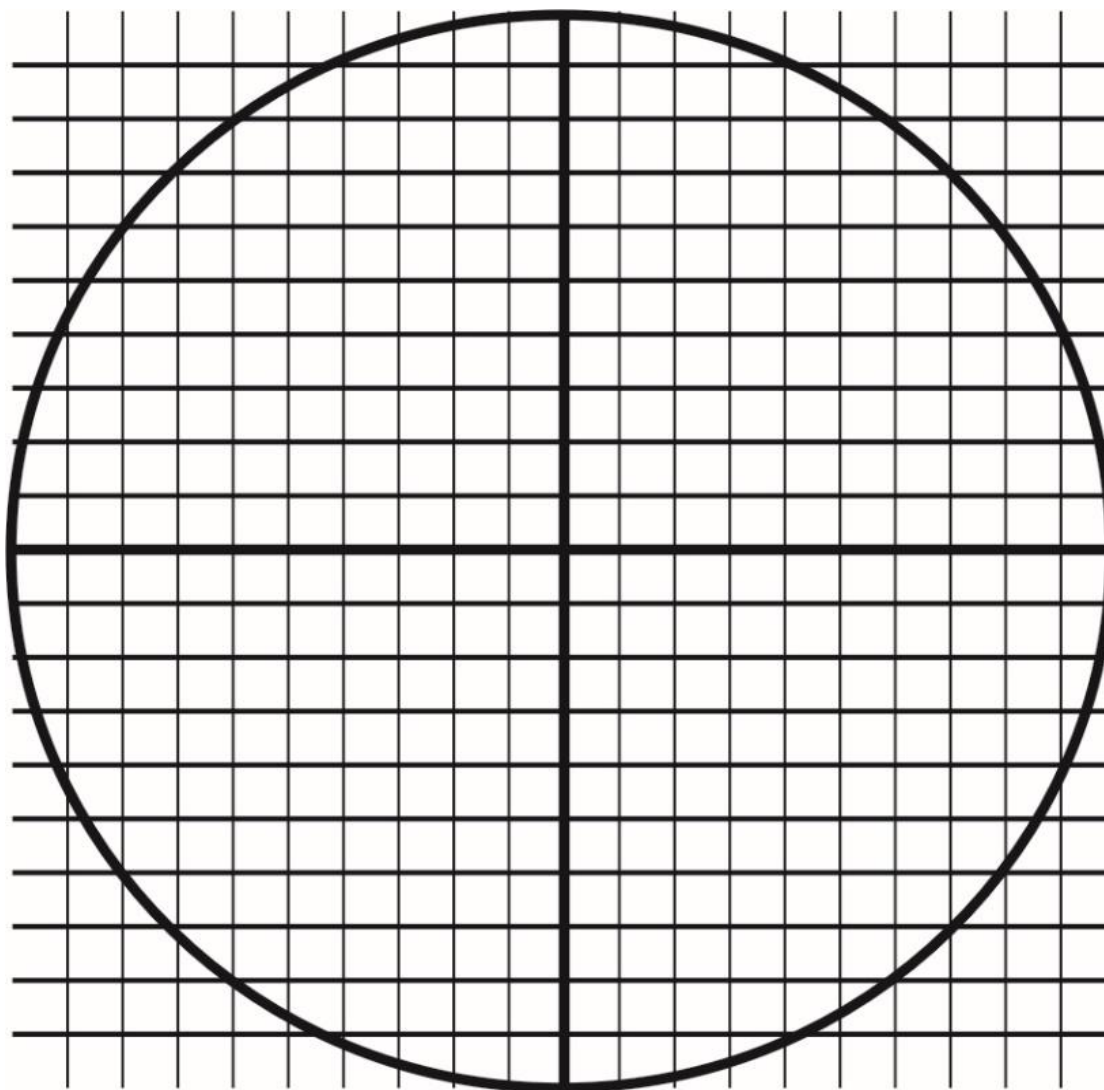
17. (Od čísla k bodu): V každém z následujících případů pomocí kružnice vyznačte všechny body $P(t)=[x,y]$ v kružnici, které danou podmínku splňují.

a) $y = 0,6$

b) $\sin(t) = -0,3$

c) $x = -0,4$

d) $\cos(t) = 0,7$



e) $\sin(t) = 0$

f) $\cos(t) = 1$

g) $\sin(t) = -1$

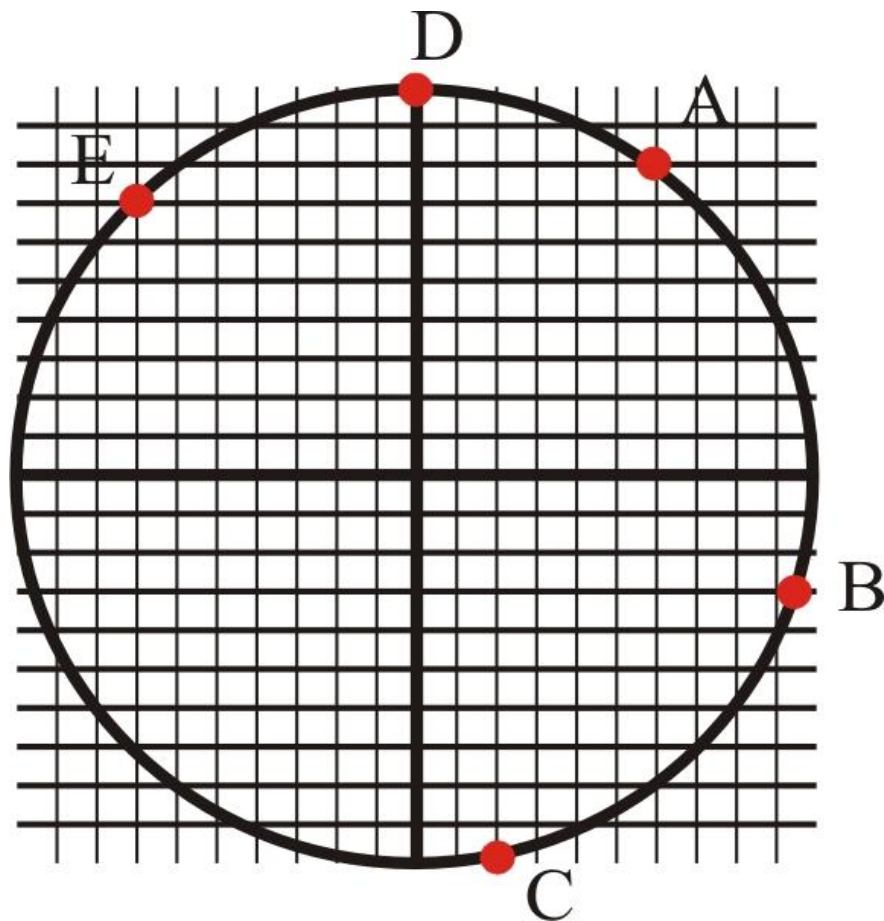
h) $\cos(t) = 1,4$

Cvičení 19 začíná bodem na jednotkové kružnici jako vstupem a vytváří úhel (v radiánech) jako výstup (od bodu k úhlu).

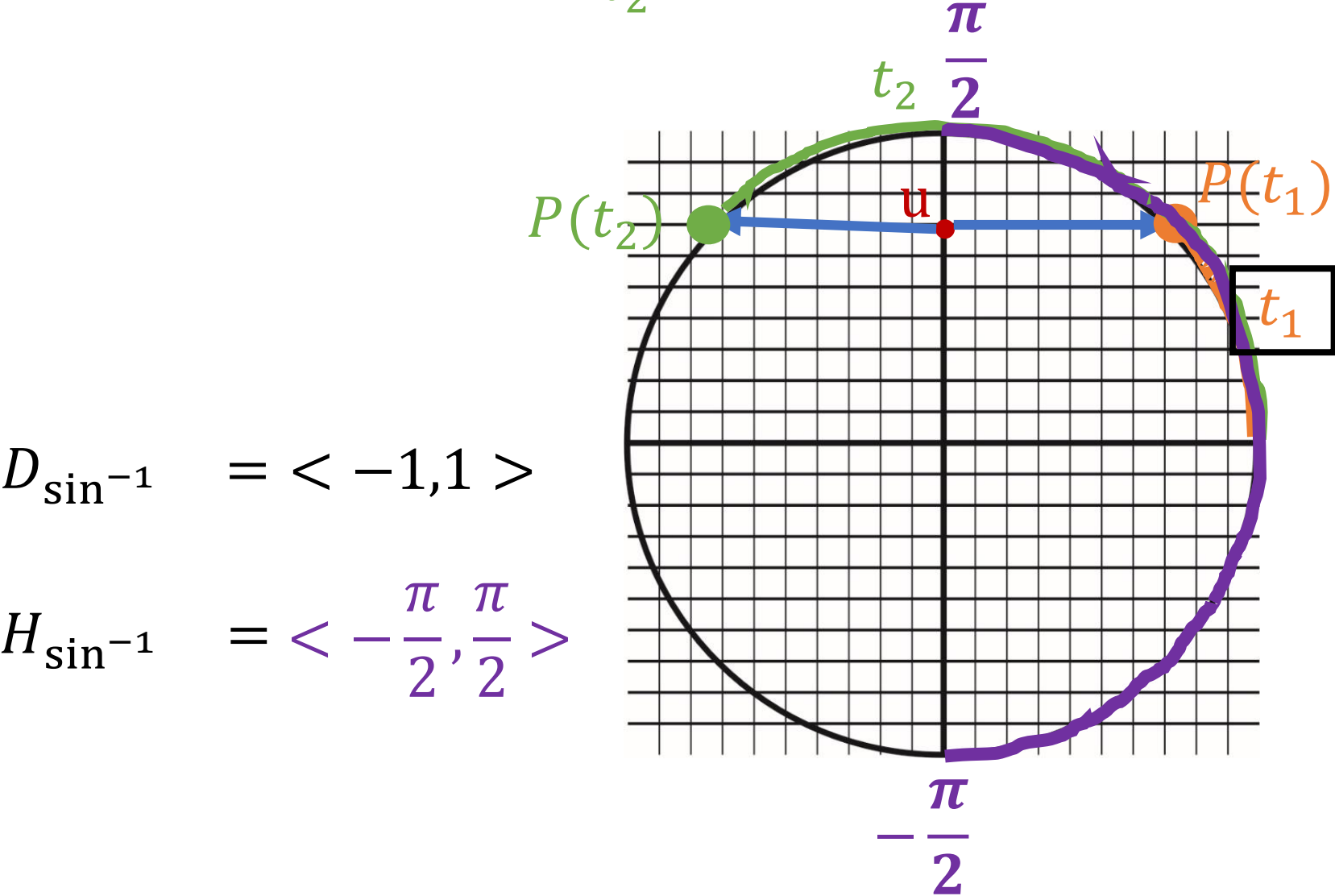


Inverze: $t \rightarrow P(t)$

19. (Od bodu k úhlu): Pro každý z bodů $P(t)$ v dané kružnici určete pomocí kousku stuhý co nejpřesněji hodnotu t (kladná, záporná nebo nula), která odpovídá danému bodu. Pamatujte, že t představuje měření úhlů v radiánech.



$$\operatorname{arcsin} u = \sin^{-1} u = \boxed{t_1}^{t_2}$$

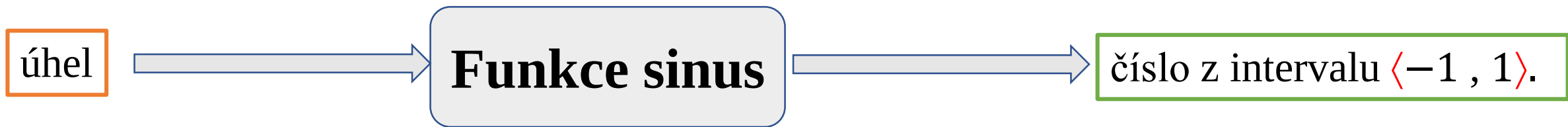


$$\sin^{-1} u = t$$

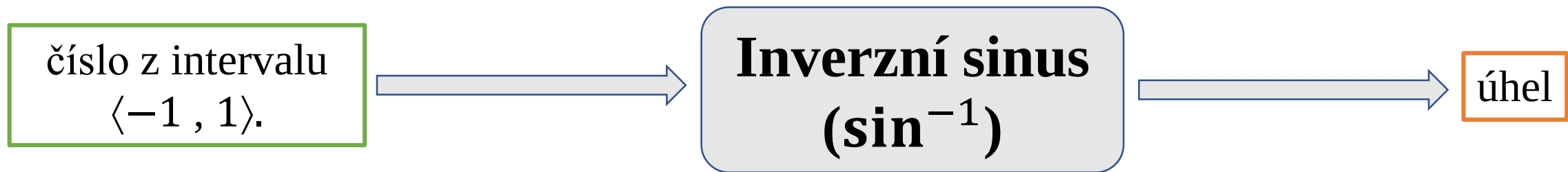
$$D_{\sin^{-1}} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$H_{\sin^{-1}} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

- Funkce sinus a kosinus mají jako vstup velikost úhlu a výstupem je číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.



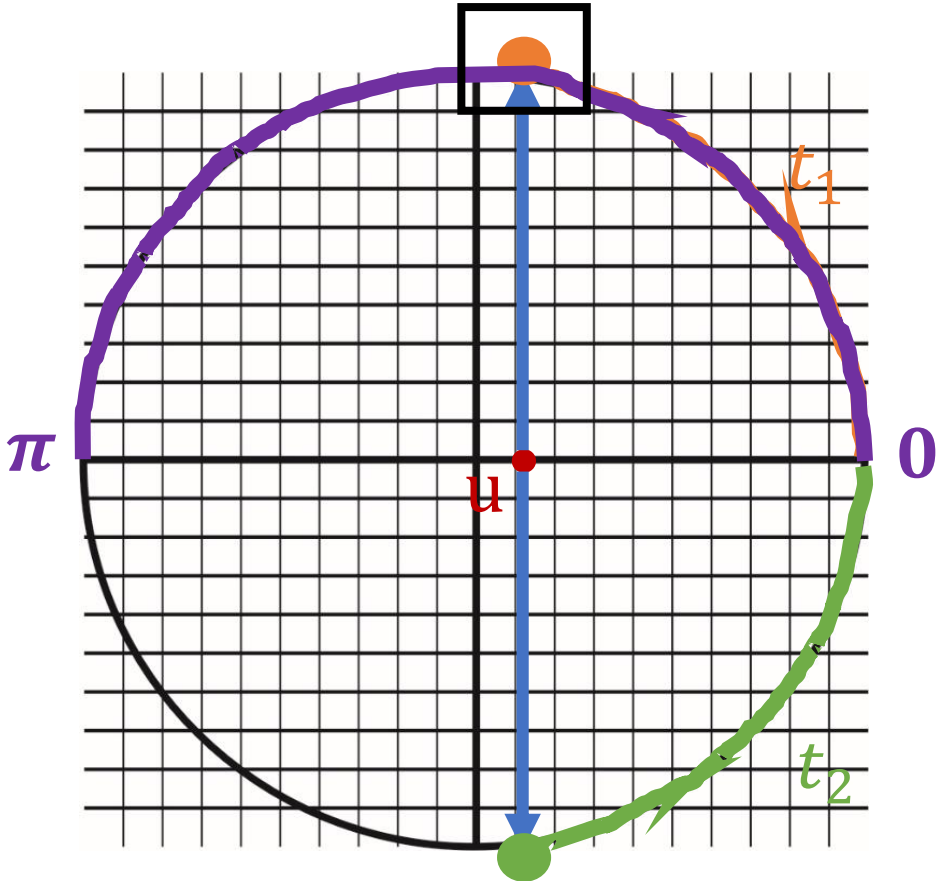
- Inverzní sinus ($\sin^{-1}$) dělá opak než obyčejný sinus.



$$\operatorname{arccos} u = \cos^{-1} u = \begin{matrix} \boxed{t_1} \\ t_2 \end{matrix}$$

$$D_{\cos^{-1}} = \langle -1, 1 \rangle$$

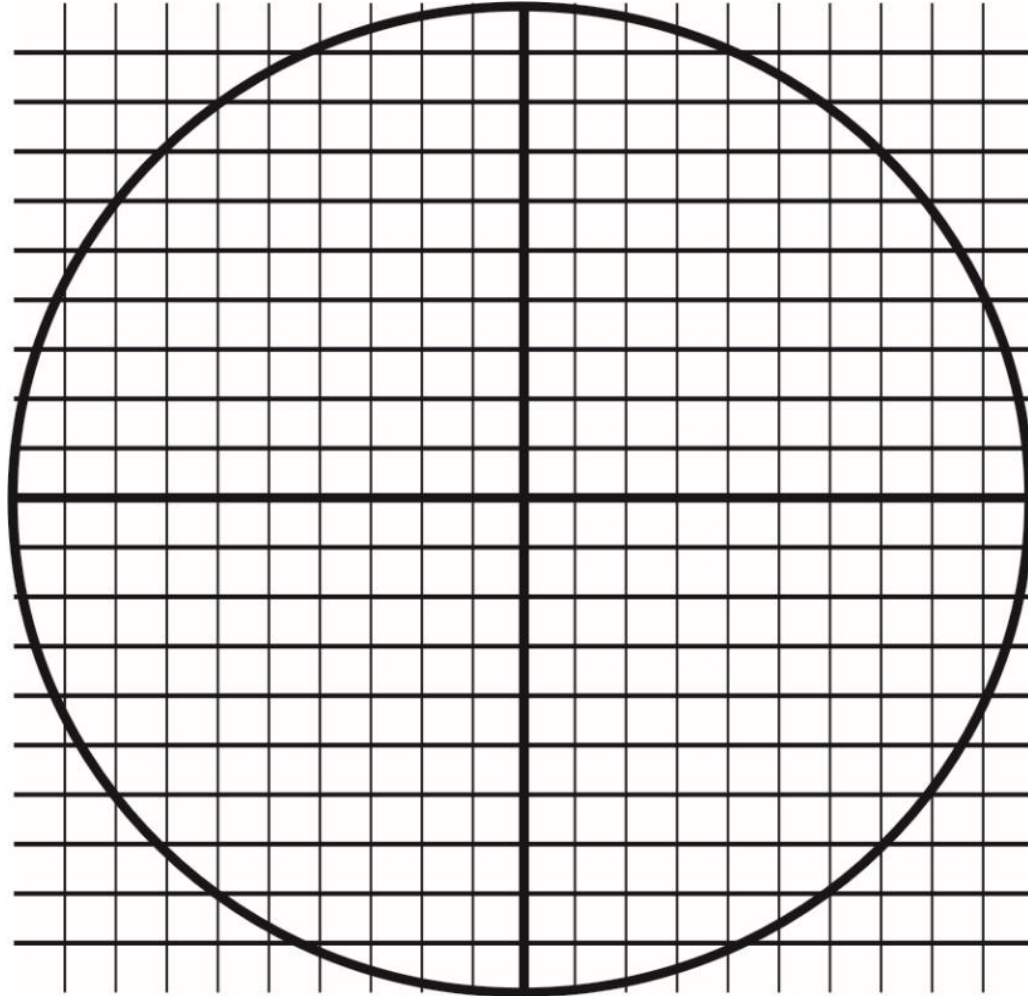
$$H_{\cos^{-1}} = \langle 0, \pi \rangle$$



20. Použijte kousek stuhý a kružnici a podle výše uvedeného postupu co nejpřesněji přibližte hodnotu t , kde:

a) $t = \sin^{-1}(-0,4)$

b) $t = \sin^{-1}(0,6)$

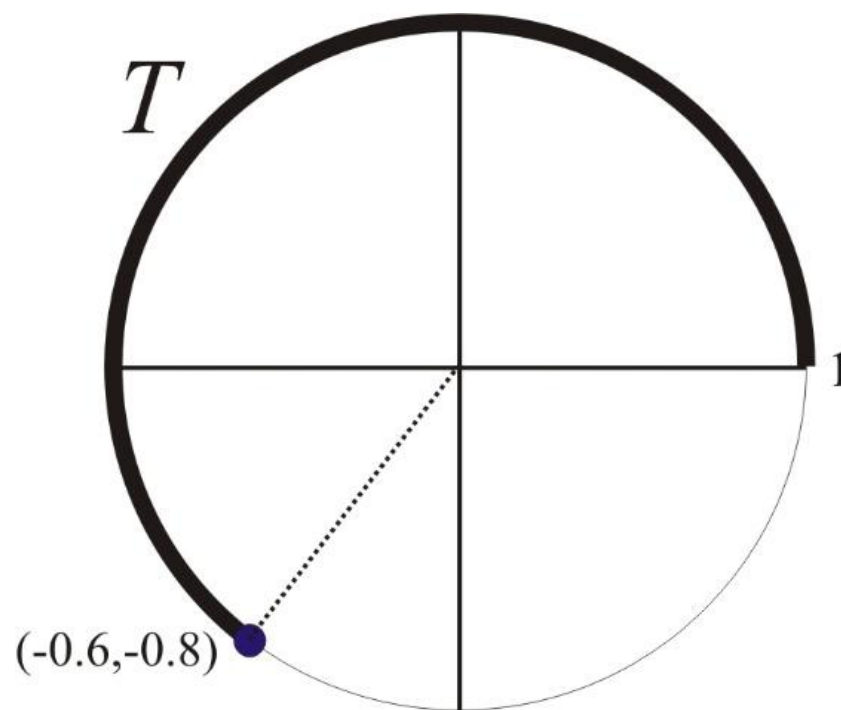


c) $t = \cos^{-1}(-0,3)$

d) $t = \cos^{-1}(0,7)$

21. Pokud $\sin(\frac{10\pi}{7}) = -0,9749279$. Určete $\sin^{-1}(-0,974927912)$.

22. **(Domácí úkol)** Pokud začneme v bodě $[1,0]$ na jednotkové kružnici a urazíme po kružnici proti směru hodinových ručiček vzdálenost $\mathbf{T}$, jak je znázorněno na obrázku, skončíme v bodě $[-0,6, -0,8]$. Jaká je hodnota $\mathbf{T}$? ($\mathbf{T}$ je délka oblouku.)



Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz