UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;

Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #3

Vahid Borji & Petra Surynková

Interpretace exponenciálních a logaritmických funkcí v kontextové situaci

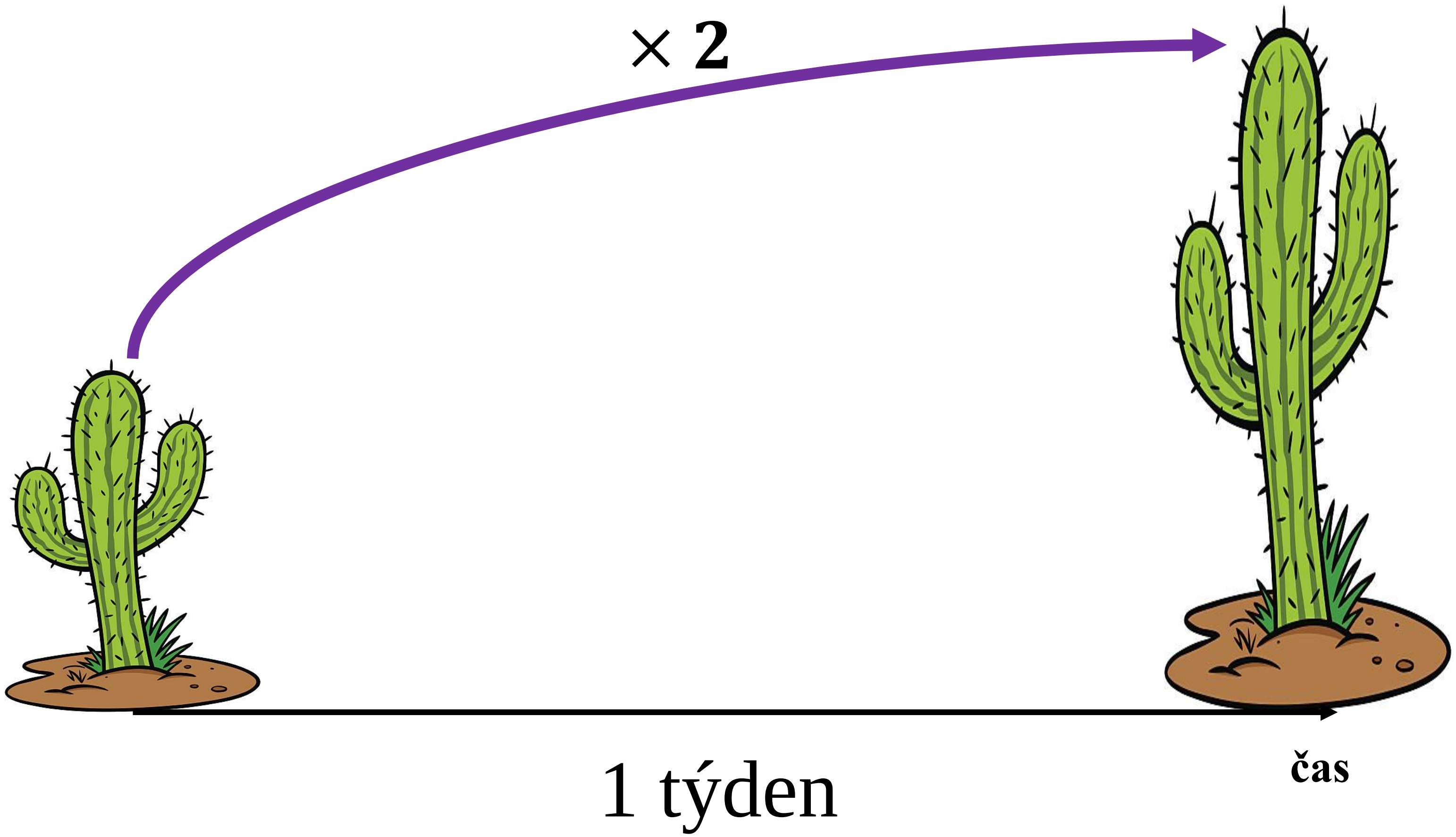
Některé reálné situace, které zažíváme v každodenním životě nebo nějaké pseudorealistické situace.

Cíl: Jak můžeme studentům a učitelům pomoci porozumět konceptům exponentu a logaritmu a jejich větám v skutečné situaci?

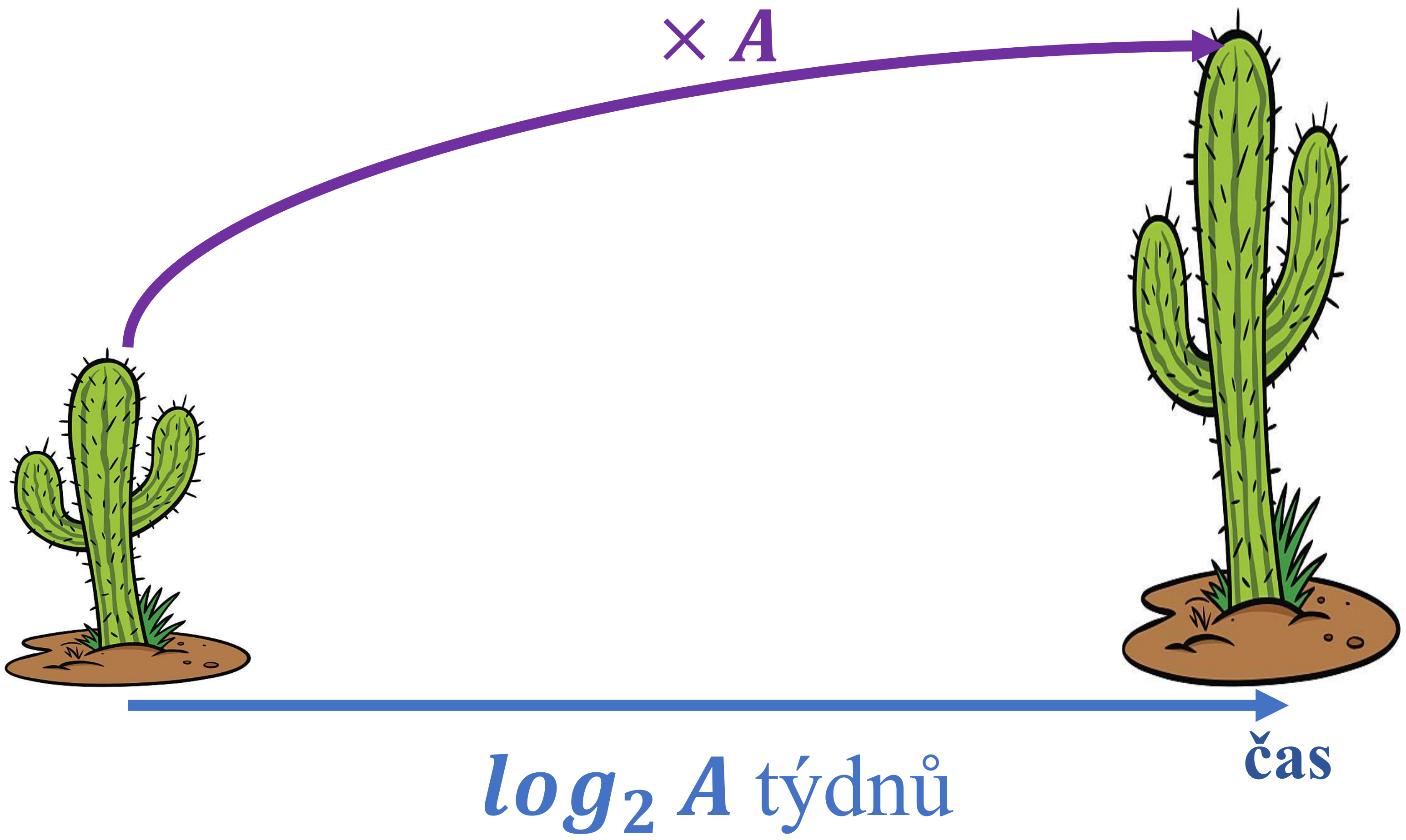
$$\mathbf{2^{\frac{1}{7}}} \qquad \log_2 \mathbf{3}$$

$$\log_2 \mathbf{7} + \log_2 \mathbf{4} = \log_2 \mathbf{28}$$

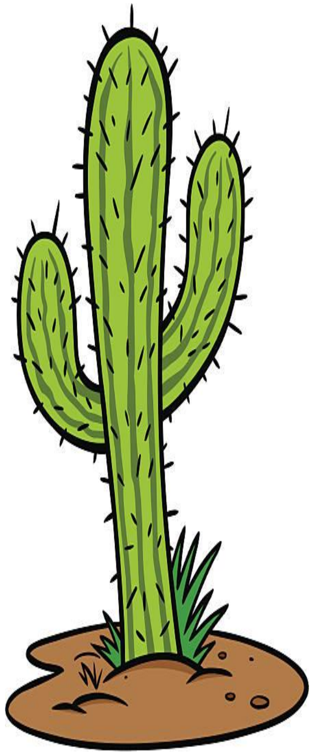
Uvažujme kontextovou situaci o kaktusu:

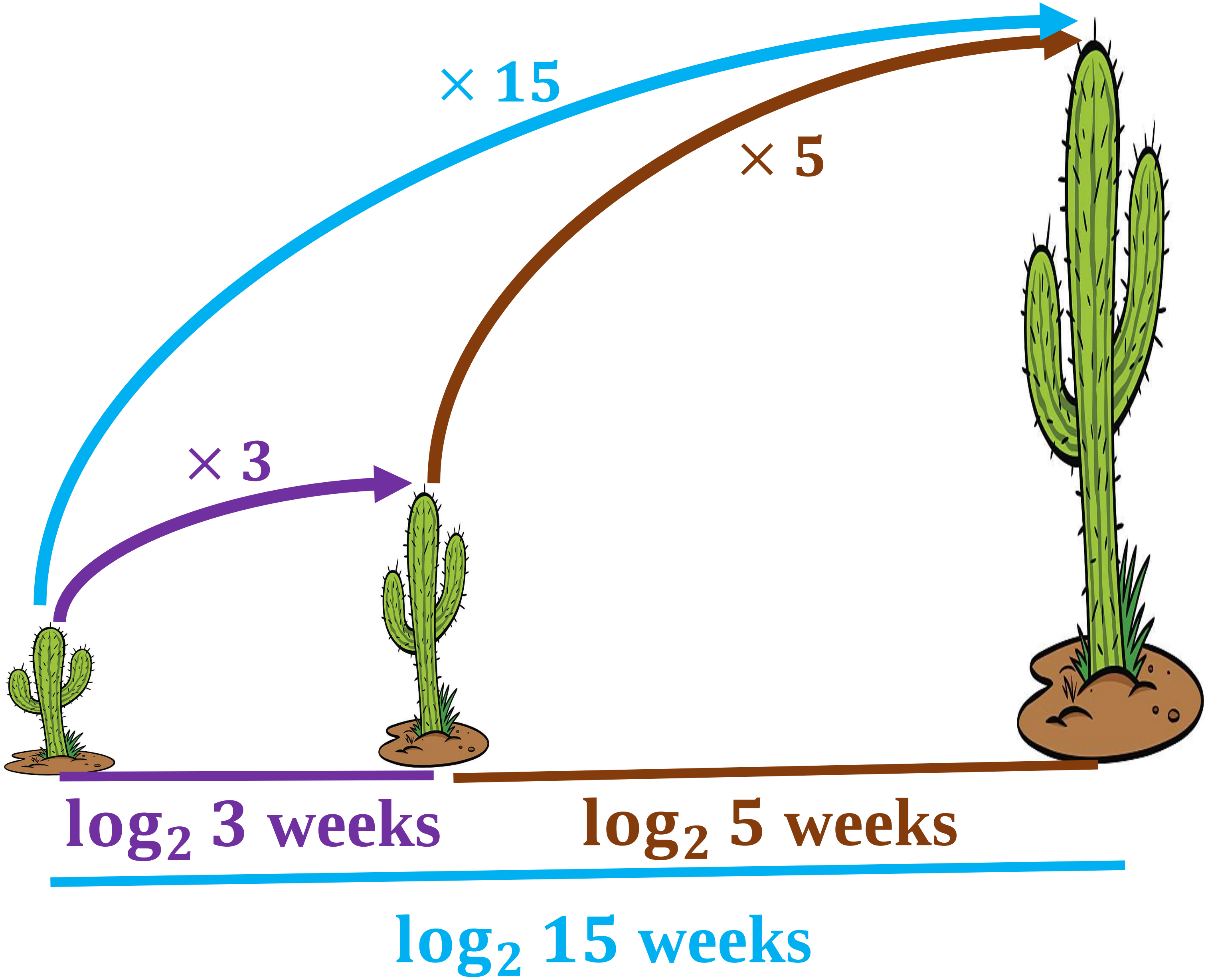


$\boldsymbol{log_2 A}$ vyjadřuje počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení ***A-násobku*** své výšky.



$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$



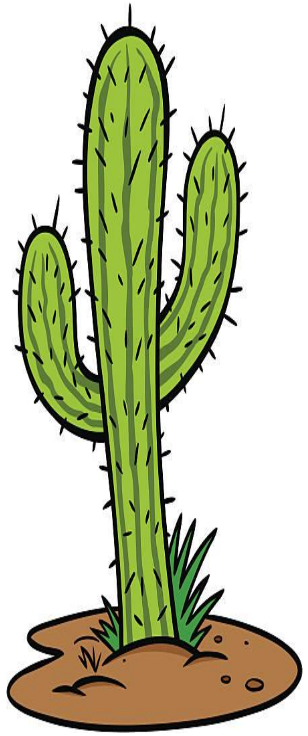


$$\log_2 3 + \log_2 5$$

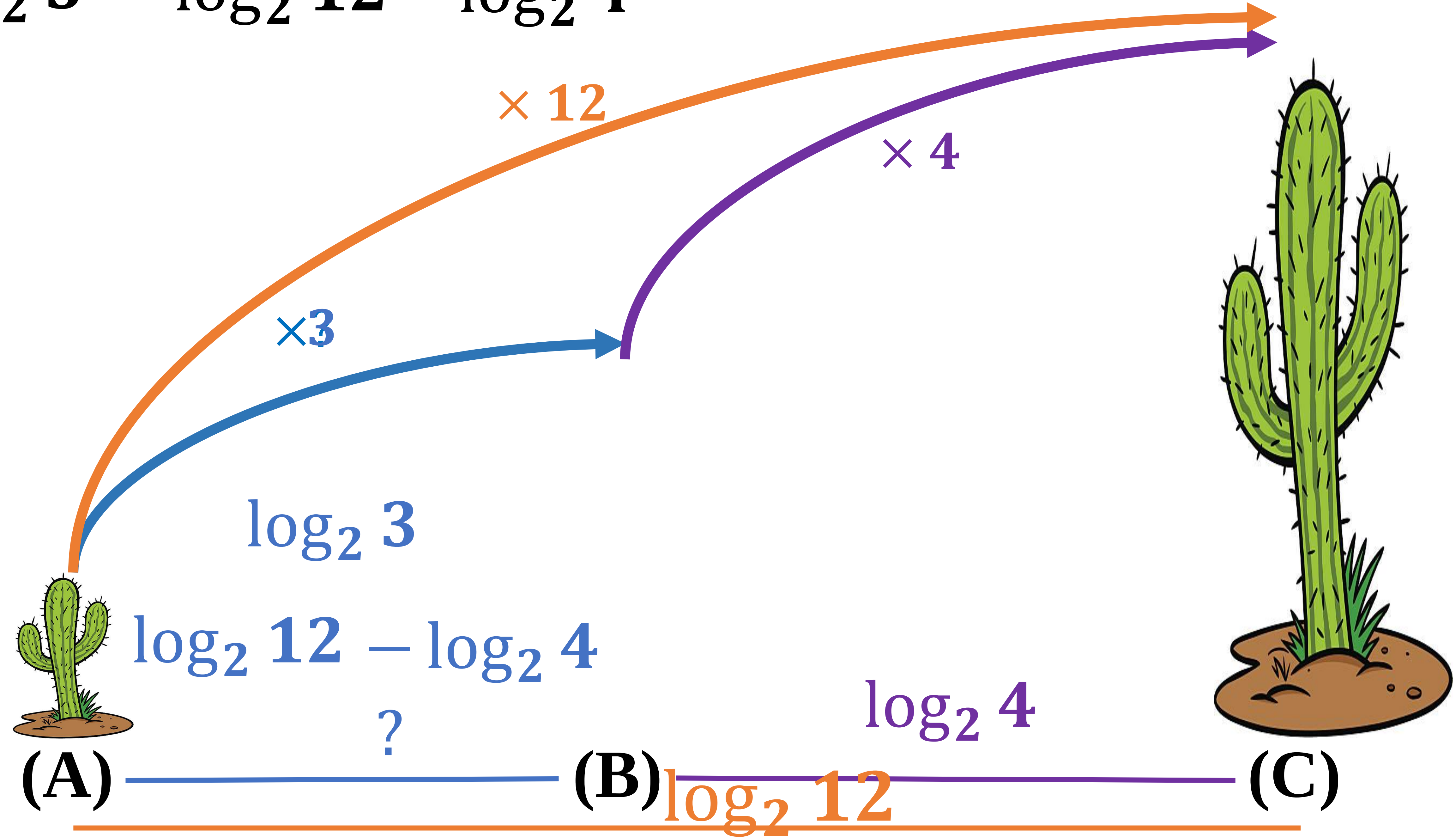
$$=$$

$$\log_2 15$$

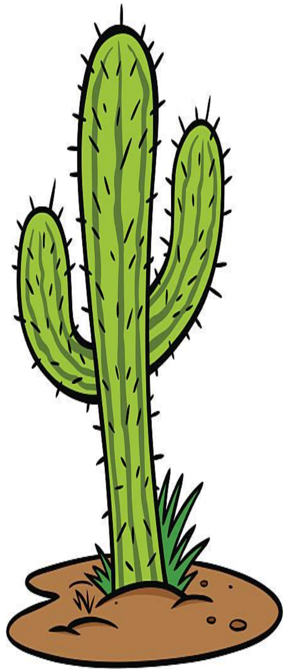
$$\log_2 12 - \log_2 4 = \log_2 3$$

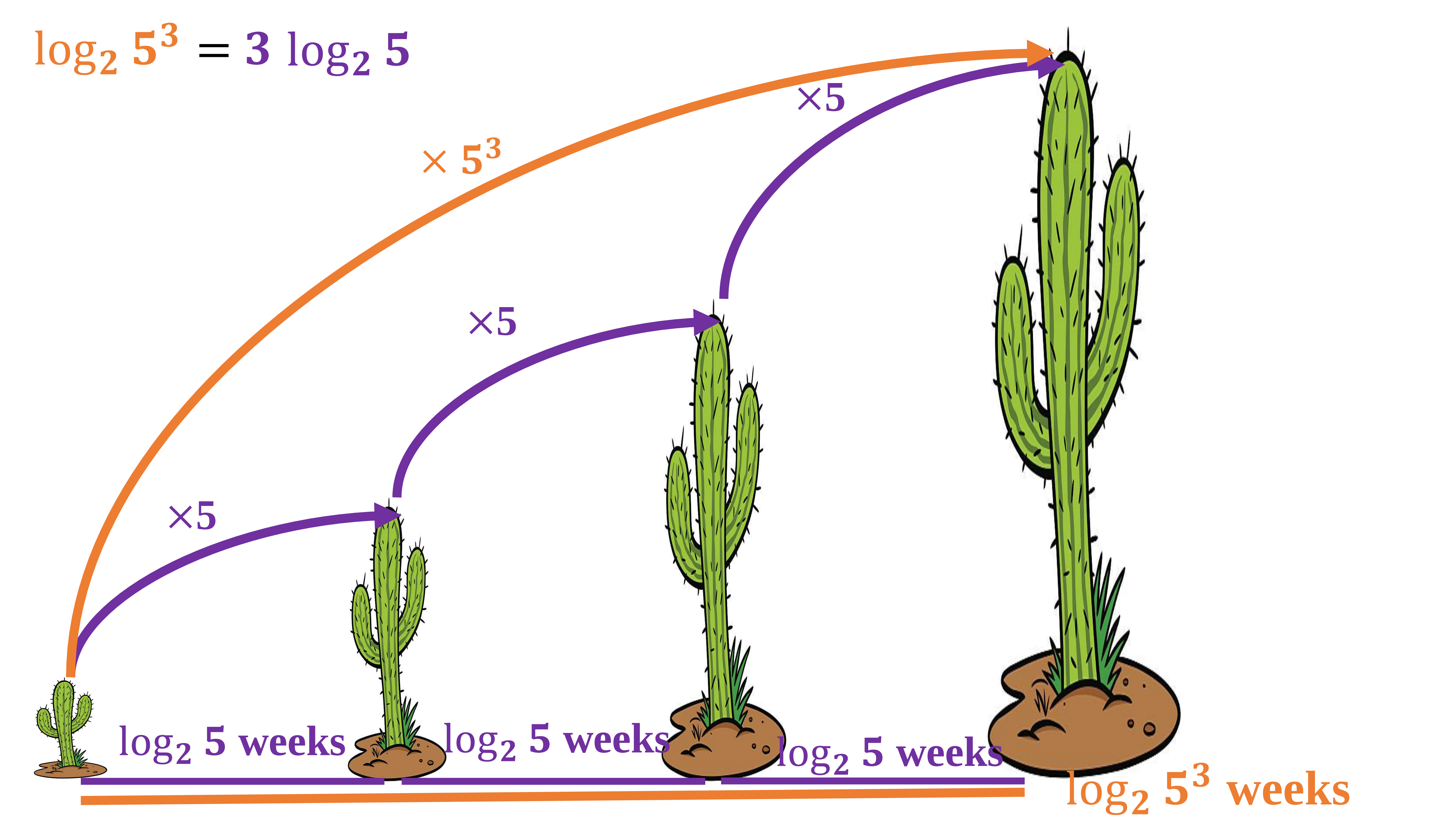


$$\log_2 \mathbf{3} = \log_2 \mathbf{12} - \log_2 \mathbf{4}$$



$$\log_{2} \mathbf{5}^{3} = \mathbf{3} \log_{2} \mathbf{5}$$



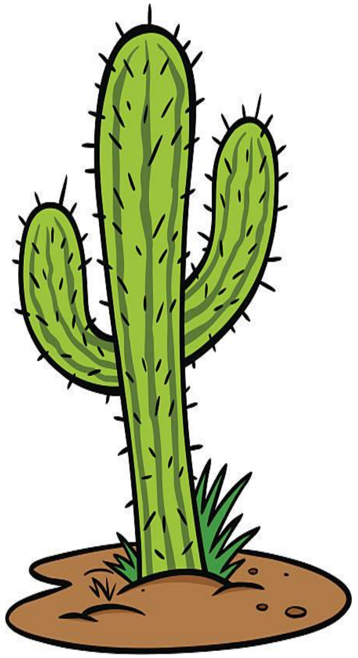

$\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$
$\times 5^3$
$\times 5$
$\times 5$
$\times 5$
$\log_2 5$ weeks
$\log_2 5$ weeks
$\log_2 5$ weeks
$\log_2 5^3$ weeks

Další logaritmické věty můžeme interpretovat v příběhu o kaktusu.

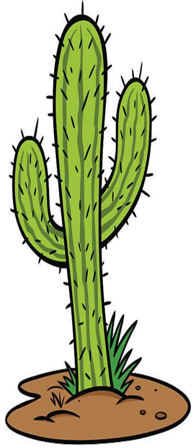
$$\log_2 2^A = A$$

$$2^{\log_2 A} = A$$

$$\frac{\log_2 A}{\log_2 B} = \log_B A$$



Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte prázdná místa.



a) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^3-*násobku* své výšky je …. 3

b) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^4-*násobku* své výšky je …. 4

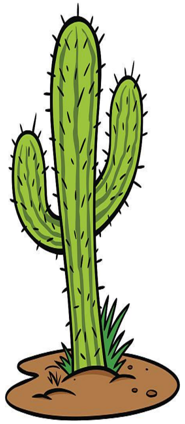
c) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^{100}-*násobku* své výšky je …. 100

d) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^A-*násobku* své výšky je …. A

e) Napište větu z části (d) jako logaritmickou rovnost.

$$\log_2 \mathbf{2}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$$

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte prázdná místa.



a) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 8-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 8

b) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 9-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 9

c) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 10-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 10

d) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 100-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 100

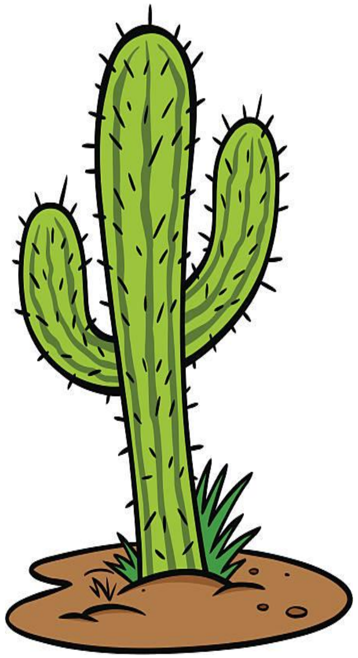
e) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } A-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … A

f) Napište větu z části (e) jako logaritmickou rovnost.

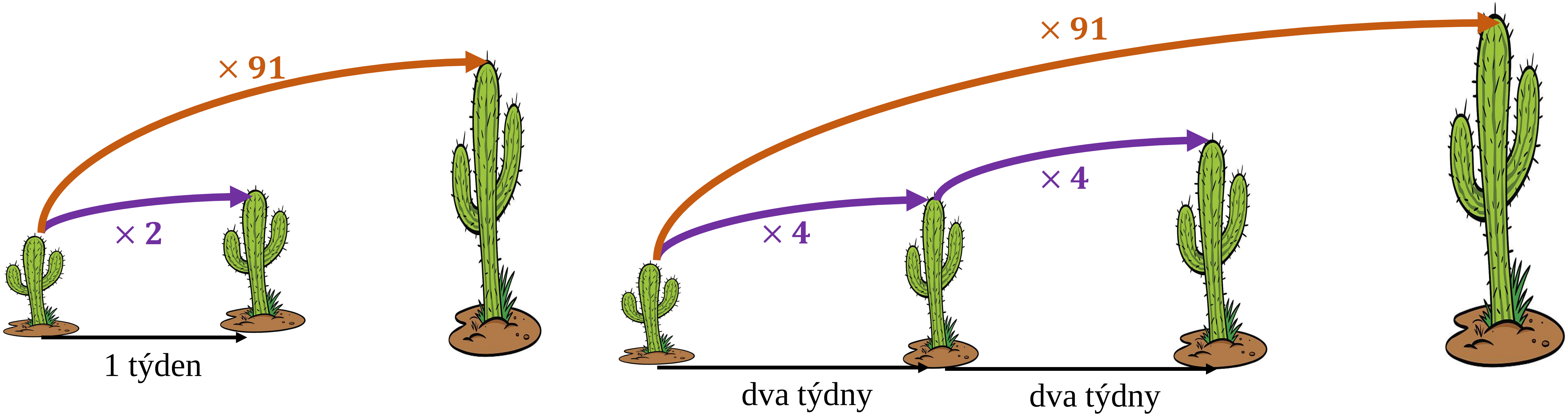
$$\mathbf{2^{\log_2 A} = A}$$

Použijte příběh s kaktusem a vysvětlete, proč tato logaritmická věta platí.

$$\frac{\log_2 \boldsymbol{A}}{\log_2 \boldsymbol{B}} = \log_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{A}$$



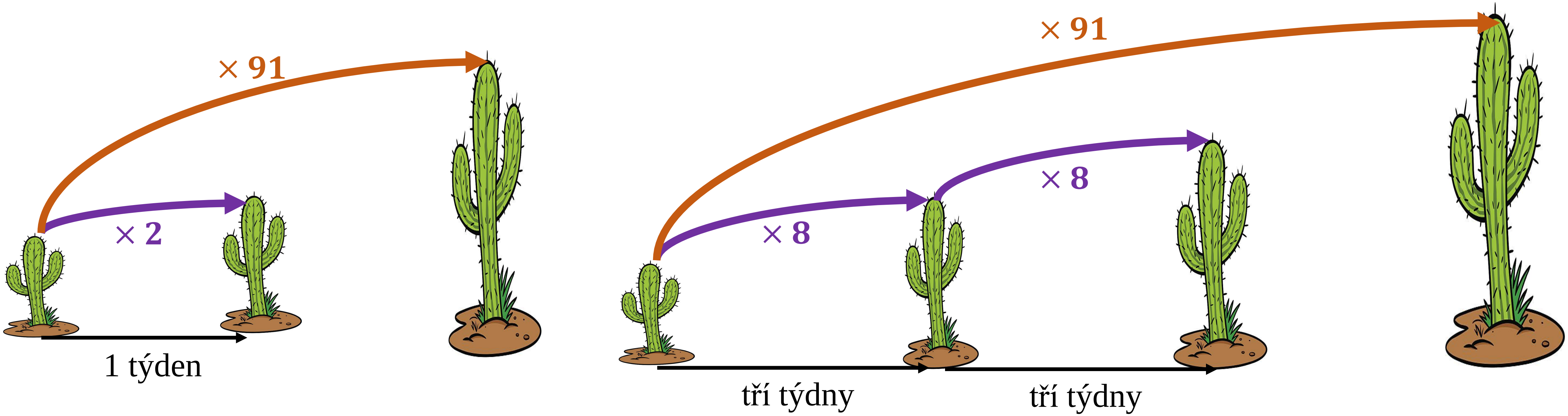
$$\frac{\log_2 \mathbf{15}}{\log_2 \mathbf{5}} = \frac{\log_4 \mathbf{15}}{\log_4 \mathbf{5}} = \frac{\log_3 \mathbf{15}}{\log_3 \mathbf{5}} = \log_5 \mathbf{15}$$



$\log_2 91$ ukazuje počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

dvojtýdenních období

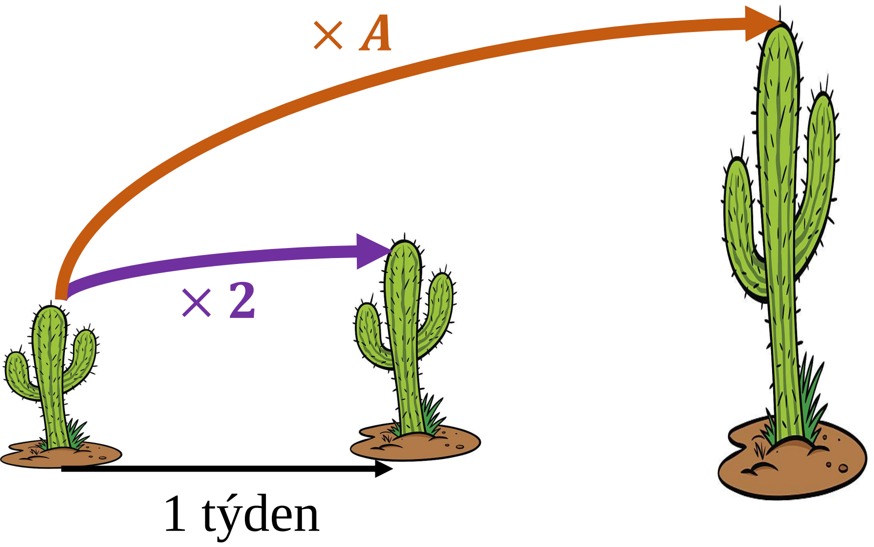
$\log_4 91$ ukazuje počet ………., které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

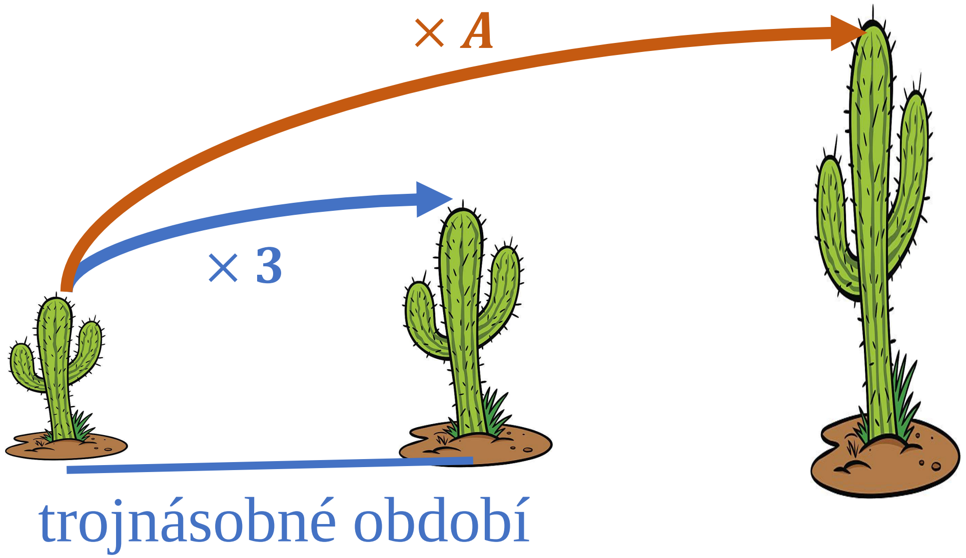


$\log_2 91$ ukazuje počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

tří týdenních období

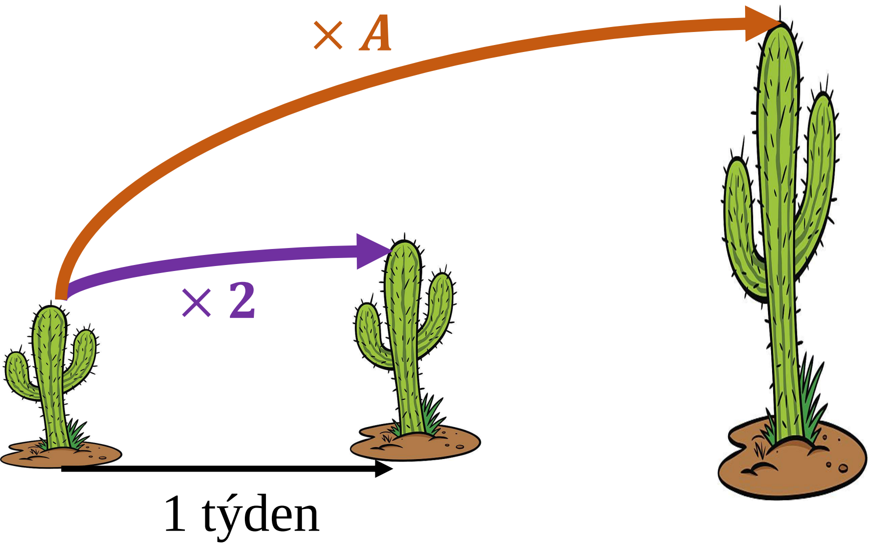
$\log_8 91$ ukazuje počet ………., které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

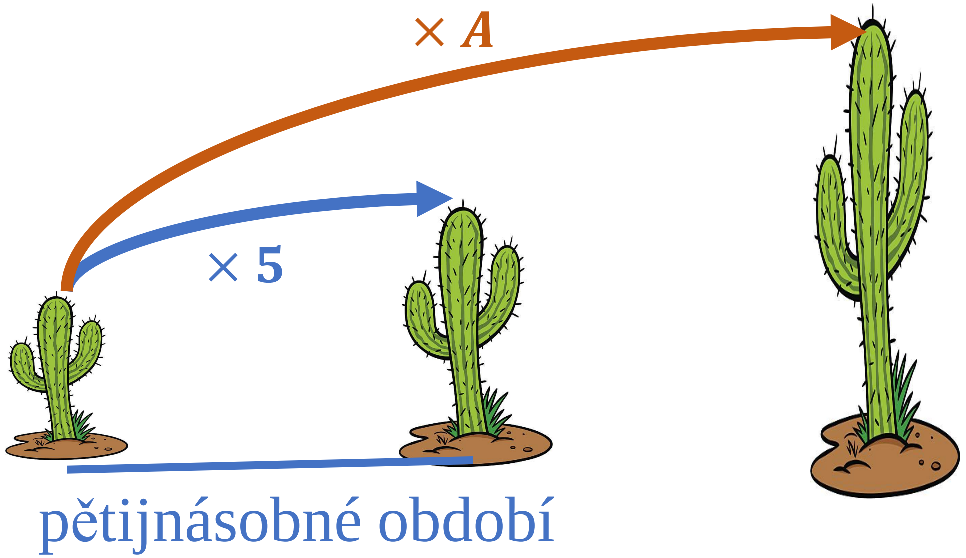




= je doba, za kterou se výška kaktusu ztrojnásobí.

$\log_3 A = ?$ Kolik **trojnásobných období** kaktus potřebuje, aby dosáhl *A-násobku* své výšky?

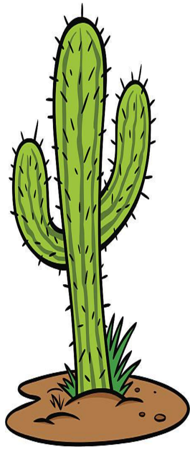




= je doba, za kterou se výška kaktusu zpětinásobí.

$\log_5 A = ?$ Kolik **pětinásobných období** kaktus potřebuje, aby dosáhl *A-násobku* své výšky?

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Odpovězte na následující otázky [vaše odpověď by měla být ve tvaru logaritmu].



a) Kolik dvojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *9-násobku* své výšky? $\log_2 9$

b) Kolik čtyřnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *5-násobku* své výšky? $\log_4 5$

c) Kolik šestinásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *200-násobku* své výšky? $\log_6 200$

d) Kolik trojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky?

$\log_3 8$

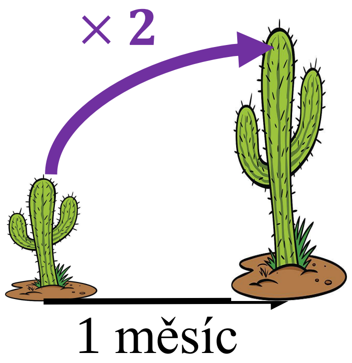
$$\boxed{\log_{y^a} x = \frac{1}{a}\log_y x}$$

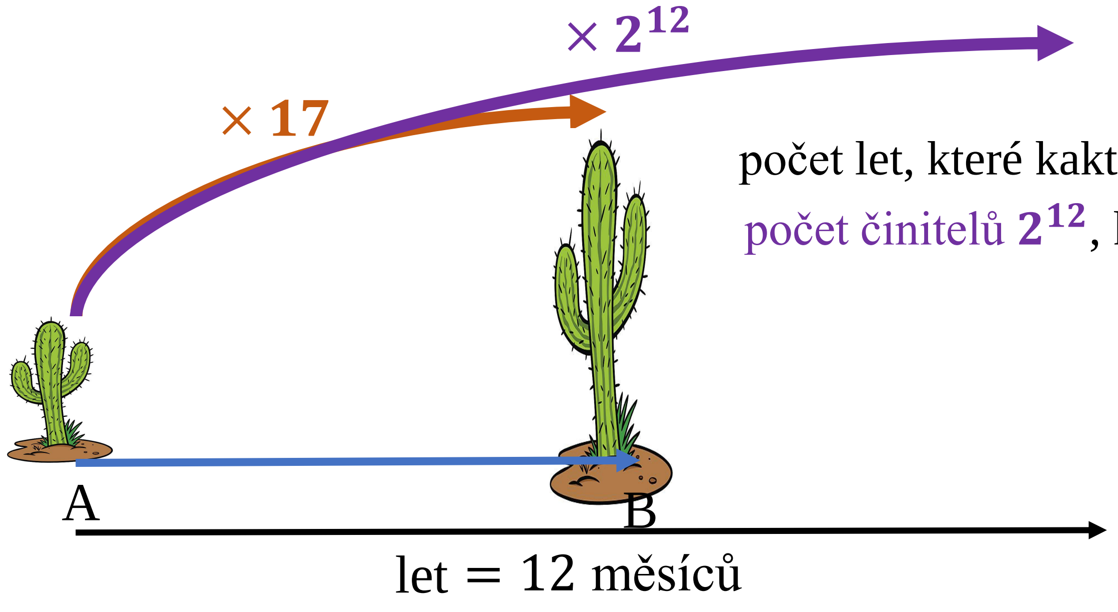
$$\boxed{\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12}\log_2 17}$$

Domácí úkol: Máme kaktus, jehož výška se každý měsíc zdvojnásobí. Pomocí tohoto kaktusu, navrhněte jednoduchý slovní úkol, který ukáže, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12}\log_2 17$ platí.

Nápověda: Musíte odpovědět na svůj slovní úkol dvěma různými způsoby. V prvním způsobu musíte získat jako odpověď $\log_{2^{12}} 17$. V druhém způsobu musíte získat $\frac{1}{12}\log_2 17$. Jelikož má slovní úkol pouze jednu správnou odpověď, můžete uzavřít, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12}\log_2 17$ platí.

Máme kaktus, jehož výška se každý měsíc zdvojnásobí. Určete počet let, které kaktus potřebuje k dosažení sedmnáctinásobku své výšky.



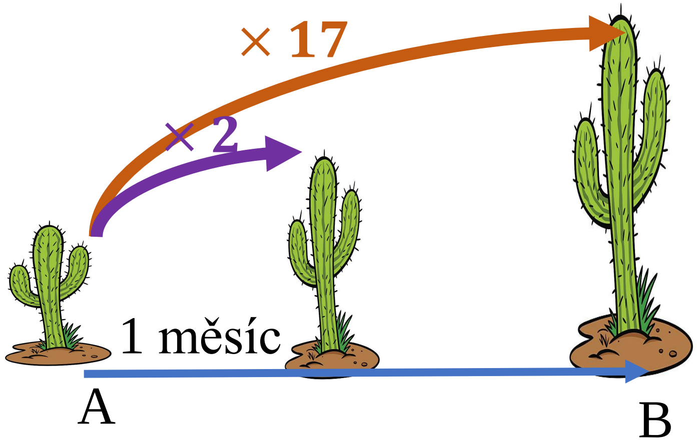


počet let, které kaktus potřebuje k dosažení ***17-násobku*** své výšky.

počet činitelů $\mathbf{2^{12}}$, které máme v čísle 17

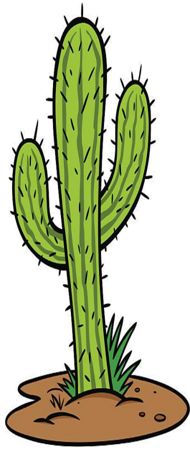
$$\boxed{\log_{2^{12}} 17 \text{ let}}$$

$$\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12}\log_2 17$$



$$\log_2 17 \text{ měsíců} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{12}\log_2 17 \text{ let}}$$

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Opravte níže uvedenou rovnost násobením nebo dělením jedné strany číslem.



$\mathbf{\frac{1}{2}} \times$

Počet dvojnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky

=

Počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky

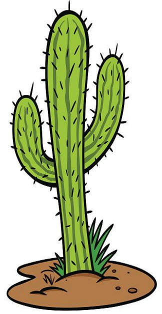
Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Zjednodušte každý zlomek/podíl.

a) $$\frac{\text{Počet dvojnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2^k\text{-}\textit{násobku} \text{ své výšky}}{\text{Počet dvojnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2\text{-}\textit{násobku} \text{ své výšky}} = k$$

b) $$\frac{\text{Počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2^k\text{-}\textit{násobku} \text{ své výšky}}{\text{Počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2\text{-}\textit{násobku} \text{ své výšky}} = k$$

c) $$\frac{\text{Počet pětinásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2^k\text{-}\textit{násobku} \text{ své výšky}}{\text{Počet pětinásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2\text{-}\textit{násobku} \text{ své výšky}} = k$$

Použijte příběh s kaktusem a vysvětlete, proč tato logaritmická věta platí.



$$\frac{\log_2 \mathbf{15}}{\log_2 \mathbf{5}} = \frac{\log_4 \mathbf{15}}{\log_4 \mathbf{5}} = \log_5 \mathbf{15}$$

$$\frac{\log_2 \mathbf{15}}{\log_2 \mathbf{5}} = \frac{\textbf{počet dvojnásobných období}\text{, které kaktus potřebuje k dosažení } \mathbf{15}\text{-}\textbf{\textit{násobku}} \text{ své výšky}}{\textbf{počet dvojnásobných období}\text{, které kaktus potřebuje k dosažení } \mathbf{5}\text{-}\textbf{\textit{násobku}} \text{ své výšky}}$$

$$\frac{\log_4 \mathbf{15}}{\log_4 \mathbf{5}} = \frac{\textbf{počet čtyřnásobných období}\text{, které kaktus potřebuje k dosažení } \mathbf{15}\text{-}\textbf{\textit{násobku}} \text{ své výšky}}{\textbf{počet čtyřnásobných období}\text{, které kaktus potřebuje k dosažení } \mathbf{5}\text{-}\textbf{\textit{násobku}} \text{ své výšky}}$$

$$= \frac{\textbf{počet pětinásobných období}\text{, které kaktus potřebuje k dosažení } \mathbf{15}\text{-}\textbf{\textit{násobku}} \text{ své výšky}}{\textbf{počet pětinásobných období}\text{, které kaktus potřebuje k dosažení } \mathbf{5}\text{-}\textbf{\textit{násobku}} \text{ své výšky}}$$

$$\frac{\log_2 \mathbf{15}}{\log_2 \mathbf{5}} = \frac{\log_4 \mathbf{15}}{\log_4 \mathbf{5}} = \frac{\log_5 \mathbf{15}}{\log_5 \mathbf{5}}$$

$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = 2\log_{10} 4 - \log_{10} 2$$

$$log_{10} 3x = log_{10} 16 - log_{10} 2$$

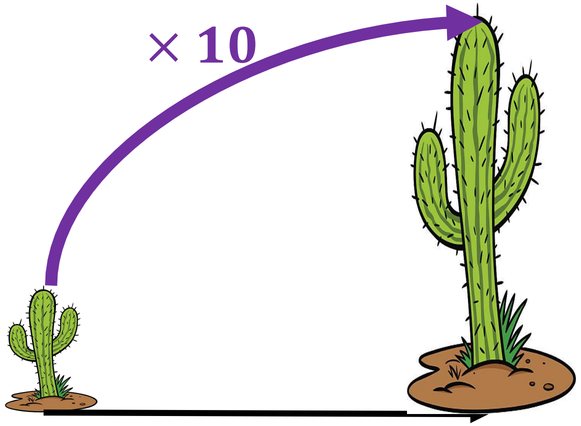
$$log_{10} 3x = log_{10} 8$$

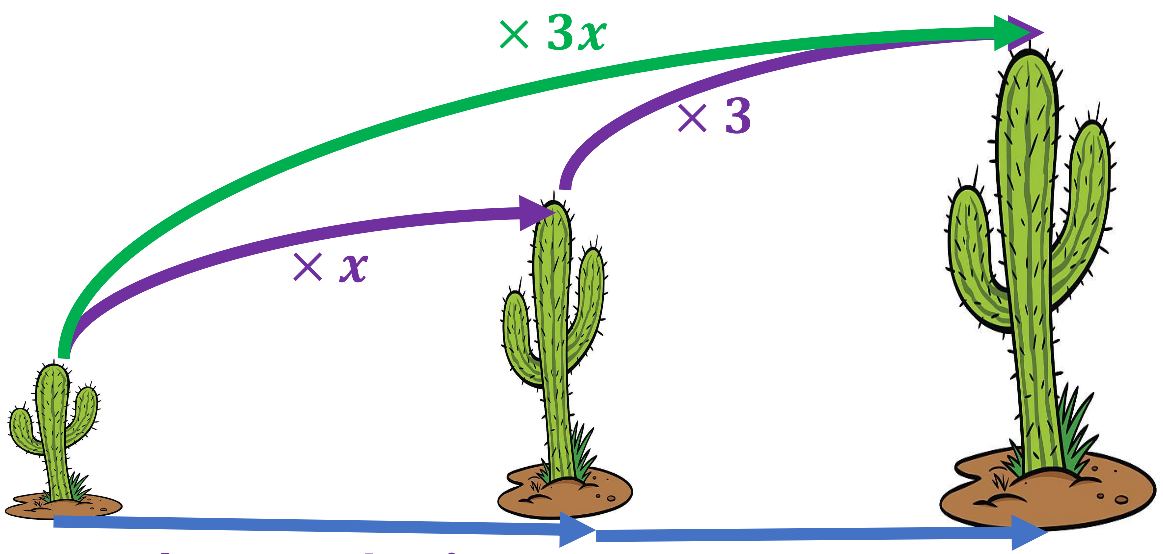
$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Co znamená každý krok? Co znamená ta odpověď?

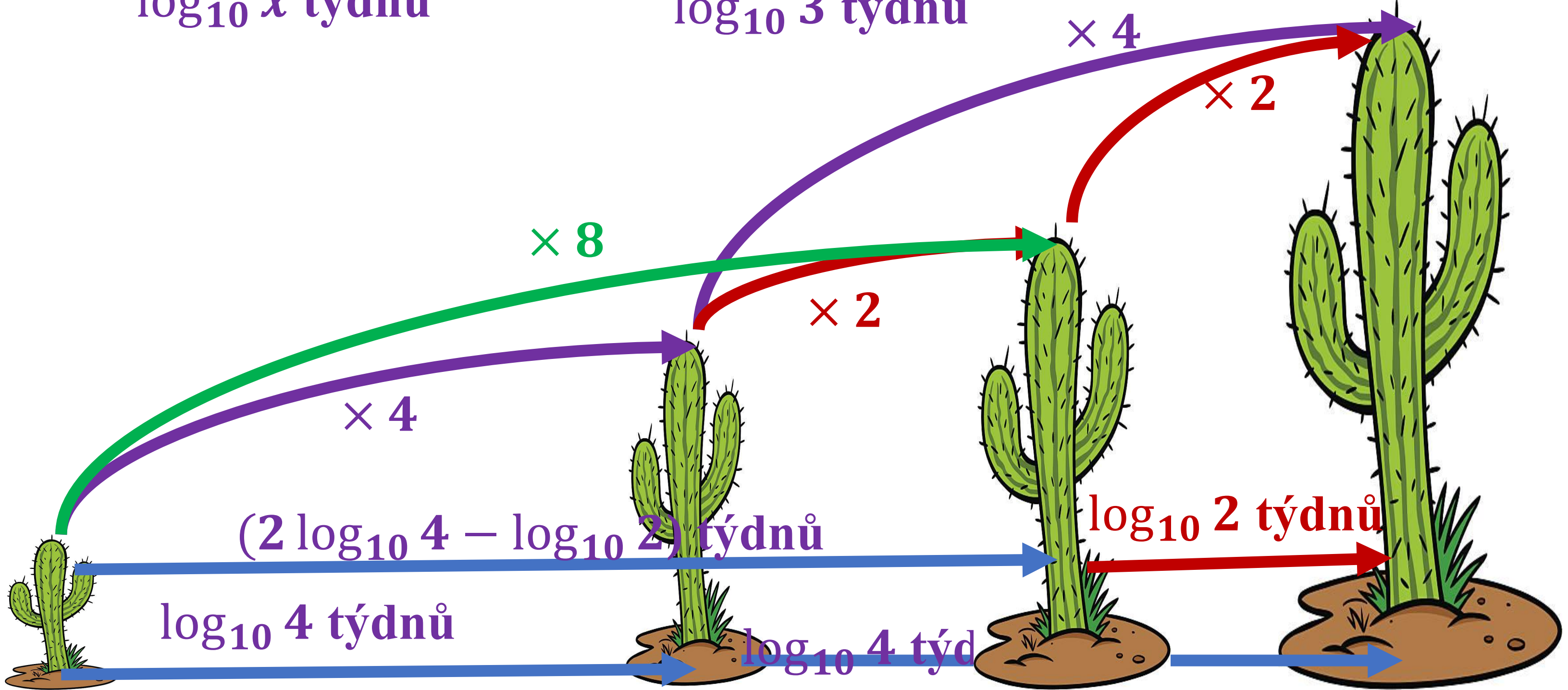
$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = 2\log_{10} 4 - \log_{10} 2$$



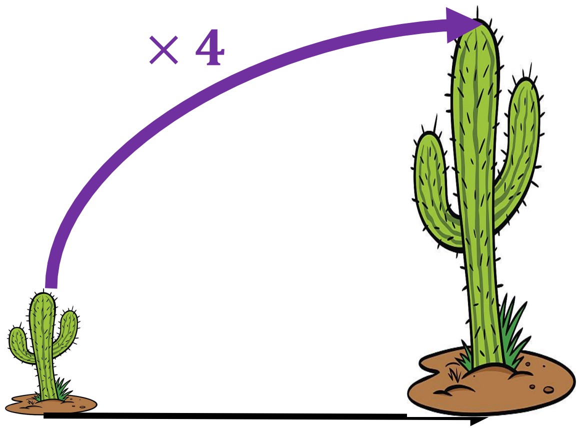


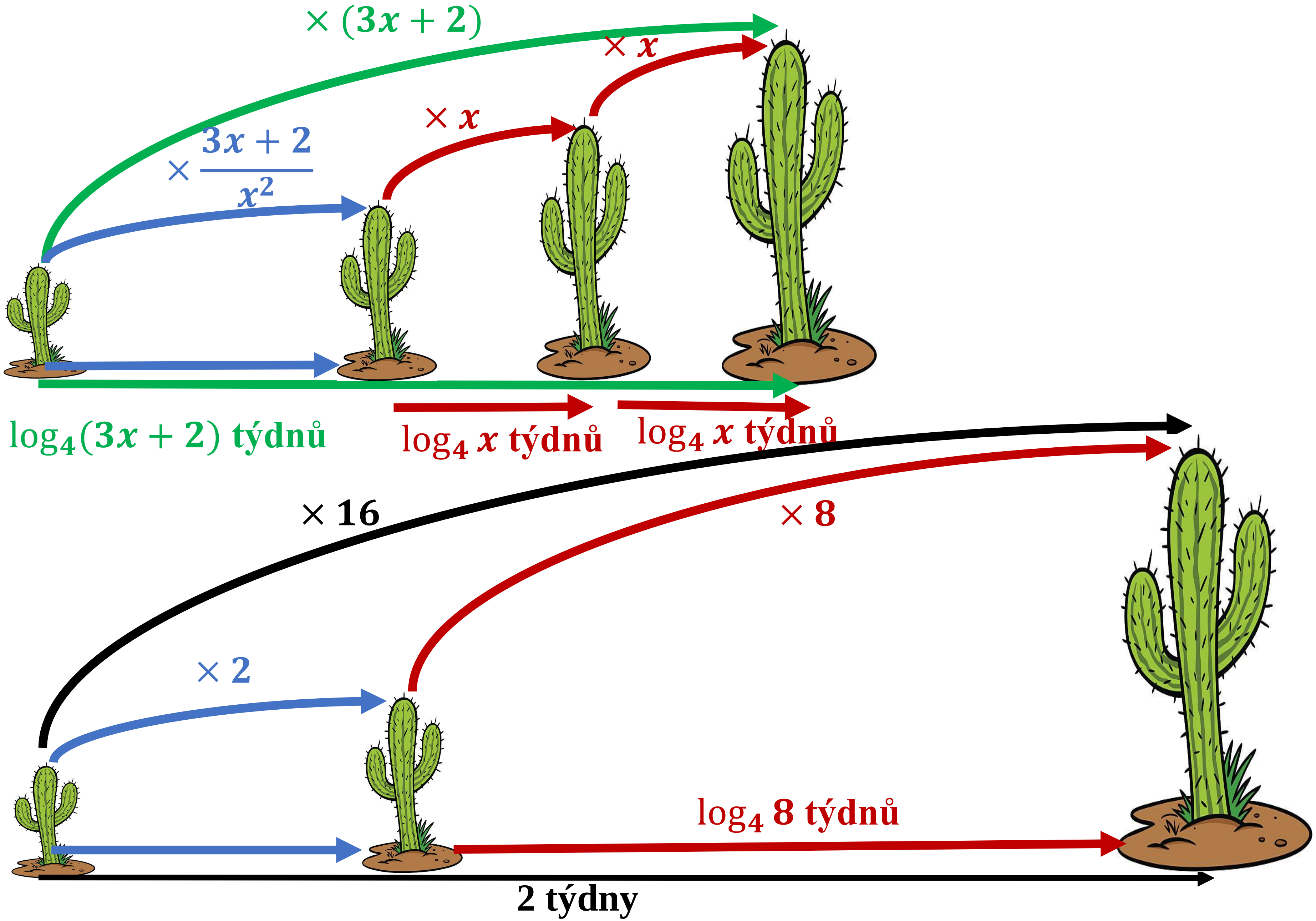
$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$



$$\log_4(3x+2) - 2\log_4 x = 2 - \log_4 8$$





$$\frac{3x+2}{x^2} = 2$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \times$$

(Homework) Explain whether the topics covered in these three sessions changed your perspective on logarithms. What new things did you learn?

(Domácí úkol) Vysvětlete, zda témata probíraná během těchto tří lekce změnila váš pohled na logaritmy. Jaké nové poznatky jste získali?

References

Borji, V., Surynková, P., Kuper, E., & Robová, J. (2024). Using contextual problems to develop preservice mathematics teachers' understanding of exponential and logarithmic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2309284

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 211–230. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Díaz-Berrios, T., & Martínez-Planell, R. (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, Article 100953. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953

Euler, L. (1984). *Elements of algebra*. (J. Hewlet, Trans.). Springer. (Original work published 1770).

Kuper, E., & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, *57*, Article 100740. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Webb, D. C., van der Kooij, H., & Geist, M. R. (2011). Design research in the Netherlands: Introducing logarithms using realistic mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *2*(1), 47–52. https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.708

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz