



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #3

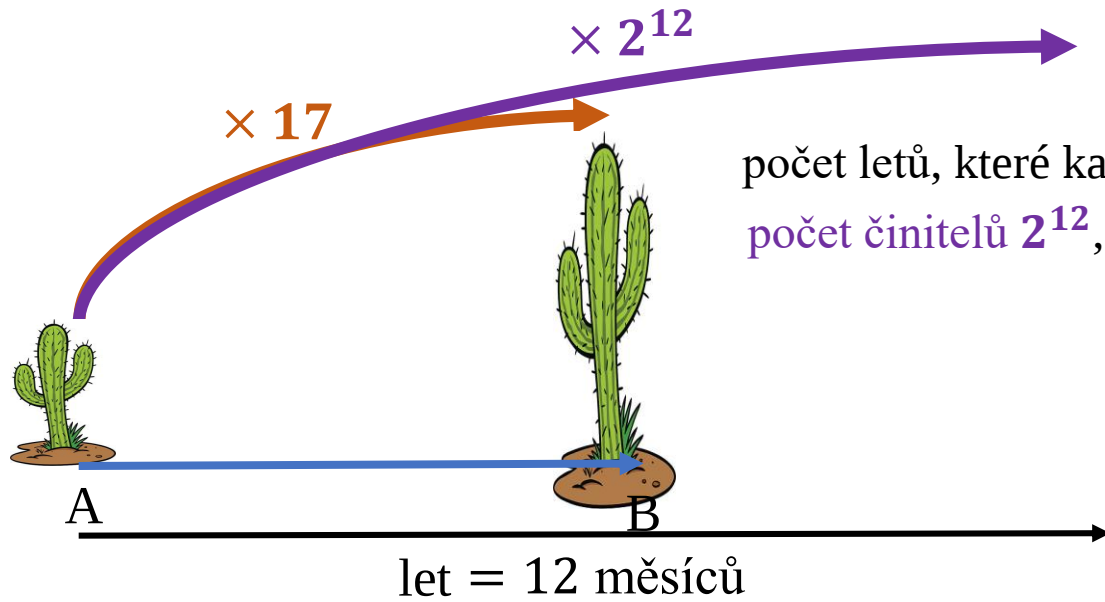
Vahid Borji & Petra Surynková

$$\log_{y^a} x = \frac{1}{a} \log_y x$$

Domácí úkol: Máme kaktus, jehož výška se každý měsíc zdvojnásobí. Pomocí tohoto kaktusu, navrhnete jednoduchý slovní úkol, který ukáže, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12} \log_2 17$ platí.

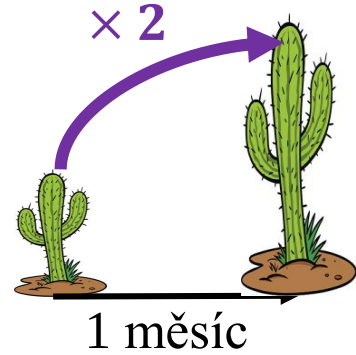
Nápověda: Musíte odpovědět na svůj slovní úkol dvěma různými způsoby. V prvním způsobu musíte získat jako odpověď $\log_{2^{12}} 17$. V druhém způsobu musíte získat $\frac{1}{12} \log_2 17$. Jelikož má slovní úkol pouze jednu správnou odpověď, můžete uzavřít, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12} \log_2 17$ platí.

Máme kaktus, jehož výška se každý měsíc zdvojnásobí. Určete počet let, které kaktus potřebuje k dosažení sedmnáctinásobku své výšky.

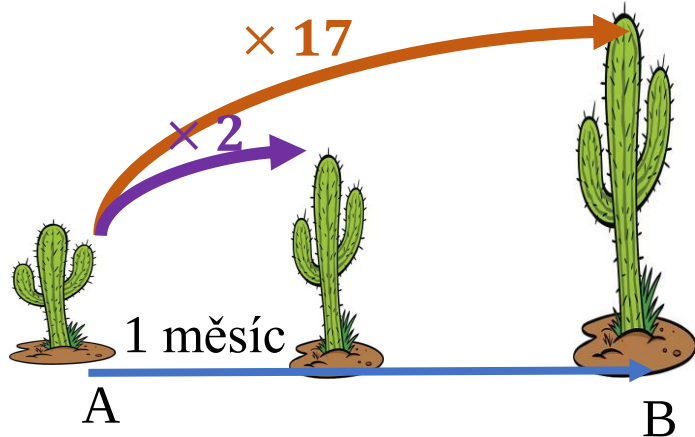


počet letů, které kaktus potřebuje k dosažení **17-násobku** své výšky.
 počet činitelů 2^{12} , které máme v čísle 17

$$\log_{2^{12}} 17 \text{ letů}$$

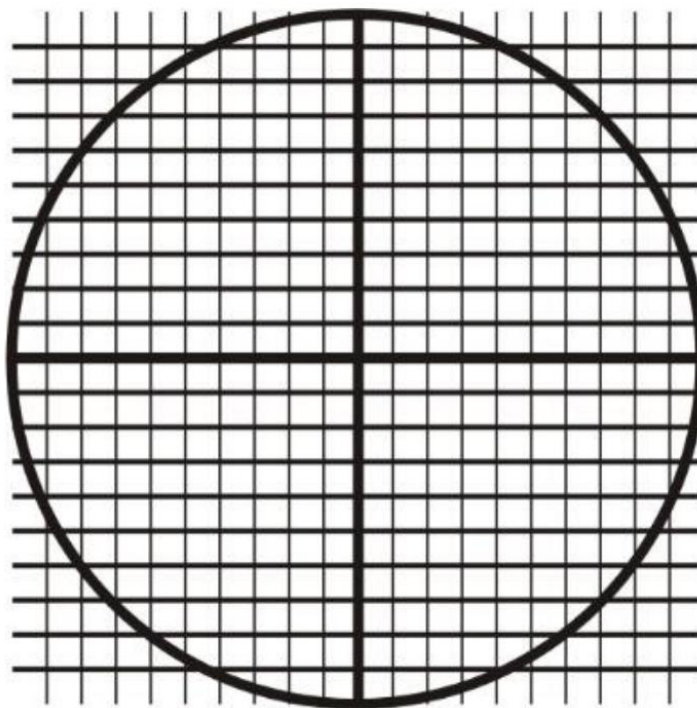


$$\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12} \log_2 17$$



$$\log_2 17 \text{ měsíců} \longrightarrow \frac{1}{12} \log_2 17 \text{ letů}$$

Goniometrické funkce a jejich inverze podle jednotkové kružnice



$$\sin x$$

$$\cos x$$

$$\sin^{-1} x$$

$$\cos^{-1} x$$

Určete hodnotu $\sin 30$?

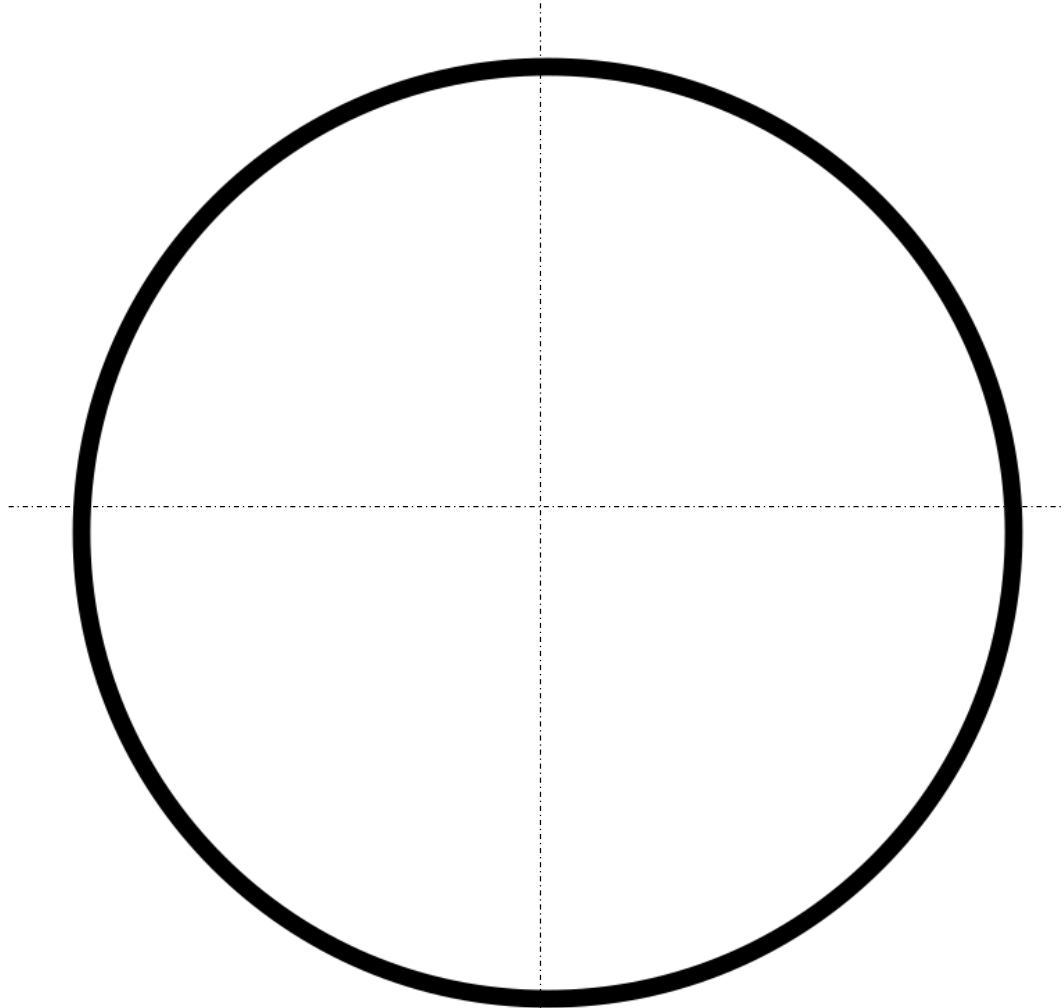
Určete hodnotu $\sin 30^\circ$? $\frac{1}{2}$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30 \approx -0.9$$

Načrtněte uvedené úhly na jednotkové kružnici:

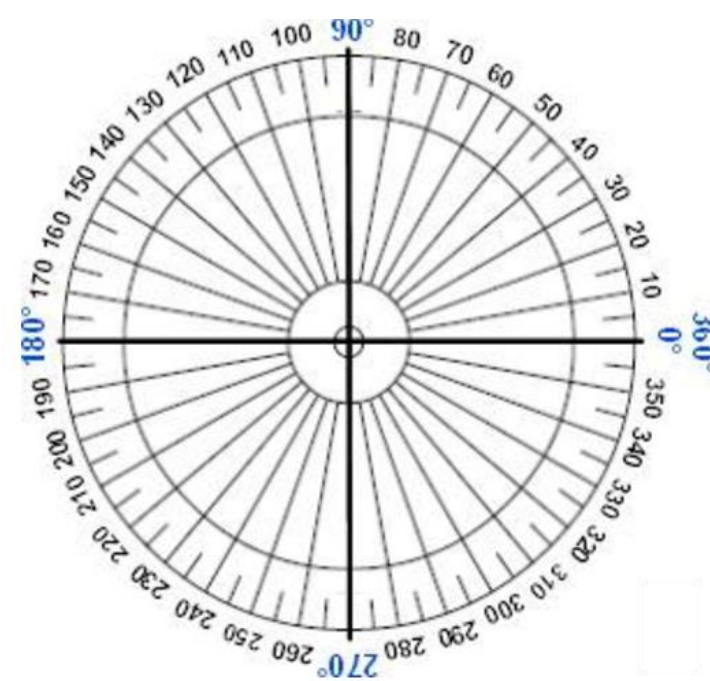
20° , $\frac{\pi}{2}$ radiánů, 4 radiány ?



Velikost úhlu můžeme měřit ve dvou mírách:

✓ Stupeň (značka $^{\circ}$)

✓ Radián ?



Mylné představy o radiánech:

Někteří studenti si myslí, že když mluvíme o úhlu v radiánech, MUSÍ zahrnovat π .



Někteří studenti si myslí, že π je jednotka měření v radiánech.

$$1 \text{ radián} = 1\pi$$



$$4 \text{ radiány} = 4\pi$$



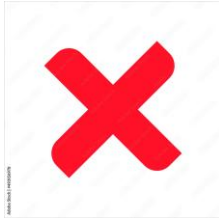
Další obtíže při učení goniometrických funkcí:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin 2 \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 40 \quad \cos \pi = -1$$

$$\sin x = 1$$


$$\cos x = \frac{1}{3}$$


$$\cos x = \frac{1}{2}$$


$$\sin x = \frac{1}{5}$$


	$\theta = 0$ (0°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$\pi/2$ (90°)
$\sin \theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\tan \theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Vědí, že $\sin \frac{\pi}{2}$ je 1, ale nevědí PROČ!

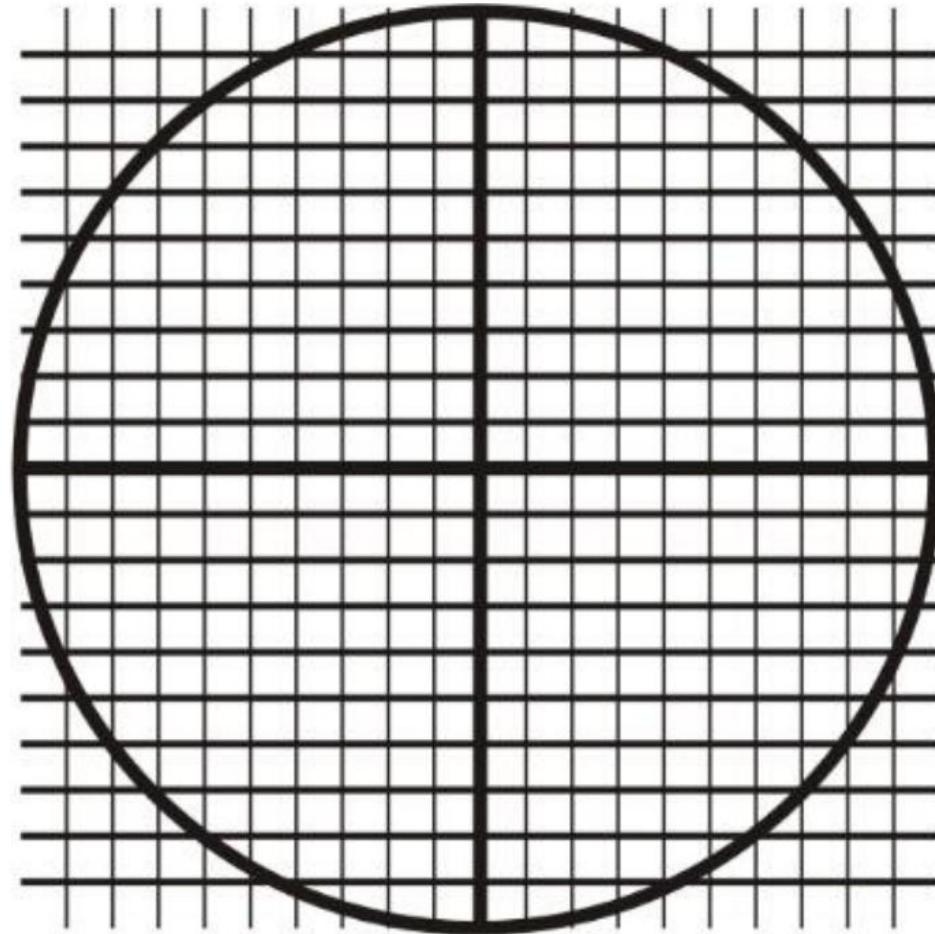
Vědí, že $\cos \pi$ je -1 , ale nevědí PROČ!

Naším cílem je pomoci studentům dosáhnout **konceptuální porozumění** následujícím tématům:

- 1) úhly vyjádřené v radiánech,
- 2) výpočet hodnot funkcí sinus a kosinus pro libovolný úhel (např. $\sin 2$, $\cos 100$) bez použití kalkulačky,
- 3) výpočet inverzních funkcí arcsin a arccos bez použití kalkulačky.

Základní znalost kružnice:

- 1 a. Pomocí stuhy, změřte (co nejpřesněji) počet poloměrů (radiánů) v obvodu půlkružnice.
Jaký je vztah mezi tímto číslem a hodnotou π ?



b. Dostanete stejný výsledek, pokud použijete jinou kružnici (se stuhou v jednotkách poloměru druhé kružnice)?

c. Podle měření, které jste získali v předchozí části, kolik poloměrů přibližně je na obvodu kružnice?

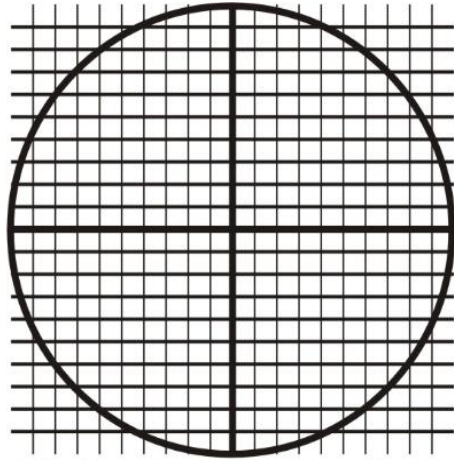
d. Vysvětlete vztah mezi tím, co jste dělali v předchozích částech, a známým vzorcem $o = 2\pi r$.

Konstrukce funkcí sinus a kosinus na základě myšlenek jednotkové kružnice:

- 1) Proces $t \rightarrow P(t)$
- 2) Proces projekce

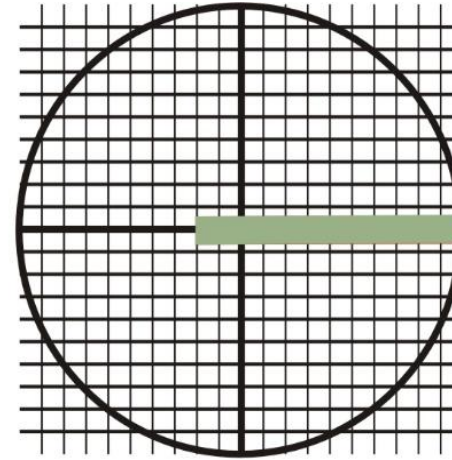
$$t \rightarrow P(t)$$

$$1,2 \rightarrow P(1,2)$$

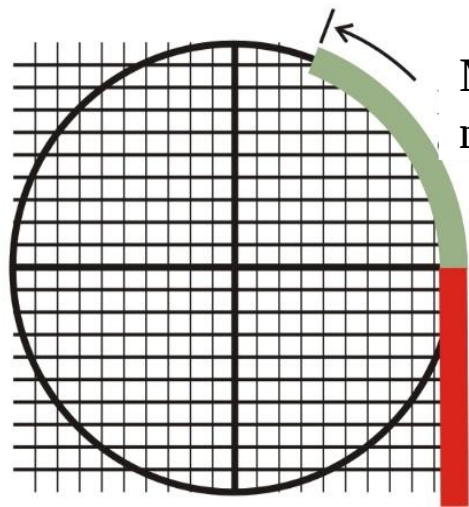


Jednotková kružnice v měřítku 1 poloměr. Každý čtverec má strany o délce 1/10 poloměru.

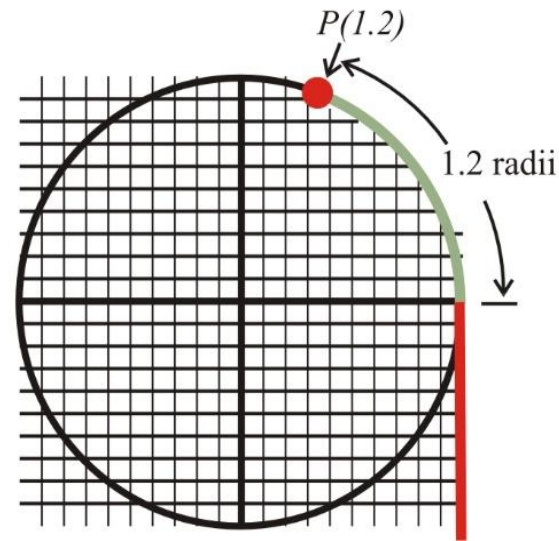
Stuha



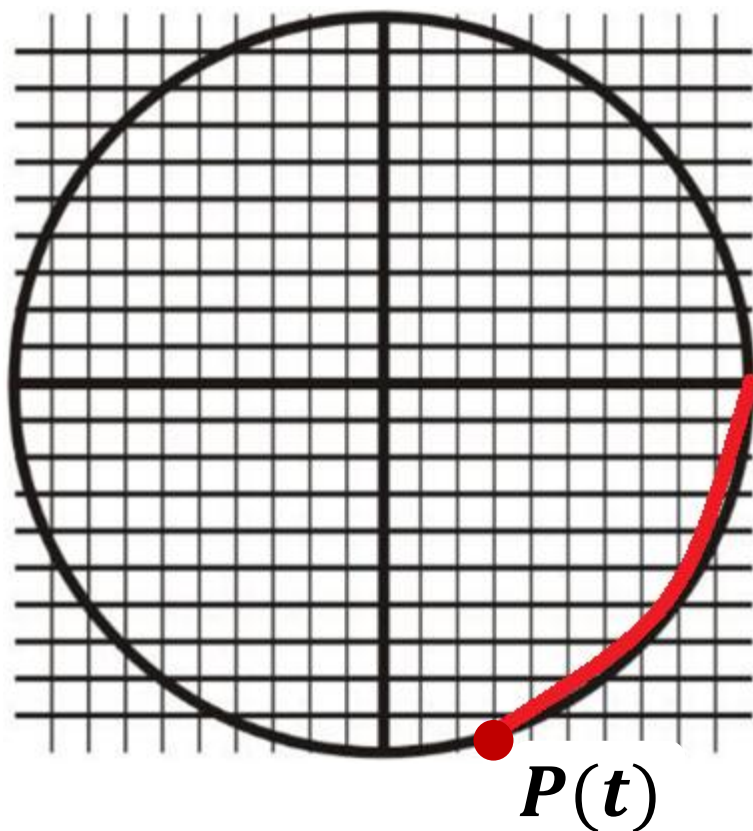
Změřte 1,2 radiánů pomocí stuhy



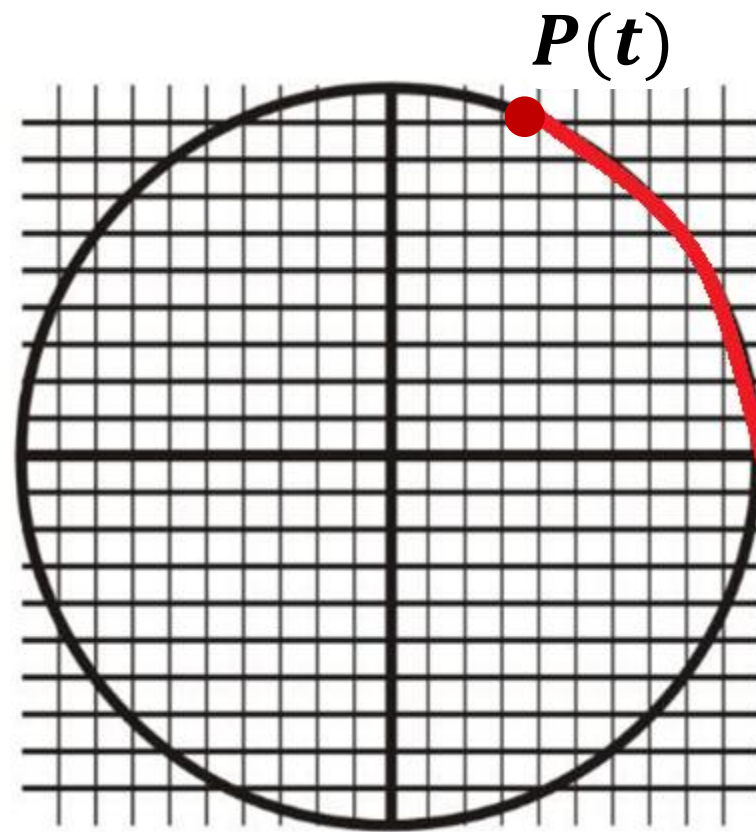
Míra 1,2 radiánů na stuhu



- Pokud $t \geq 0$, oblouk se měří **proti směru hodinových ručiček** a pokud $t < 0$, oblouk se měří **ve směru hodinových ručiček**. Bod, ve kterém skončíte, je $P(t)$.



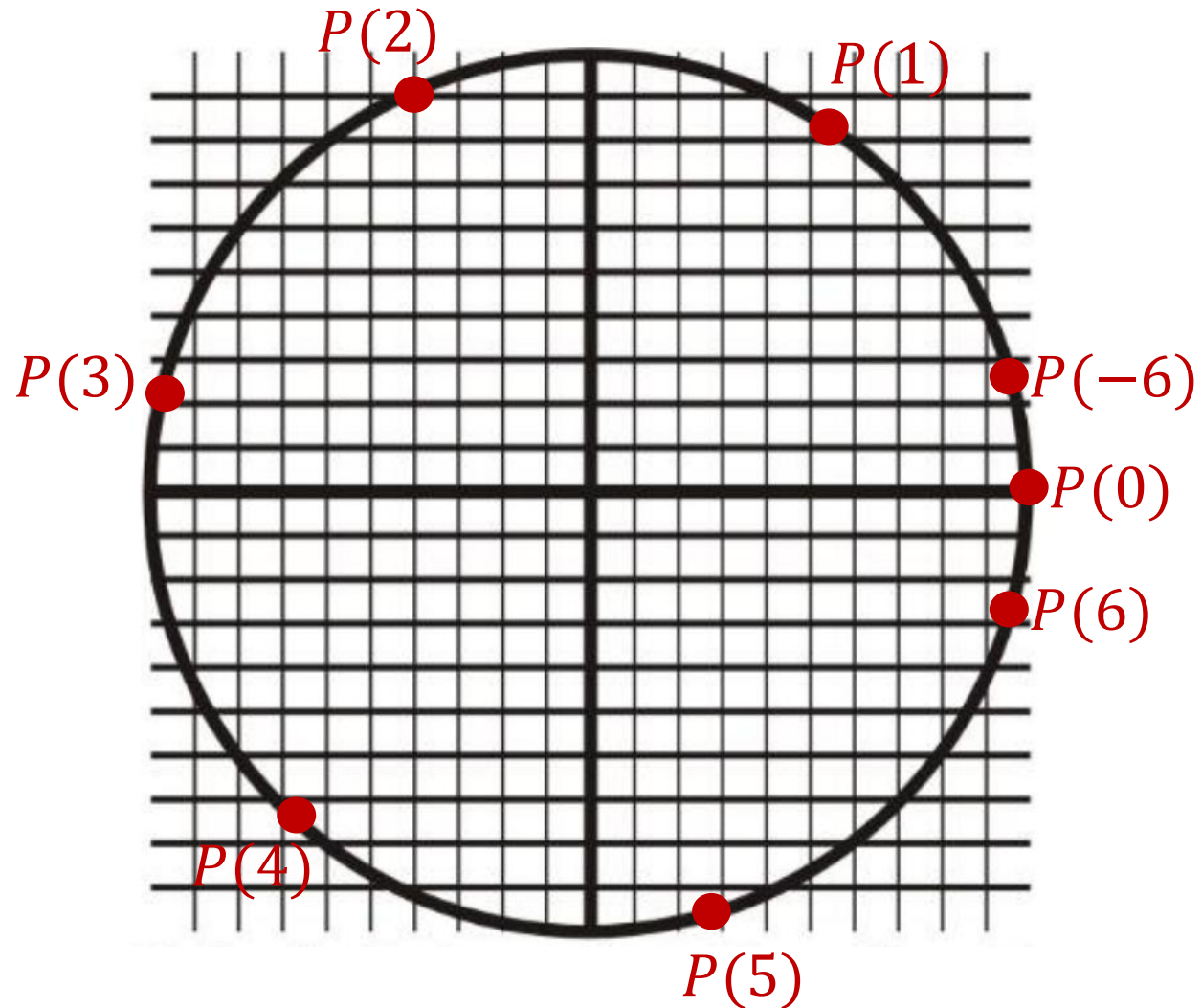
Pokud $t < 0$



Pokud
 $t \geq 0$

2. V každém z následujících problémů, pomocí kružnice a kousku stuhy co nejpřesněji najděte bod $P(t)$ na kružnici určené daným číslem t (v jednotkách radiánů). (Nápověda: všimněte si, že každý čtverec sítě má strany, které měří $1/10$ poloměru.)

- | | |
|--------------|-----------------|
| a) 0 radiánů | b) 1 radián |
| c) 2 radiány | d) 3 radiány |
| e) 4 radiány | f) 5 radiánů |
| g) 6 radiánů | h) -6 radiánů |



3. Pro každou hodnotu t najděte na kružnici bod $P(t)$, který jí odpovídá. (Pamatujte si, že půlkružnice má délku π krát poloměr).

a) 1 radián

b) $(1 + \pi)$ radiánů

c) $(1 - \pi)$ radiánů

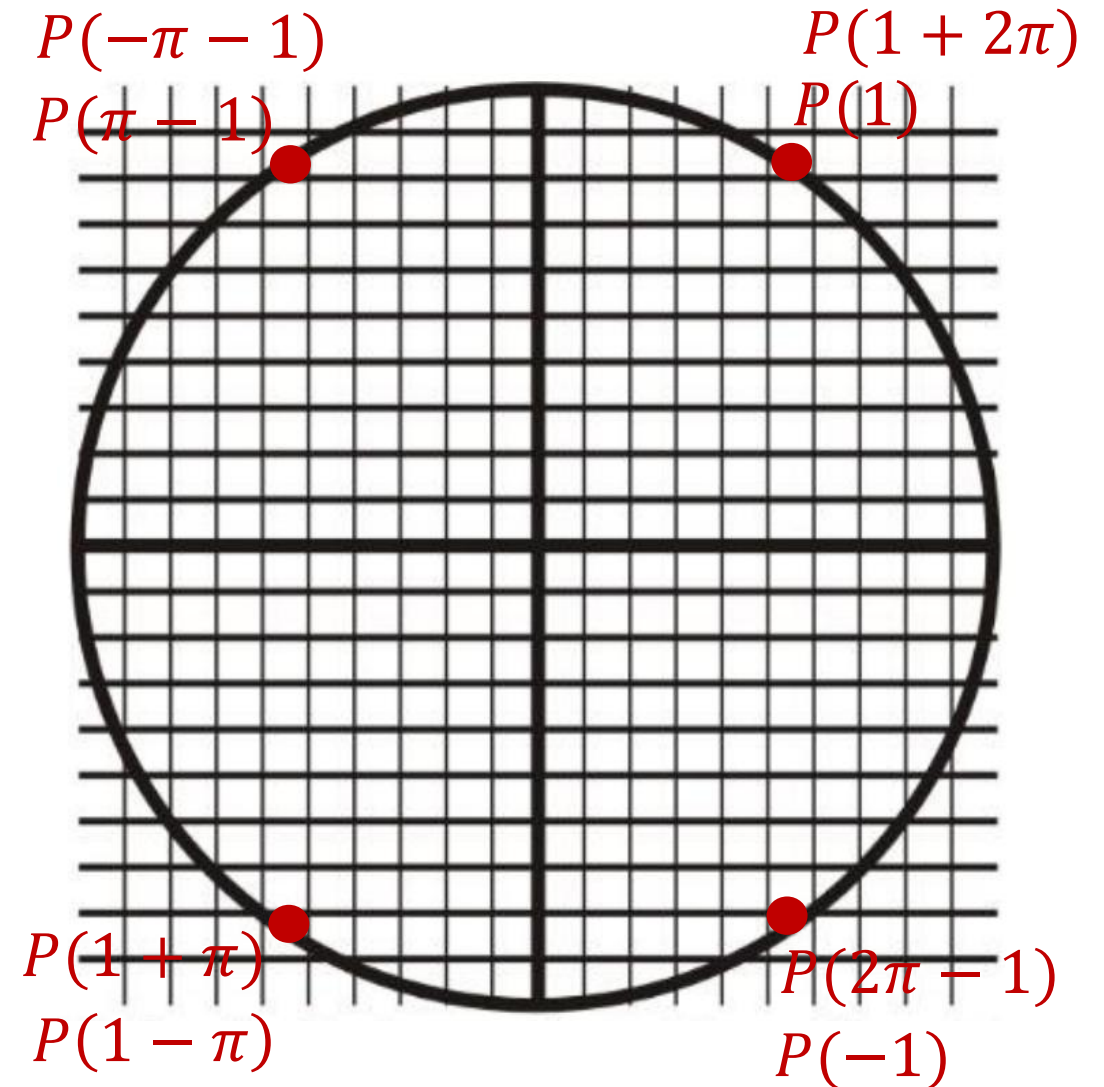
d) $(1 + 2\pi)$ radiánů

e) $(\pi - 1)$ radiánů

f) $(2\pi - 1)$ radiánů

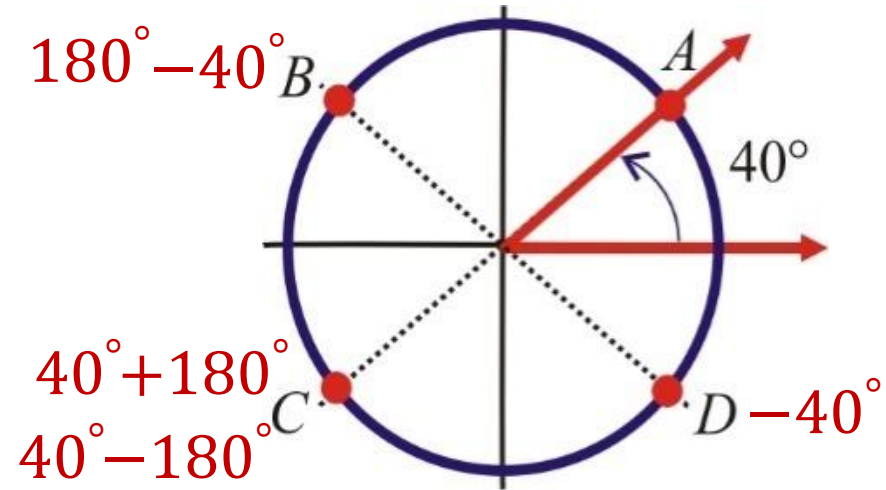
g) -1 radián

h) $(-1 - \pi)$ radiánů

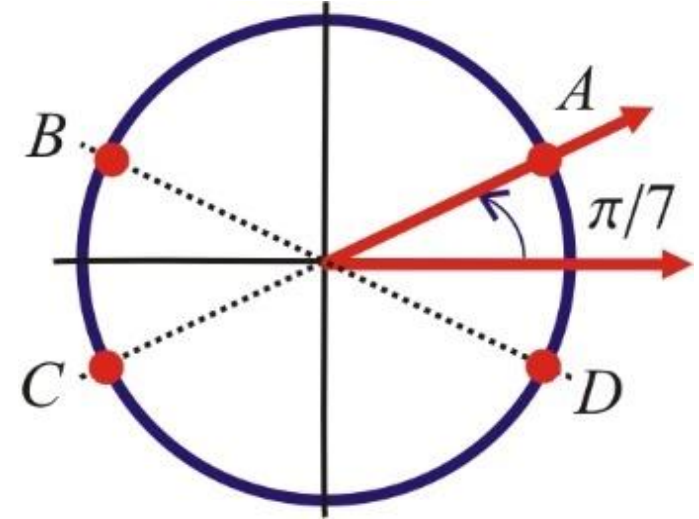


4. Každý bod na kružnici určuje tři další body na kružnici pomocí souměrností podle osy x a y nebo rotace o 180° . V každém z následujících případů napište úhel, který určuje každý z bodů A, B, C, D.

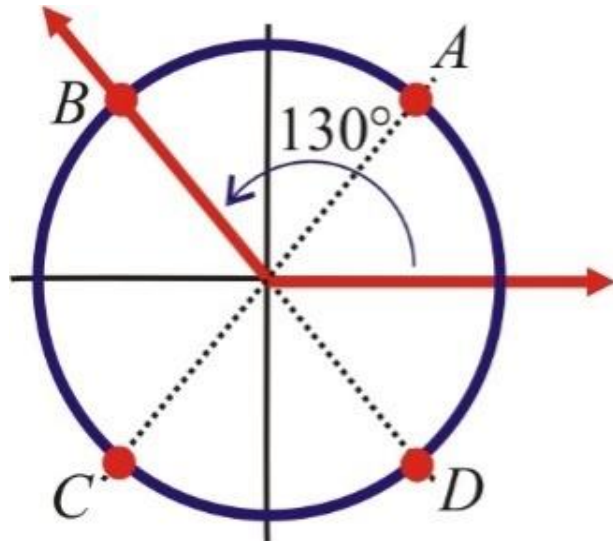
a.



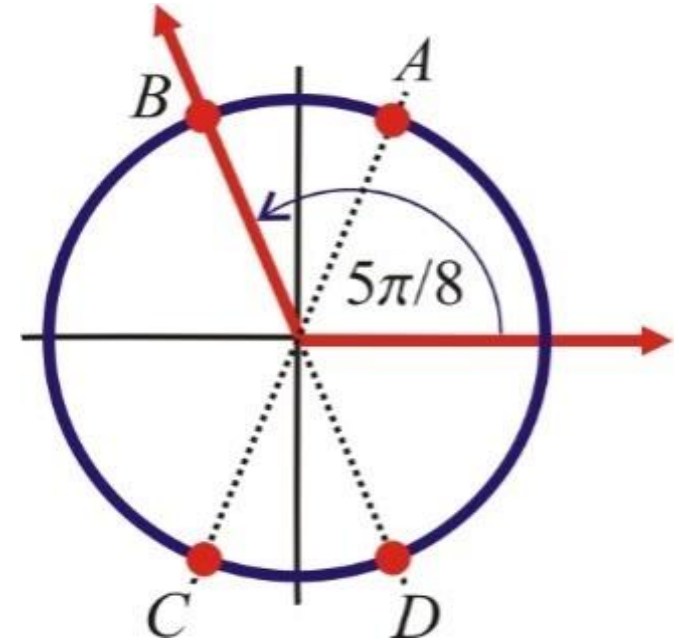
b.



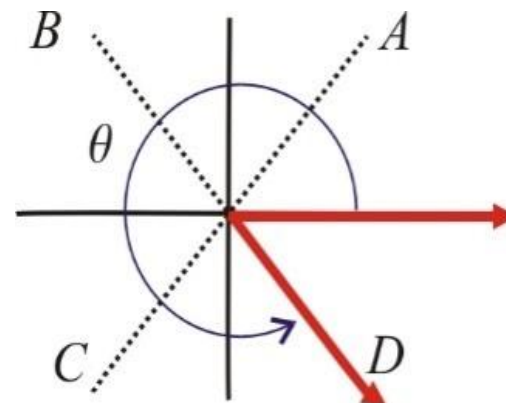
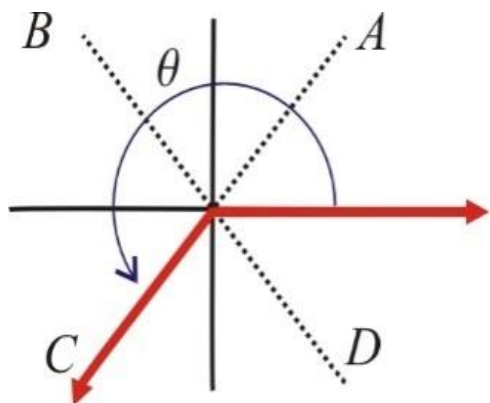
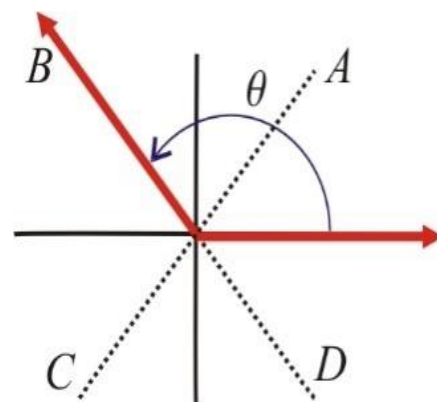
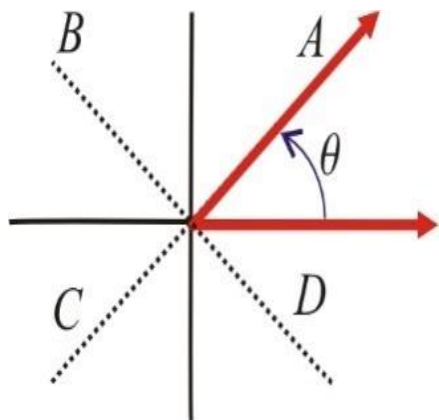
c.



d.

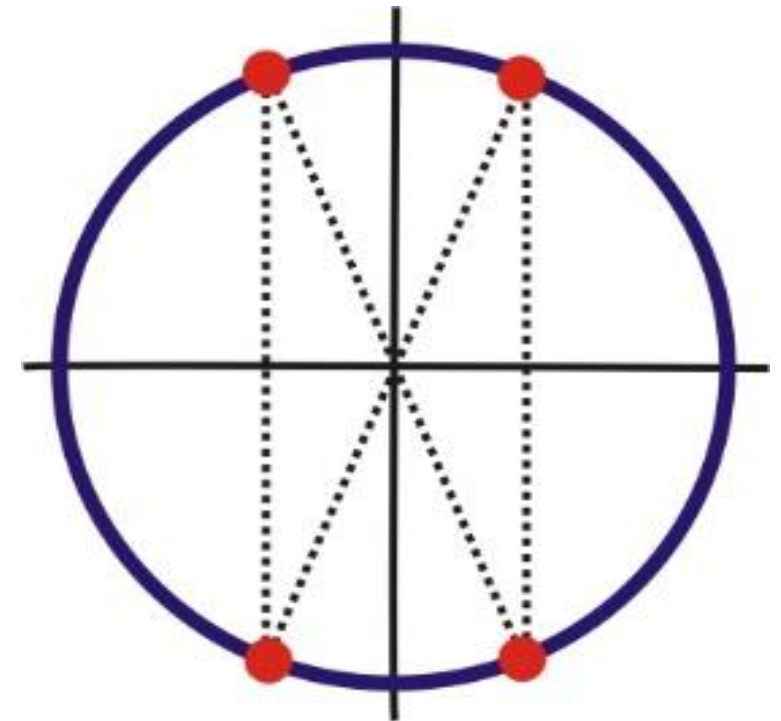


5. V každém z následujících případů je dán úhel (předpokládáme, že θ je v radiánech). Uveďte úhly A, B, C, D v radiánech v závislosti na θ .



6. Pro libovolnou [jakoukoli] hodnotu t vysvětlete následující vztah v termínech souměrnosti podle osy x a y nebo rotace o 180°]. Pomocí obrázku níže si můžete vysvětlit, že vztah je stejný bez ohledu na to, v jakém kvadrantu se nachází $P(t)$ (náповěda: vložte $P(t)$ na jedno ze čtyř míst a poté najděte umístění druhého).

- a. (by teacher) Jaký je vztah mezi $P(t)$ a $P(-t)$? Tyto dva body jsou souměrné podle osy x .
- b. (in class) Jaký je vztah mezi $P(t)$ a $P(\pi - t)$?
- c. (in class) Jaký je vztah mezi $P(t)$ a $P(2\pi - t)$?
- d. (exercise) Jaký je vztah mezi $P(t)$ a $P(t + \pi)$?

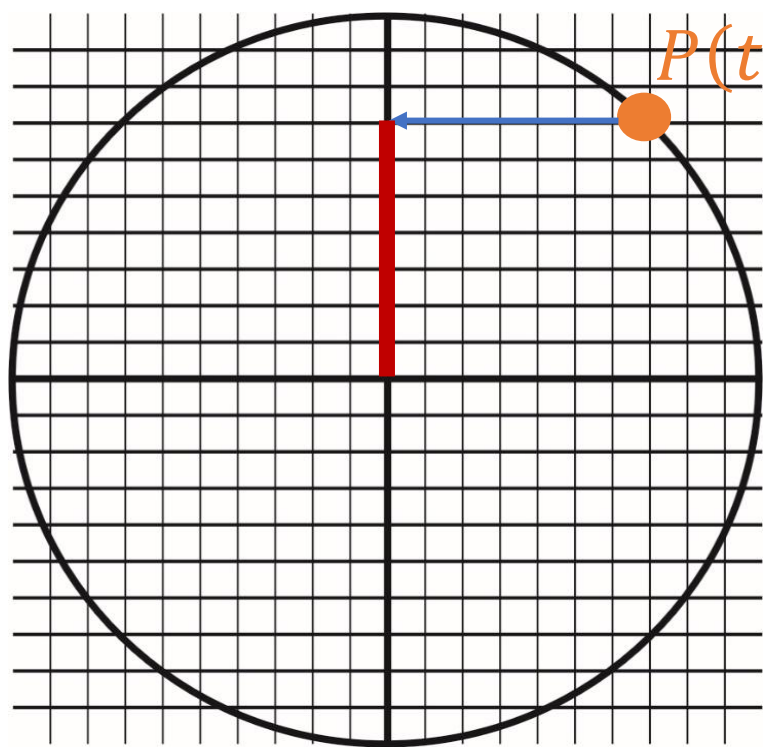


Projekce na osu y :

Nechť $P(t) = [a, b]$ je bod na kružnici se středem v počátku (předpokládejme, že a a b jsou měřeny v nějakých jednotkách [cm, mm, ...]).

Projekcí bodu $P(t) = [a, b]$ na osu y (v jednotkách poloměru) získáme zlomek $\frac{b}{r}$.

Jeho grafická reprezentace zahrnuje šipku a tmavý svislý segment:

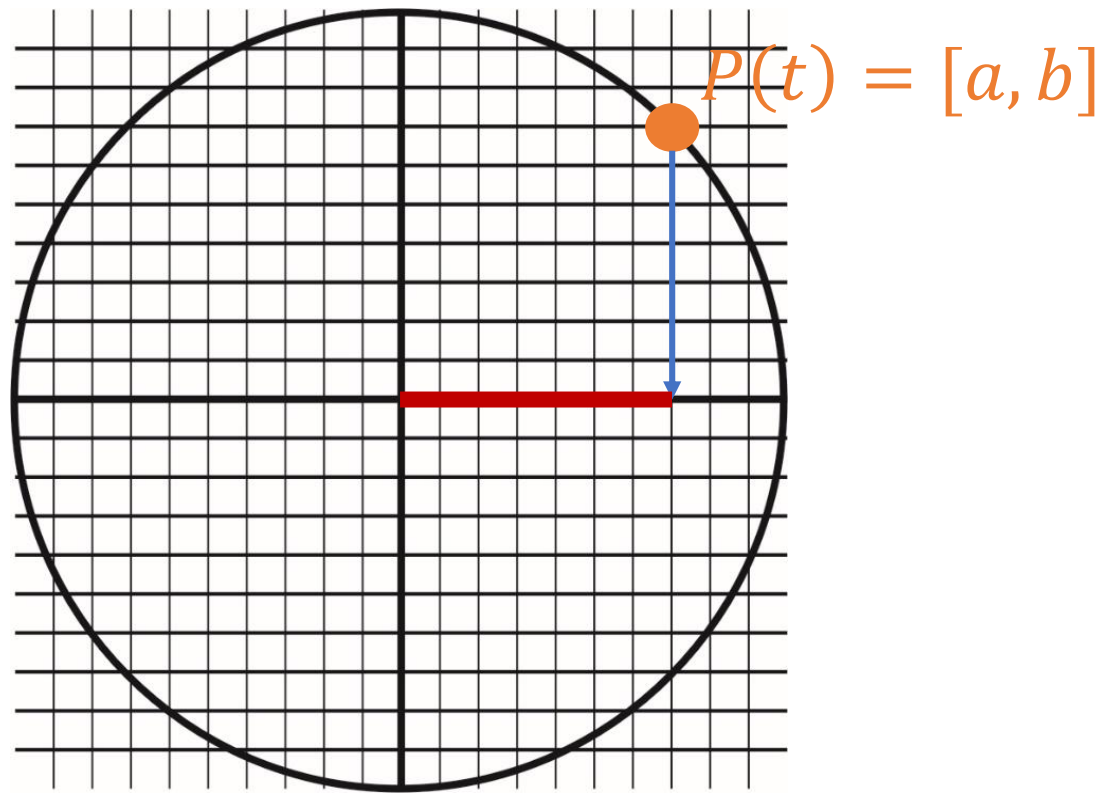


$$\text{zlomek} = \frac{b}{\text{poloměr}} = \frac{b}{r}$$

Projekce na osu x:

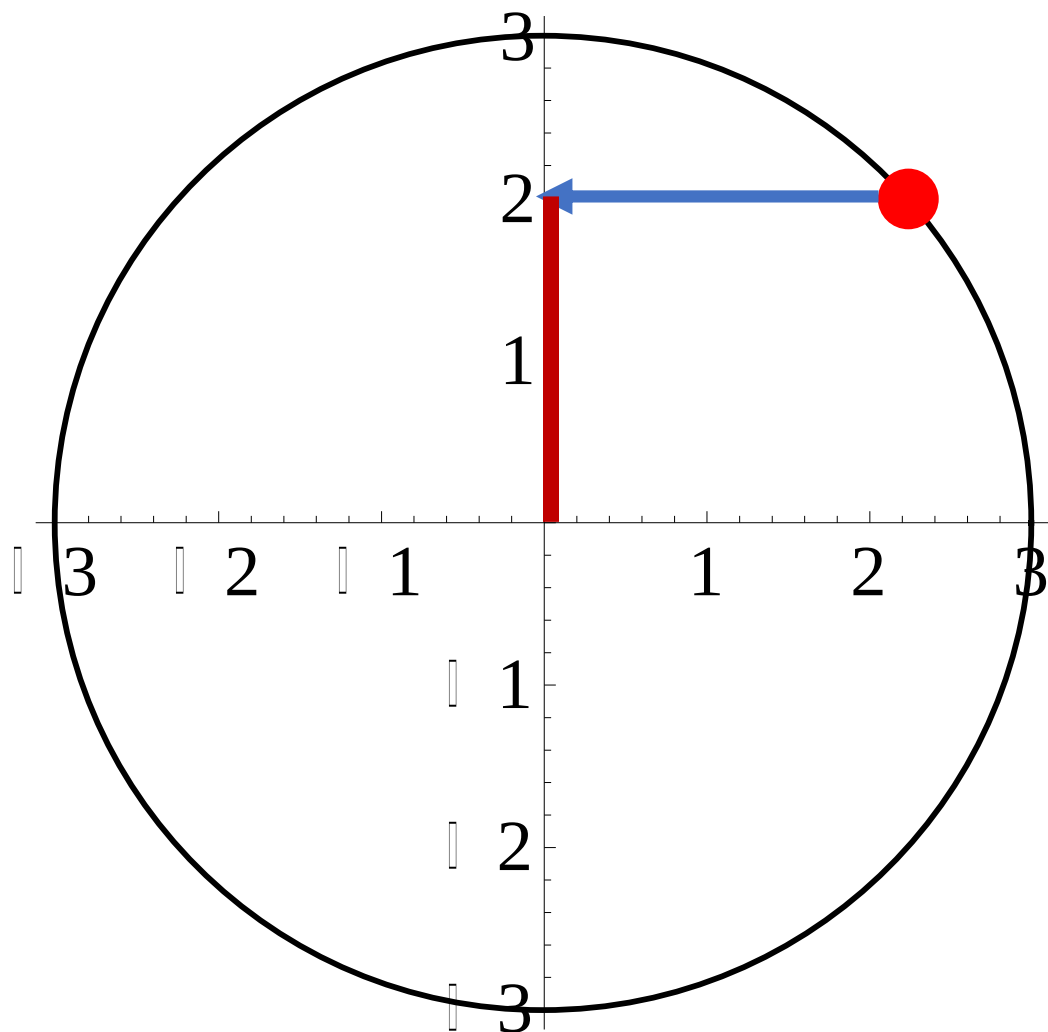
Projekcí na osu x získáme a/r .

$$\text{zlomek} = \frac{a}{\text{poloměr}} = \frac{a}{r}$$

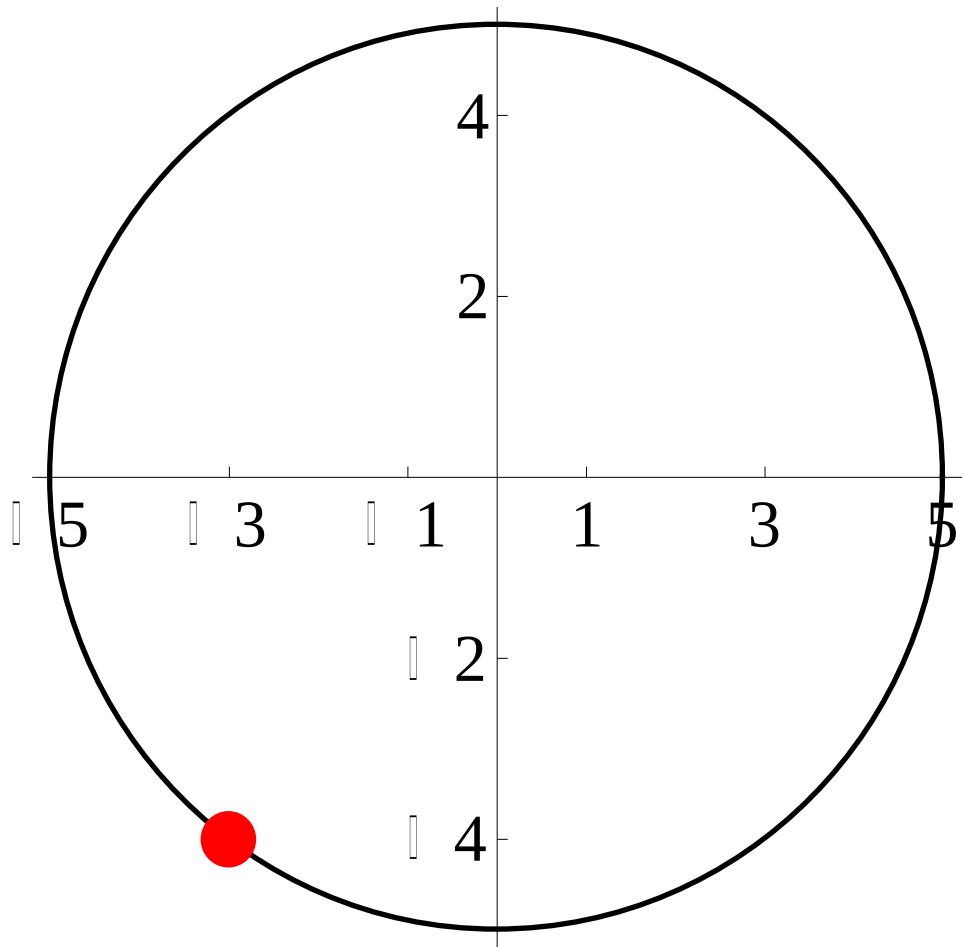


7. V každém z následujících případů znázorněte graficky (přidejte šipku a tmavý svislý segment) a pomocí projekce najděte číslo [zlomek poloměru] odpovídající danému bodu P(t) na ose y.

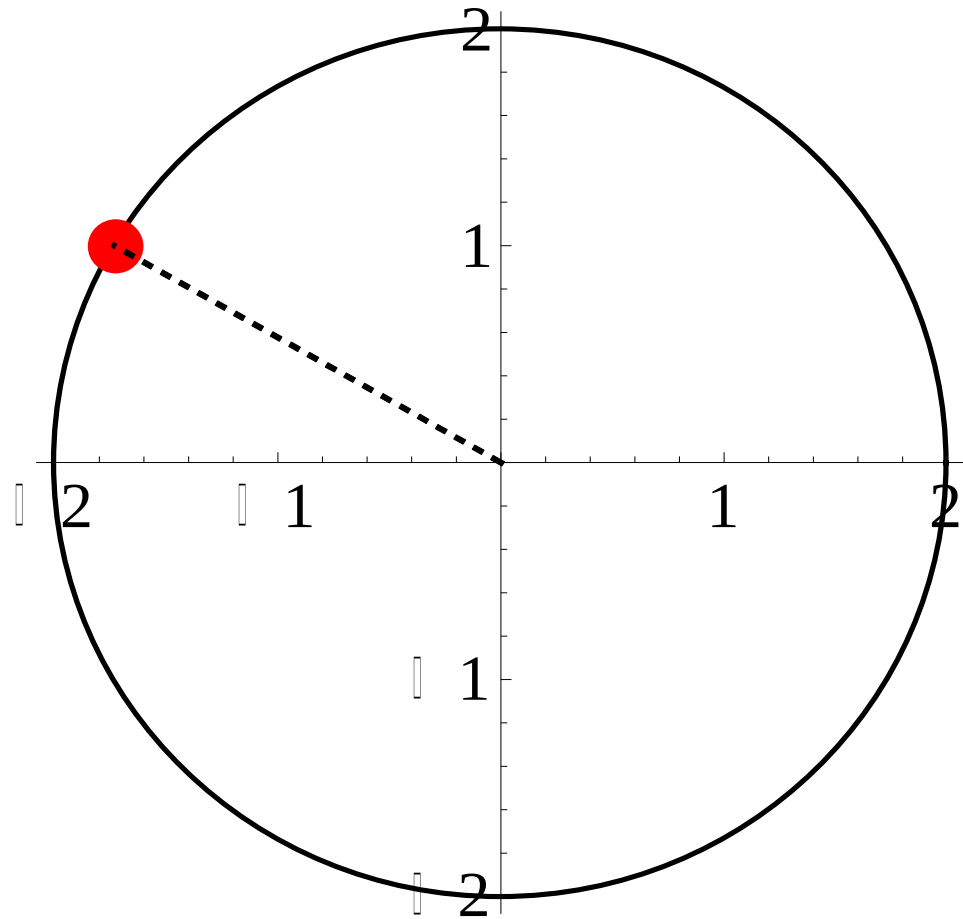
a)



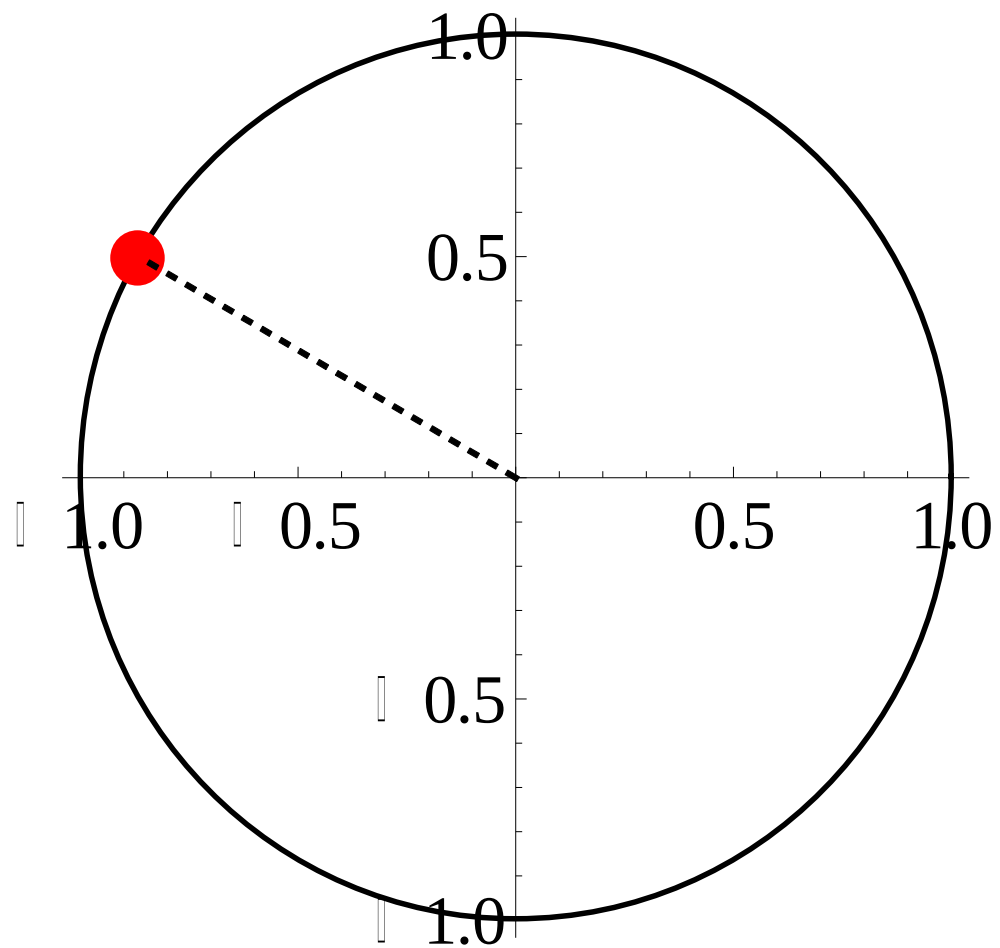
$$\text{zlomek} = \frac{2}{3}$$



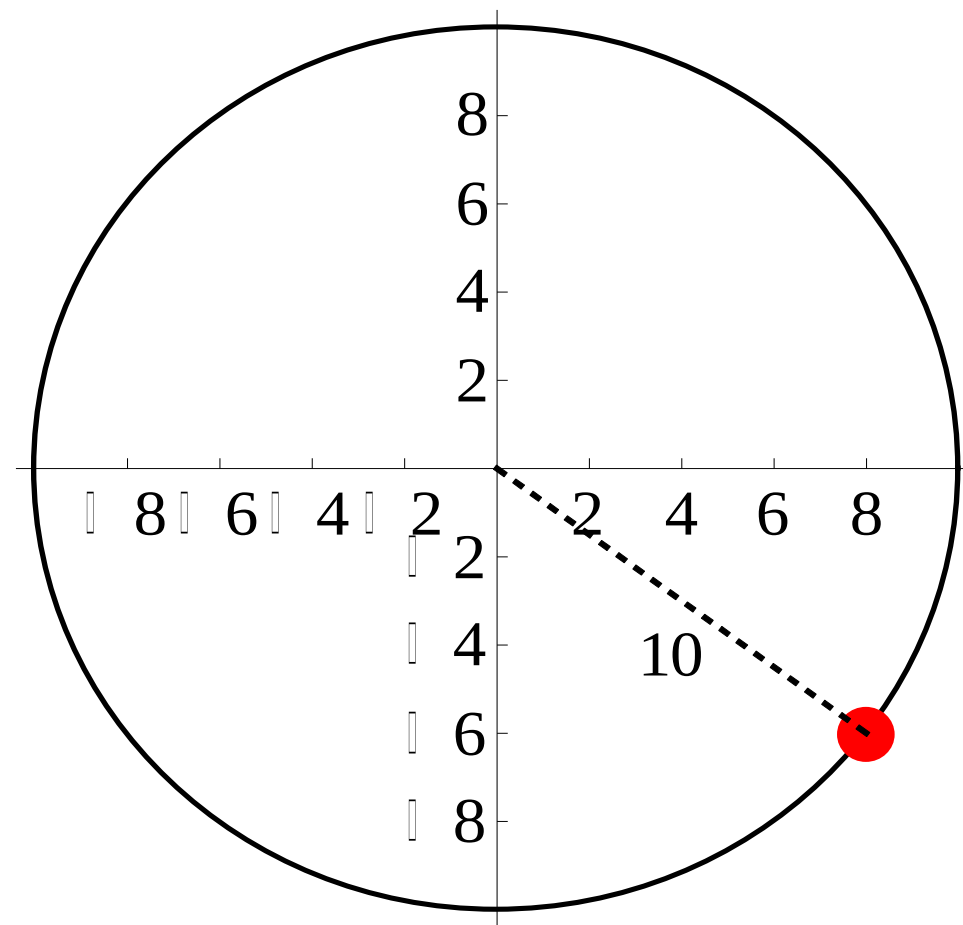
b)



c)

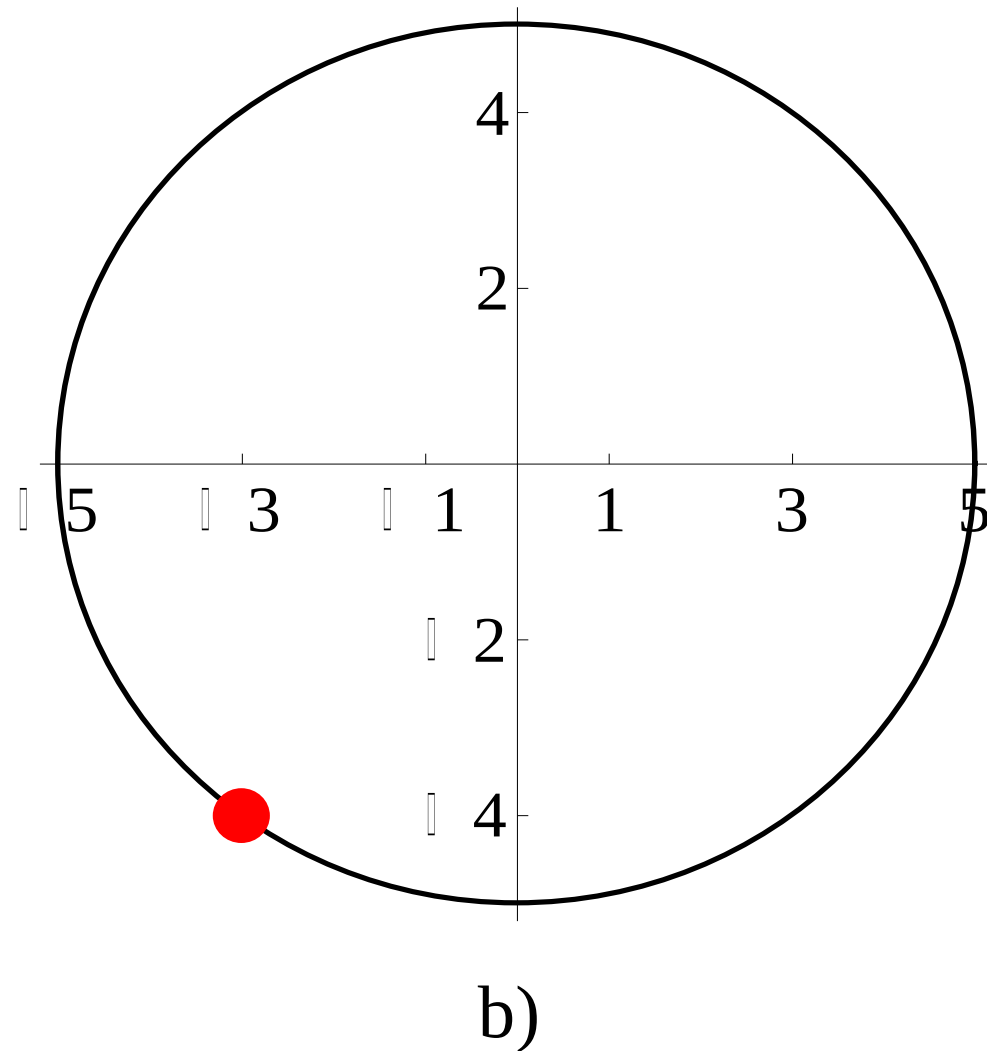
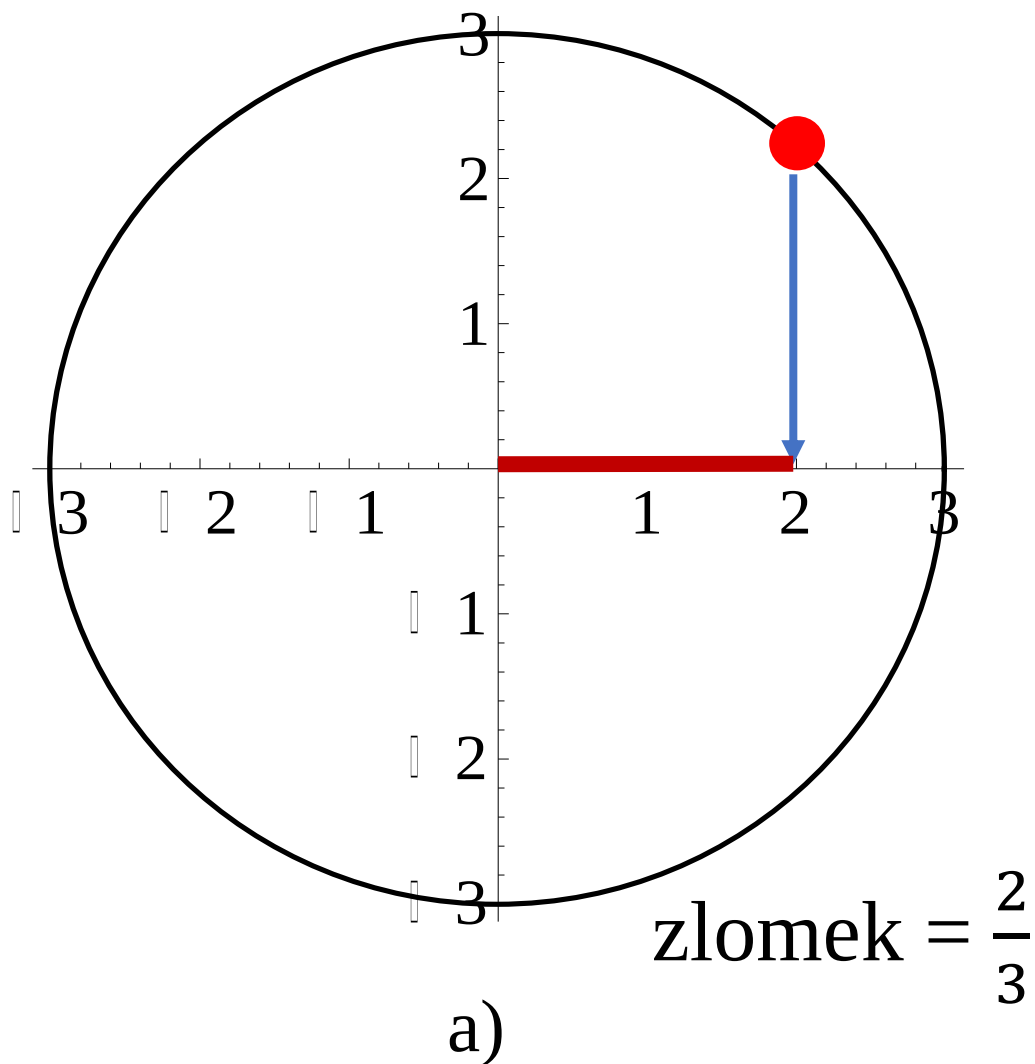


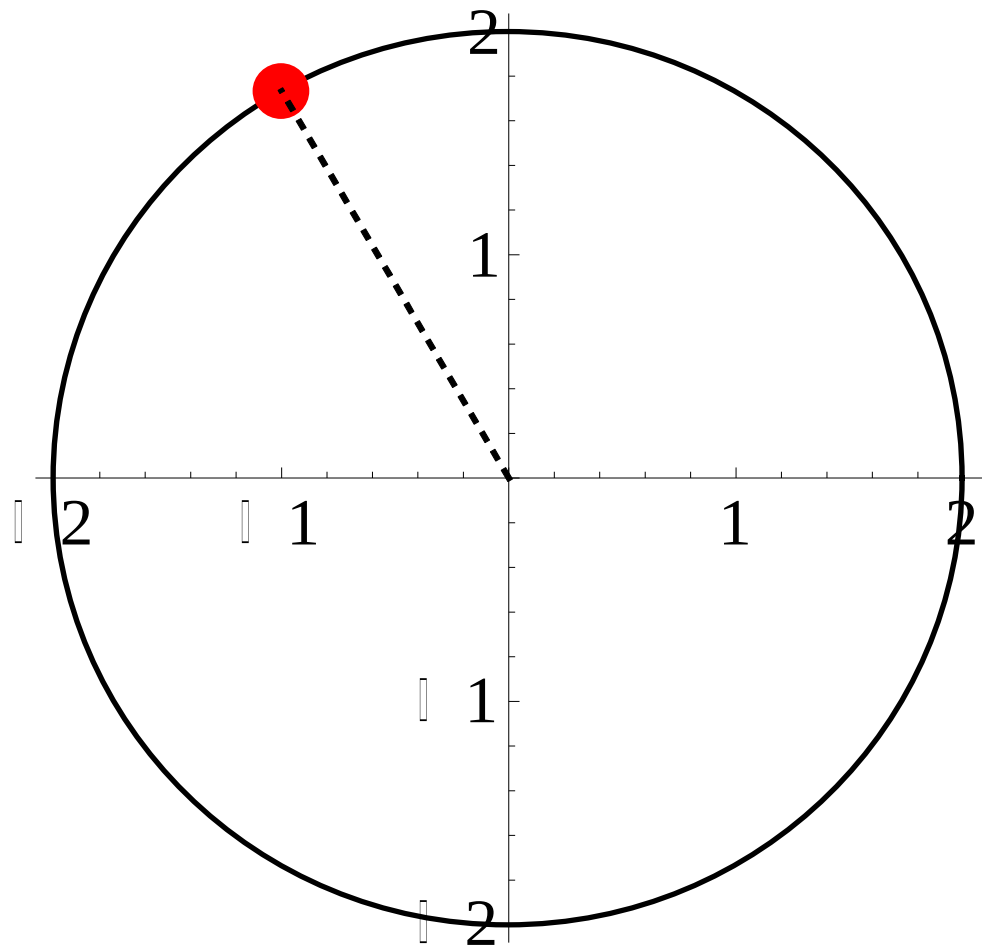
d)



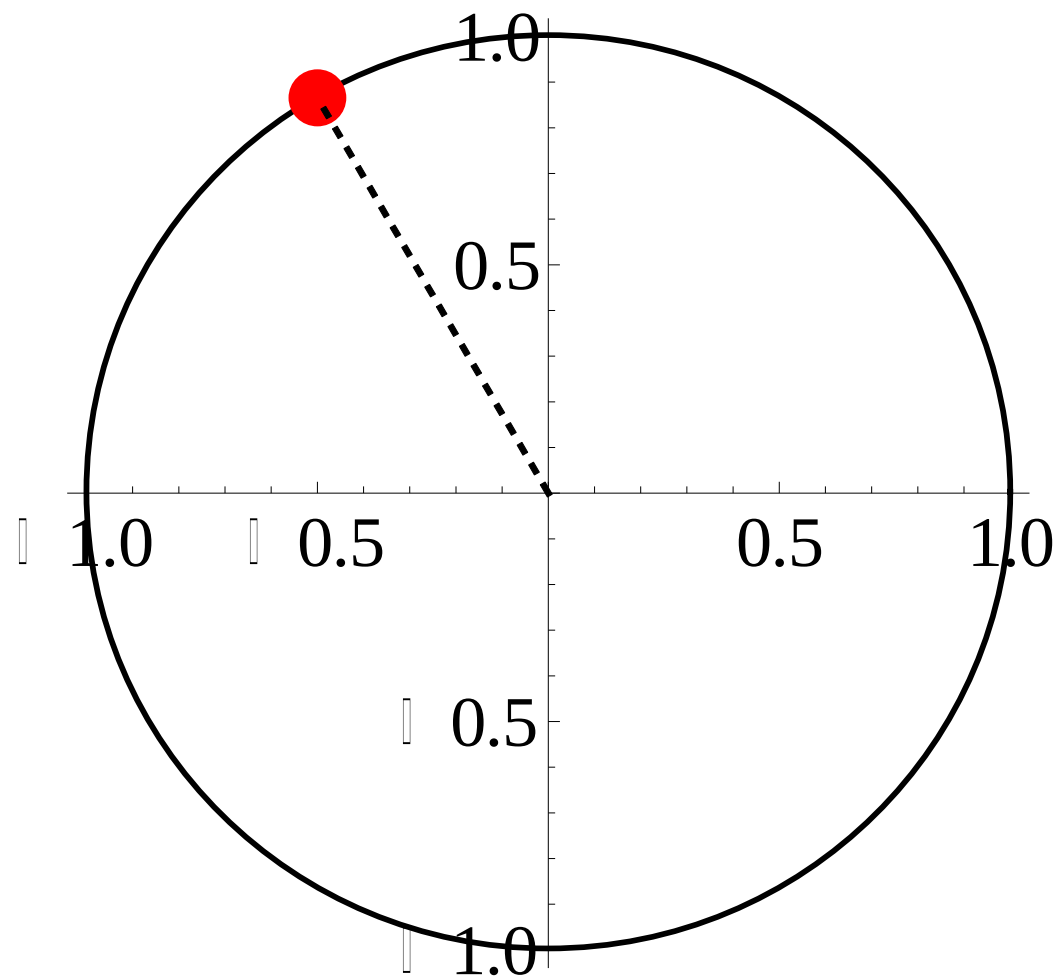
e)

8. V každém z následujících případů pomocí projekce znázorněte graficky (přidejte šipku a tmavý vodorovný segment) a najděte číslo [zlomek poloměru] odpovídající danému bodu P(t) na ose x .

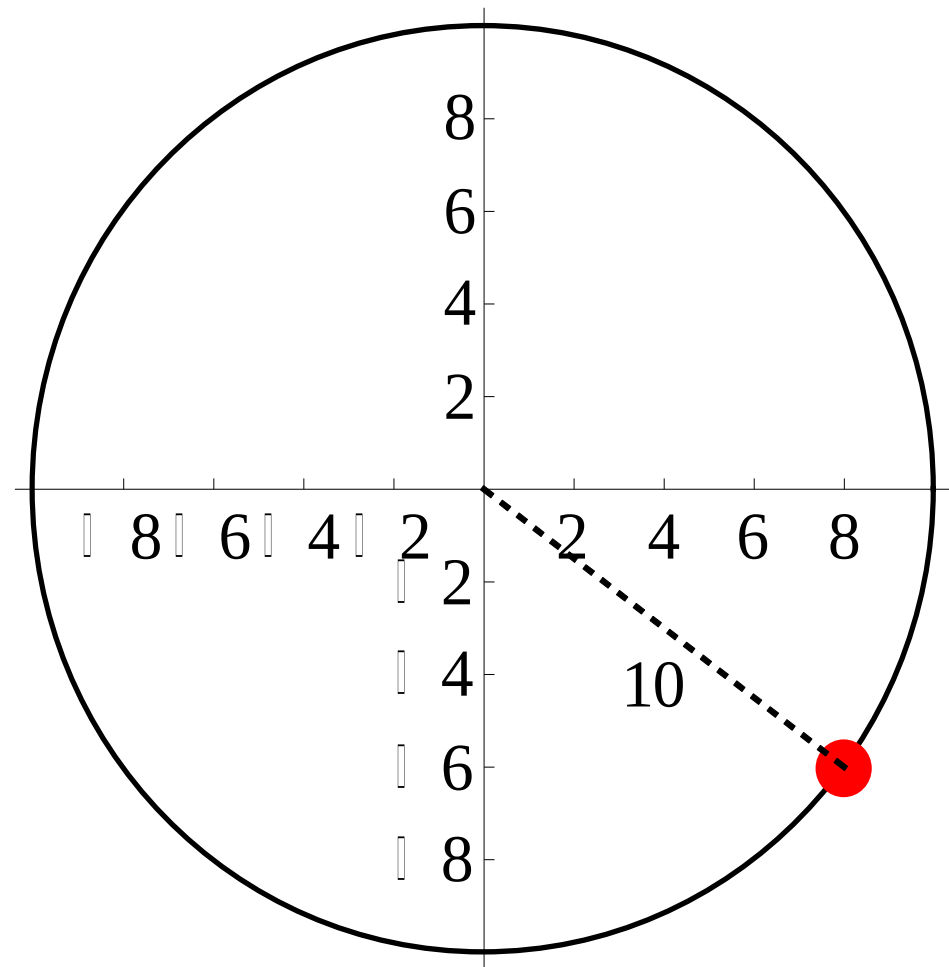




c)



d)



e)

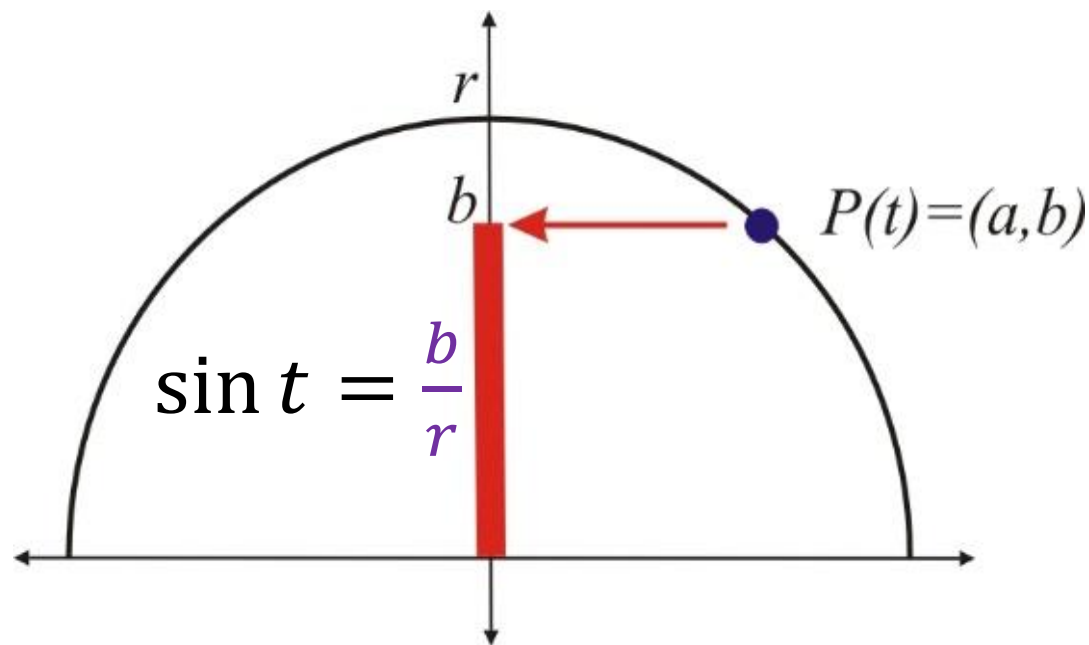
Definice sinu:

Pro libovolné reálné číslo t , je sinus t definován, $\sin(t)$, takto:

- Nejprve najděte bod $P(t)$ na kružnici.
- Potom promítněte $P(t)$ na osu y a výsledek uvedete v jednotkách poloměru.

$$D_{\sin t} = \mathbb{R}$$

$$H_{\sin t} = \langle -1, 1 \rangle$$



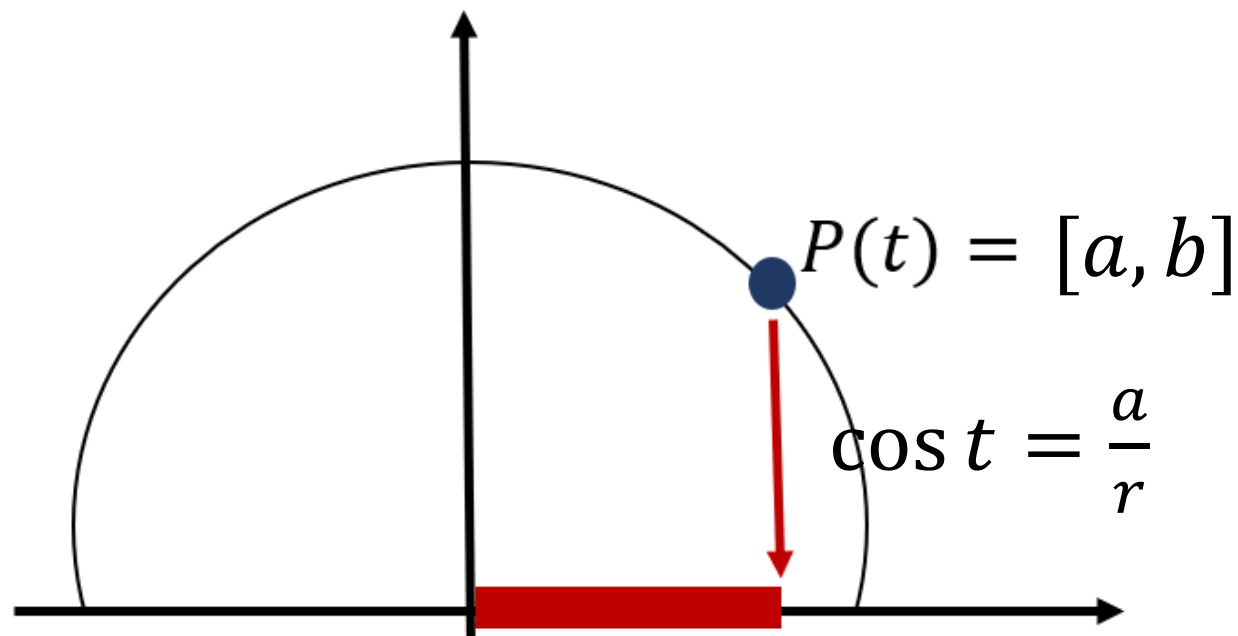
Definice kosinu

Je-li dané libovolné reálné číslo t , je kosinus t definován, **cos**(t), takto:

- Nejprve najděte $P(t)$ na kružnici.
- Potom promítněte $P(t)$ na osu x a výsledek uvedete v jednotkách poloměru.

$$D_{\cos t} = \mathbb{R}$$

$$R_{\cos t} = \langle -1, 1 \rangle$$



9. Pro každý z následujících případů použijte kružnici na obrázku níže a kousek stuhy k aproximaci každé z následujících hodnot sinu co nejpresněji:

a) $\sin(\frac{1}{2})$

b) $\sin(2)$

c) $\sin(-2)$

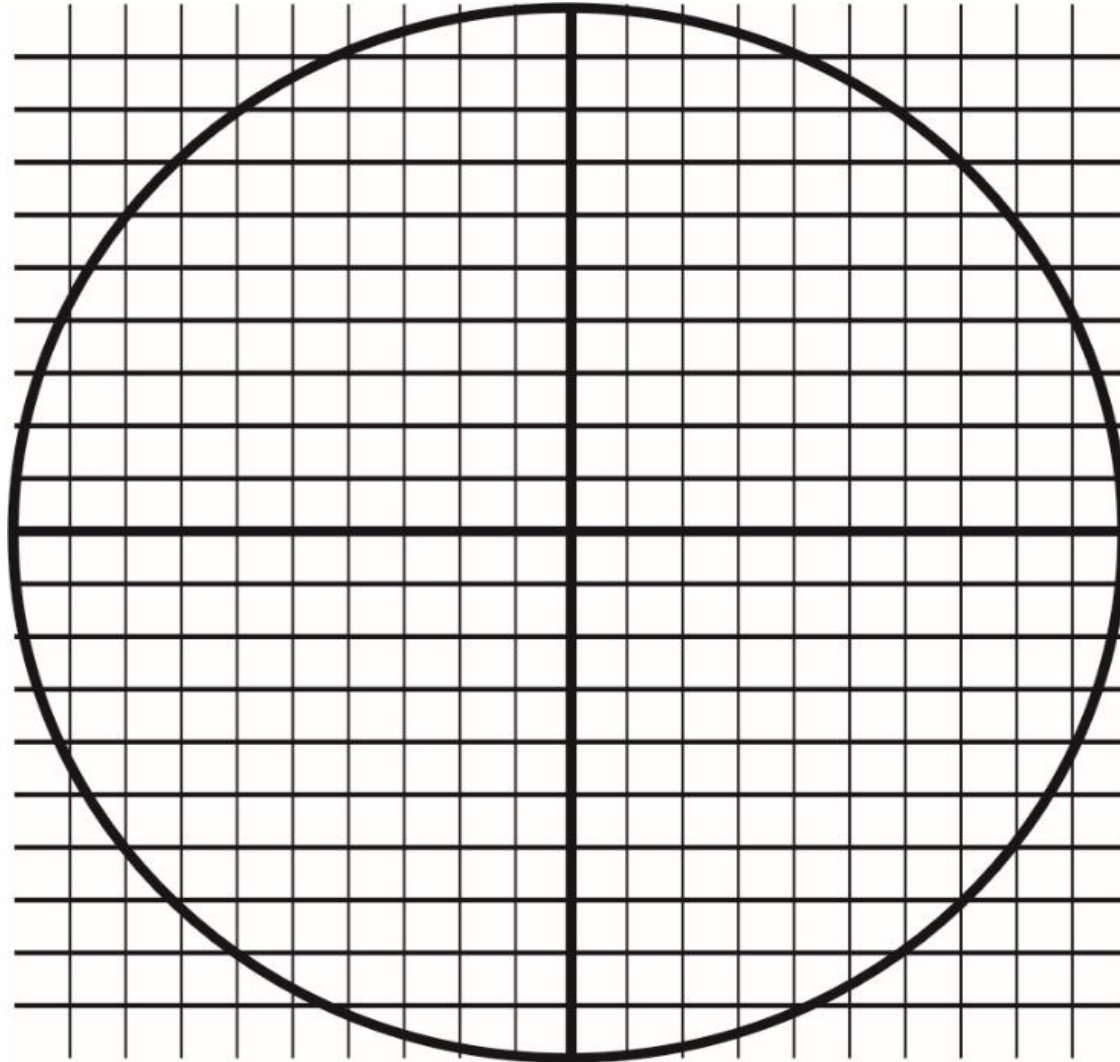
d) $\sin(-\frac{3}{4})$

e) $\sin(0,4)$

f) $\sin(\pi - 0,4)$

g) $\sin(\pi + 0,4)$

h) $\sin(1,6)$



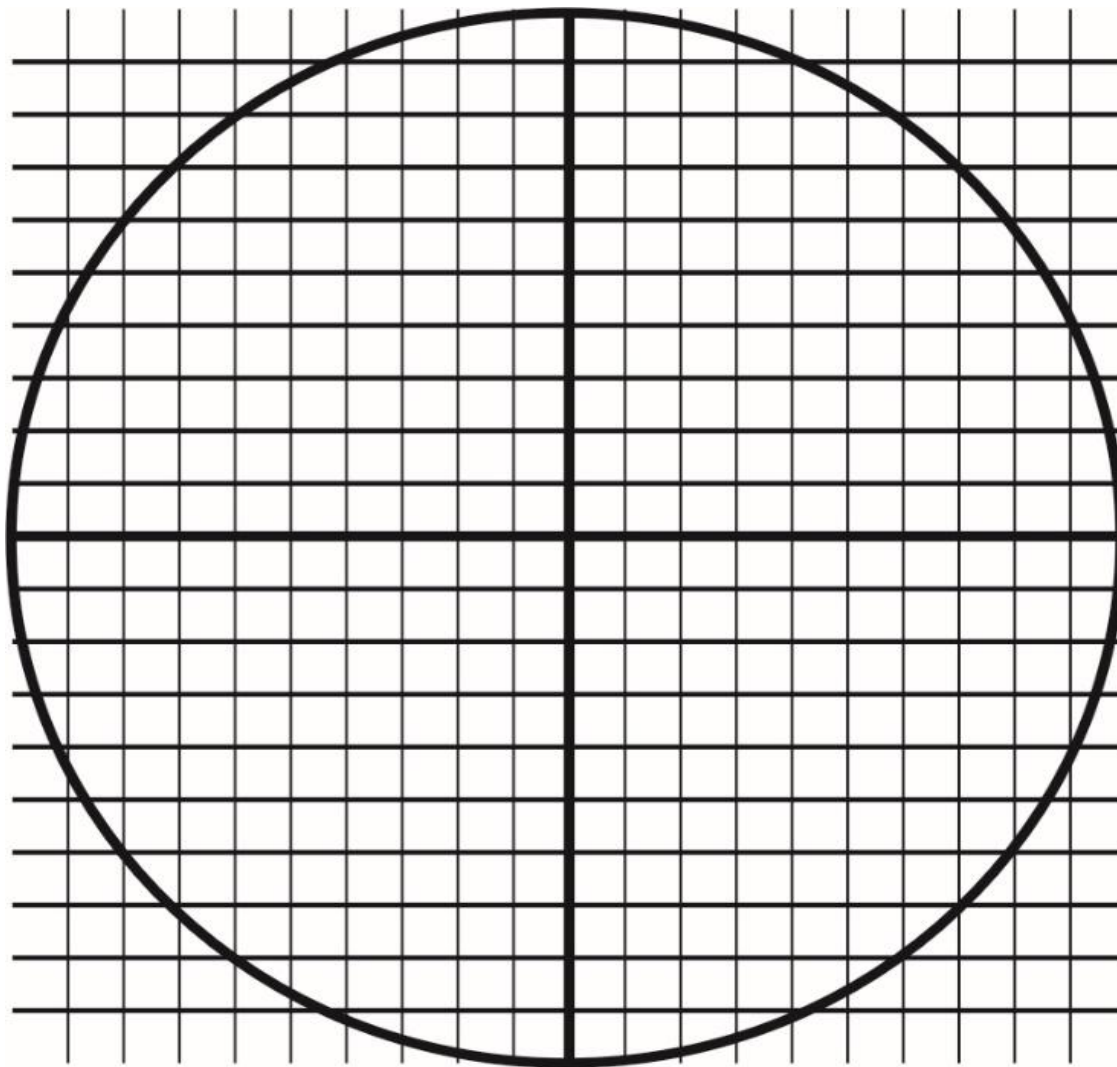
9.

a) $\sin(\frac{1}{2}) \approx 0,5$

b) $\sin(2) \approx 0,9$

c) $\sin(-2) \approx -0,9$

d) $\sin(-\frac{3}{4}) \approx -0,7$



e) $\sin(0.4) \approx 0,4$

f) $\sin(\pi - 0.4) \approx 0,4$

g) $\sin(\pi + 0.4) \approx -0,4$

h) $\sin(1.6) \approx 0,9$

10. Pamatujte, že půlkružnice má délku π krát poloměr [π násobek poloměru], musíte být schopni najít následující hodnoty sinu, aniž byste museli používat kalkulačku nebo si je pamatovat. Představte si, že umístíte odpovídající bod na kružnici a poté ho promítnete na osu y .

a) $\sin(0)$

b) $\sin(\pi)$

c) $\sin(\frac{\pi}{2})$

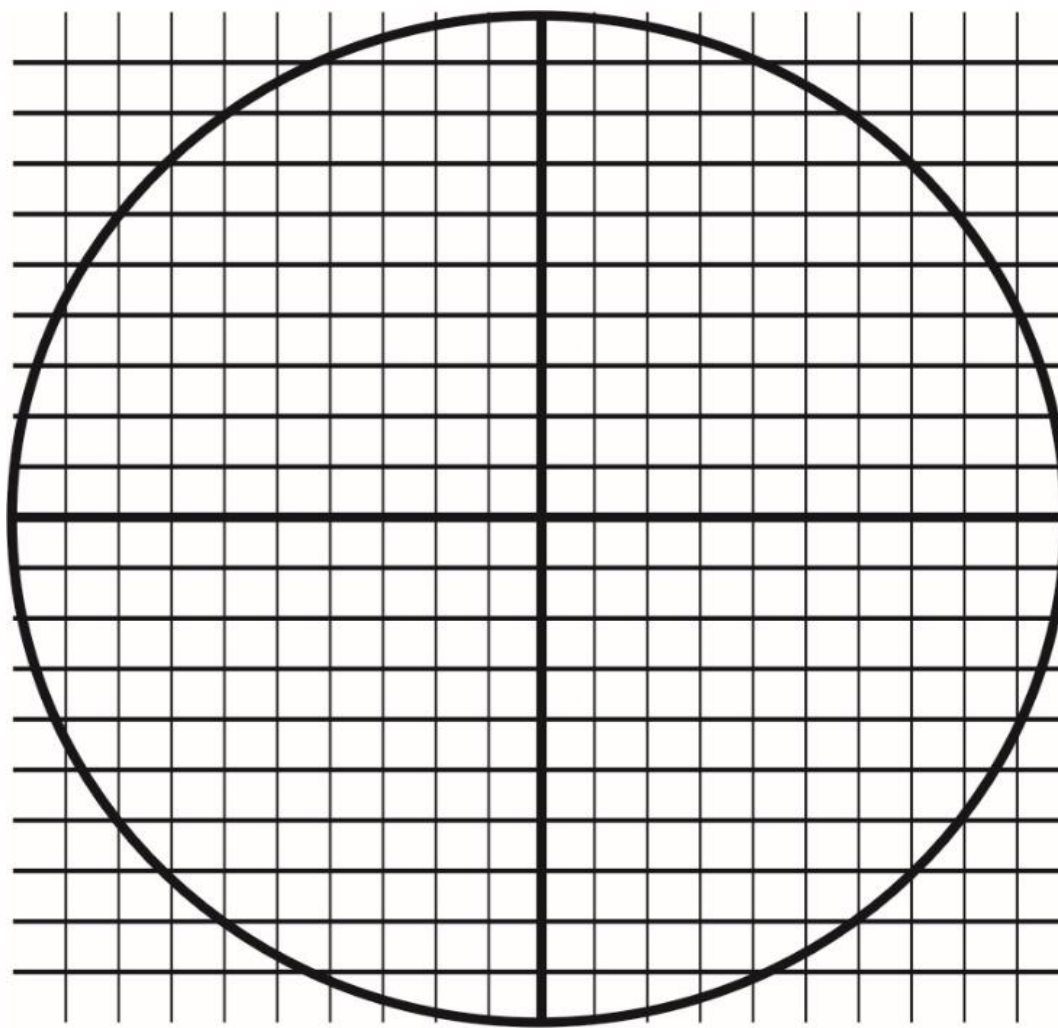
d) $\sin(-\frac{3\pi}{2})$

e) $\sin(-\frac{\pi}{2})$

f) $\sin(2\pi)$

g) $\sin(\frac{5\pi}{2})$

h) $\sin(-3\pi)$



11. Toto cvičení byste měli zvládnout bez použití kalkulačky nebo stuhy. Použijte pouze svou představivost (představte si umístění bodu a pak jeho projekci) a to, co víte o π .

Seřad'te od nejmenší po největší hodnotu:

$$\sin(1), \sin\left(\frac{1}{10}\right), \sin(3), \sin(-4), \sin(4), \sin(6)$$

$$\sin(4) < \sin(6) < \sin\left(\frac{1}{10}\right) < \sin(3) < \sin(-4) < \sin(1)$$

$$-0,7 < -0,2 < 0,1 < 0,14 < 0,75 < 0,84$$

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz