UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;

Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #2

Vahid Borji & Petra Surynková

Cíle kurzu:

- Konceptuální porozumění
- Úroveň střední školy
- Problem-solving
- Domácí úkol (borji@karlin.mff.cuni.cz) [úterý 12:00]

Témata kurzu:

- Exponenciální a logaritmické funkce
- Goniometrické funkce a jejich inverze
- Derivace
- Limita posloupnosti
- Řady
- Kombinatorika

Interpretace exponenciálních a logaritmických funkcí v kontextové situaci

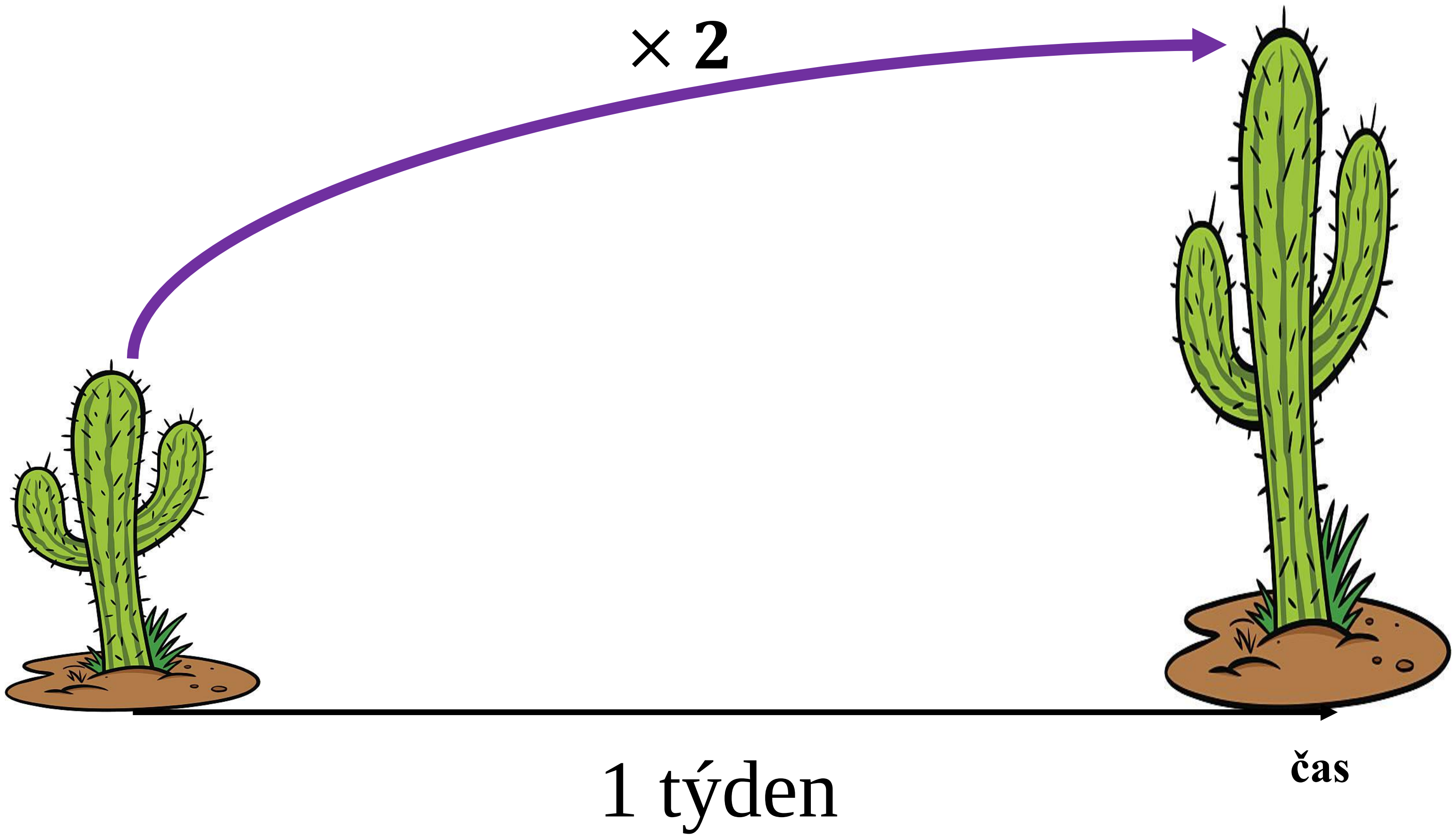
Některé reálné situace, které zažíváme v každodenním životě nebo nějaké pseudorealistické situace.

Cíl: Jak můžeme studentům a učitelům pomoci porozumět konceptům exponentu a logaritmu a jejich větám v skutečné situaci?

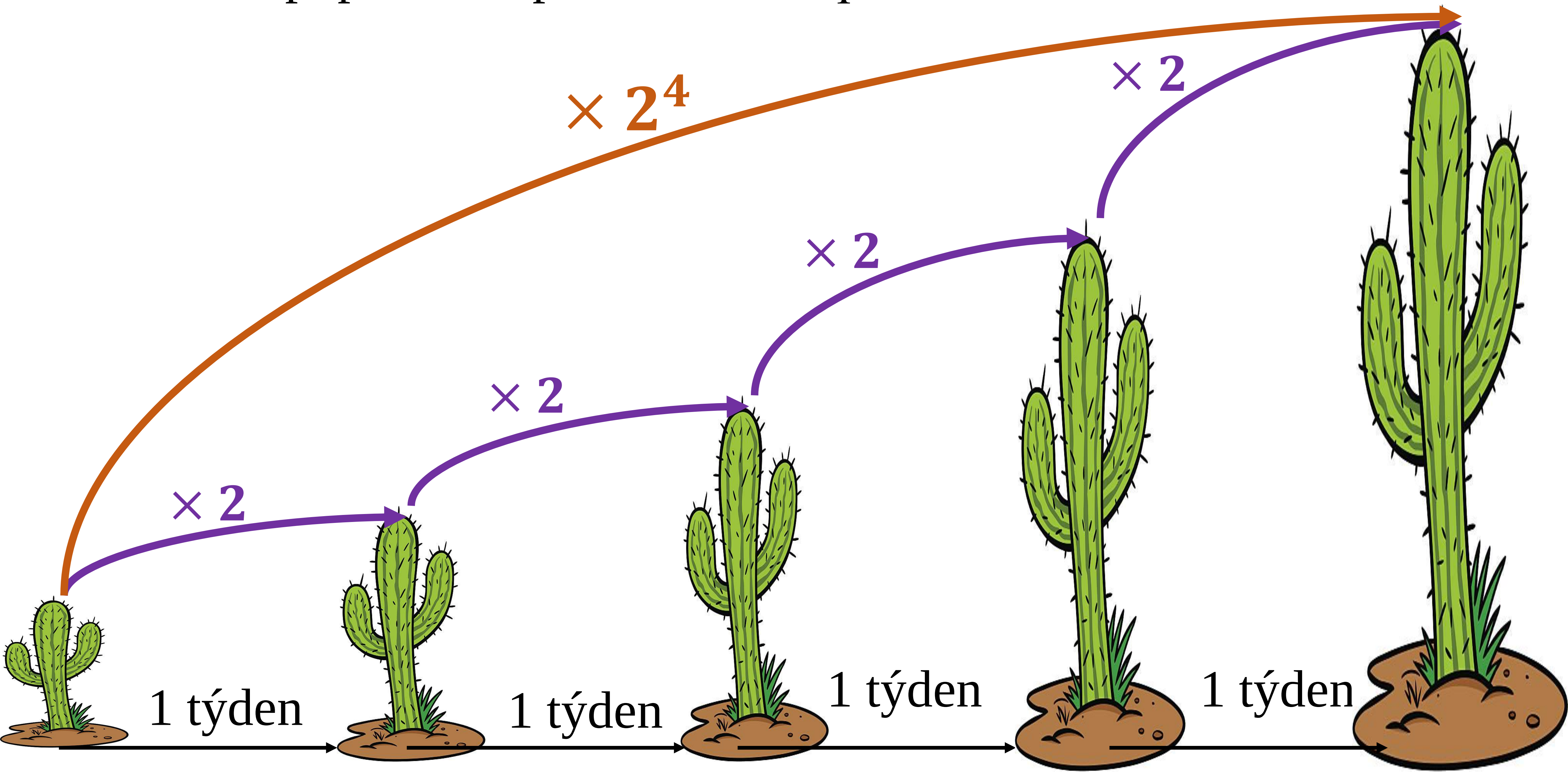
$$\mathbf{2^{\frac{1}{7}}} \qquad \log_2 \mathbf{3}$$

$$\log_2 \mathbf{7} + \log_2 \mathbf{4} = \log_2 \mathbf{28}$$

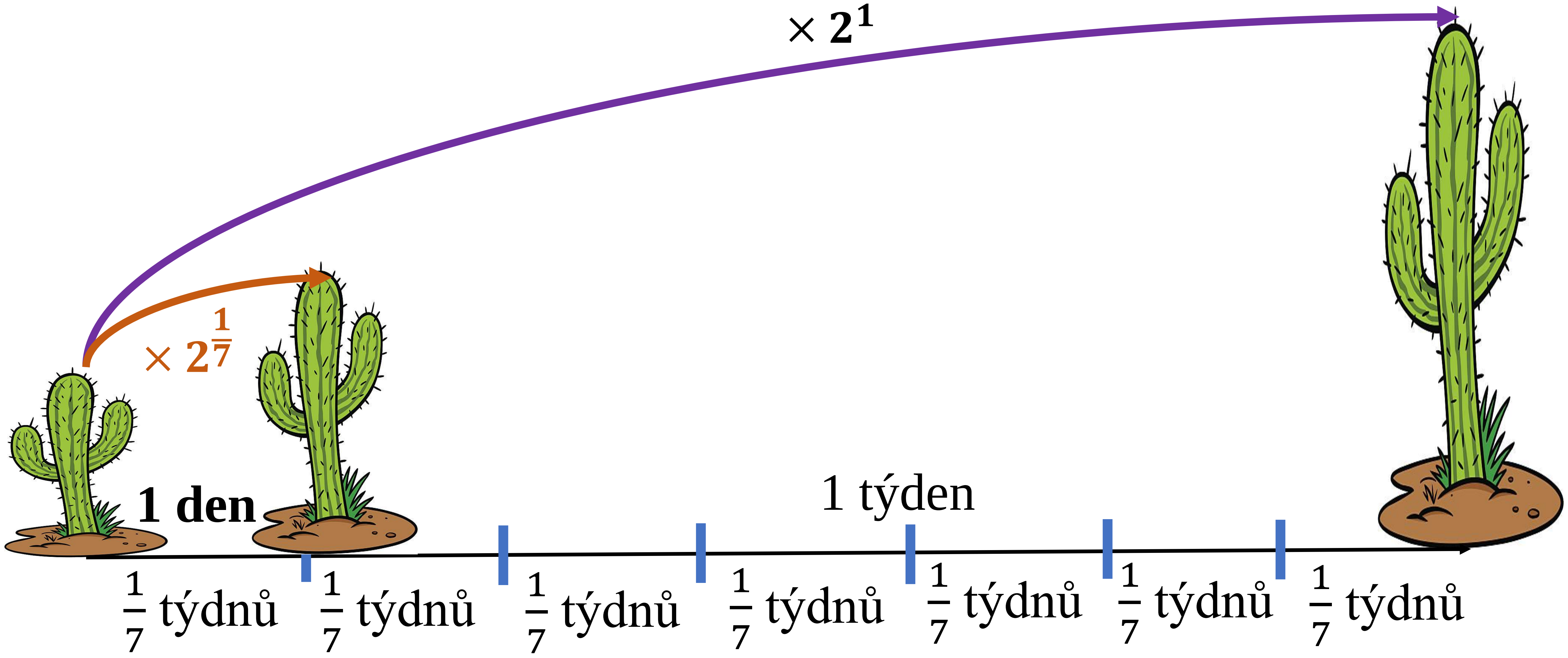
Uvažujme kontextovou situaci o kaktusu:



Jak můžeme popsat/interpretovat $\mathbf{2^4}$ v příběhu o kaktusu?

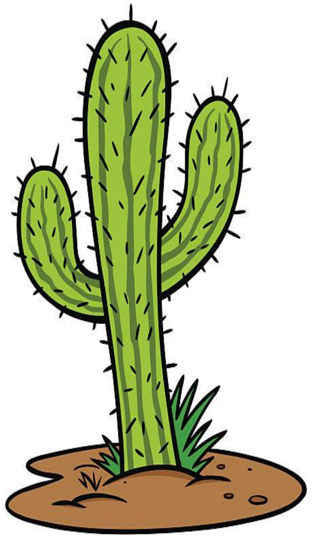


Jak můžeme popsat/interpretovat $\mathbf{2^{\frac{1}{7}}}$ v příběhu o kaktusu?



Jak můžeme popsat/interpretovat $\mathbf{2^0}$ v příběhu o kaktusu?

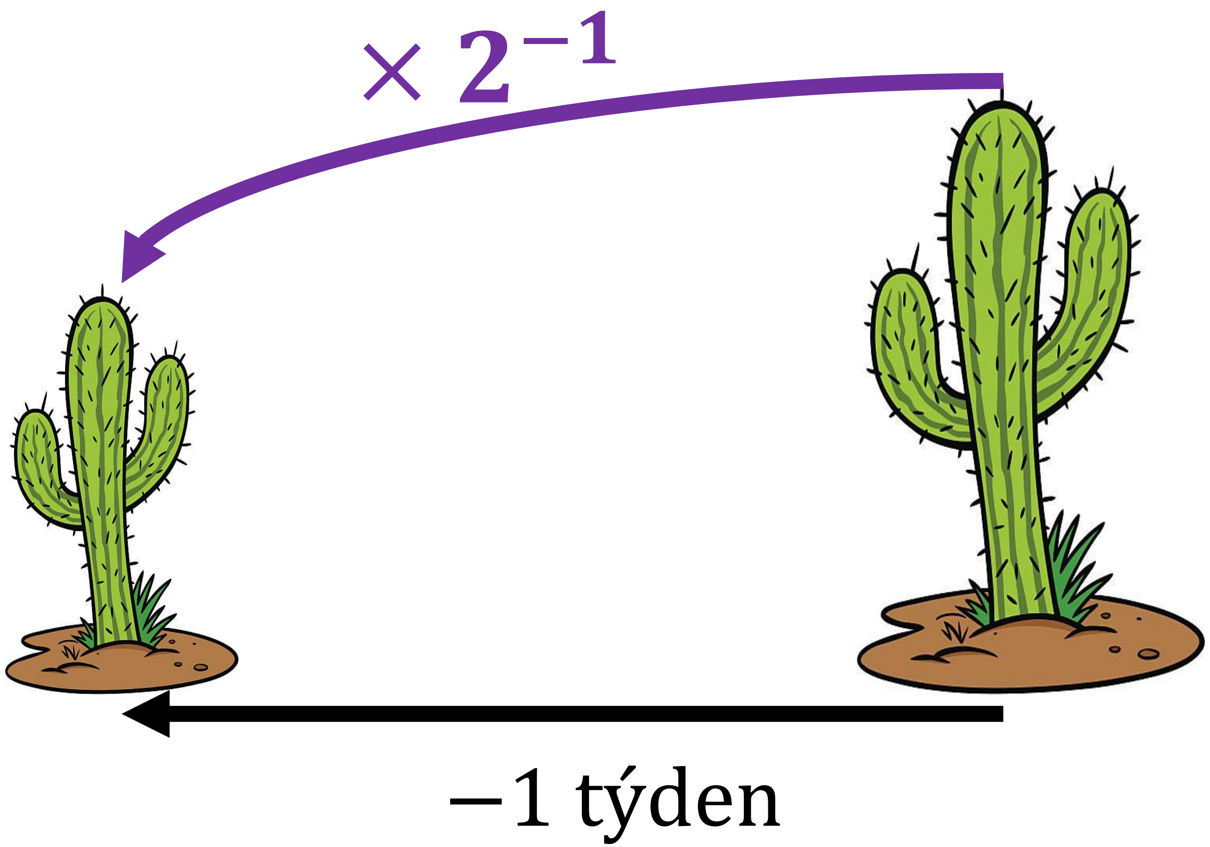
$$\mathbf{2^0 = 1}$$



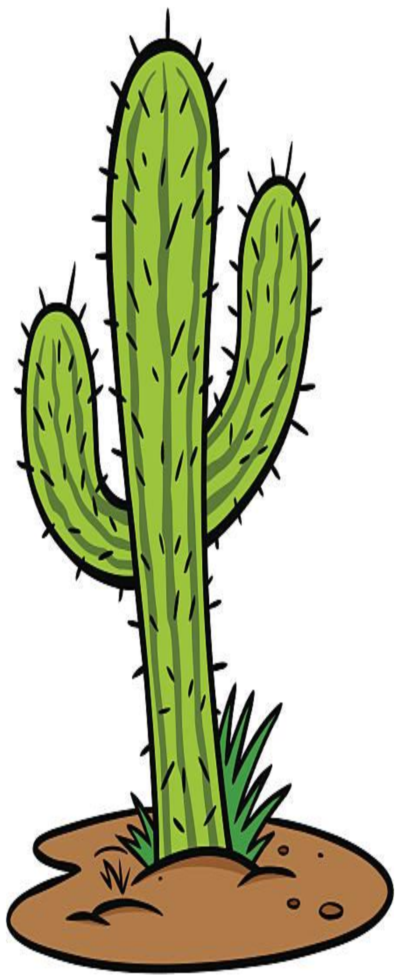
$$\mathbf{2^0 = 1}$$

neuplynul žádný čas

Jak můžeme popsat/interpretovat $\mathbf{2^{-1}}$ v příběhu o kaktusu?



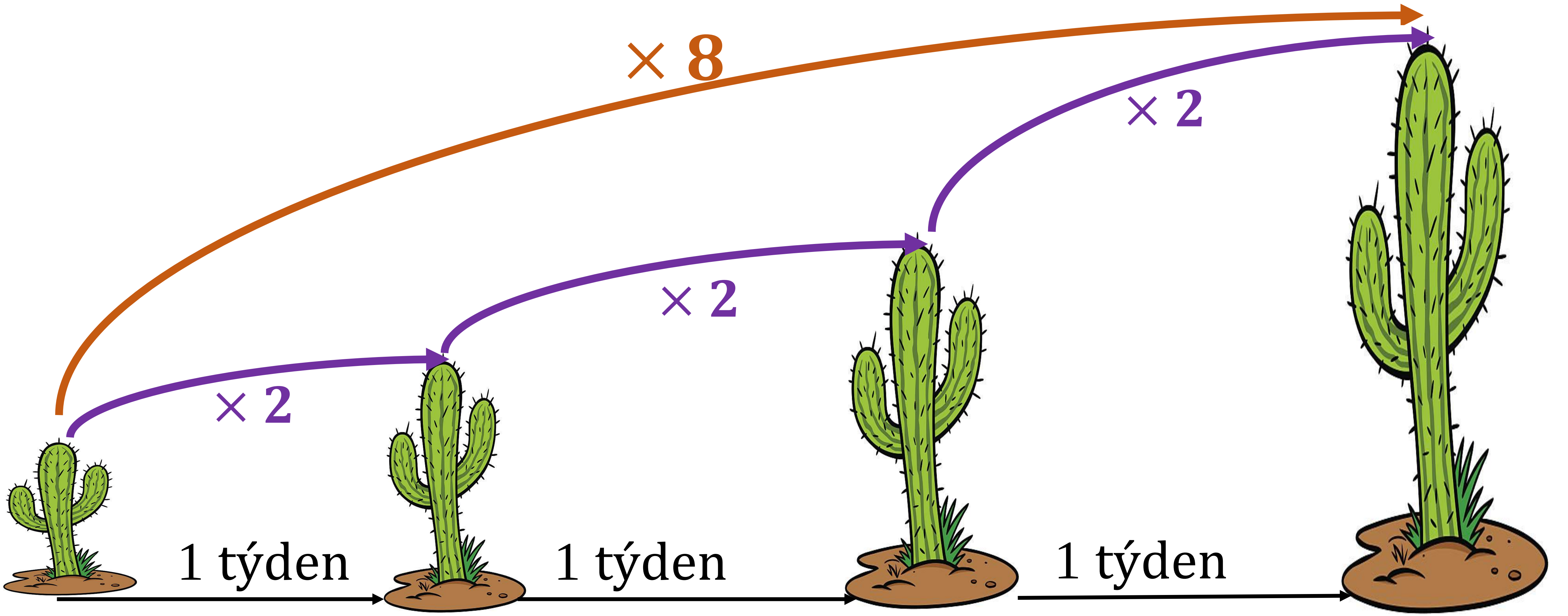
log



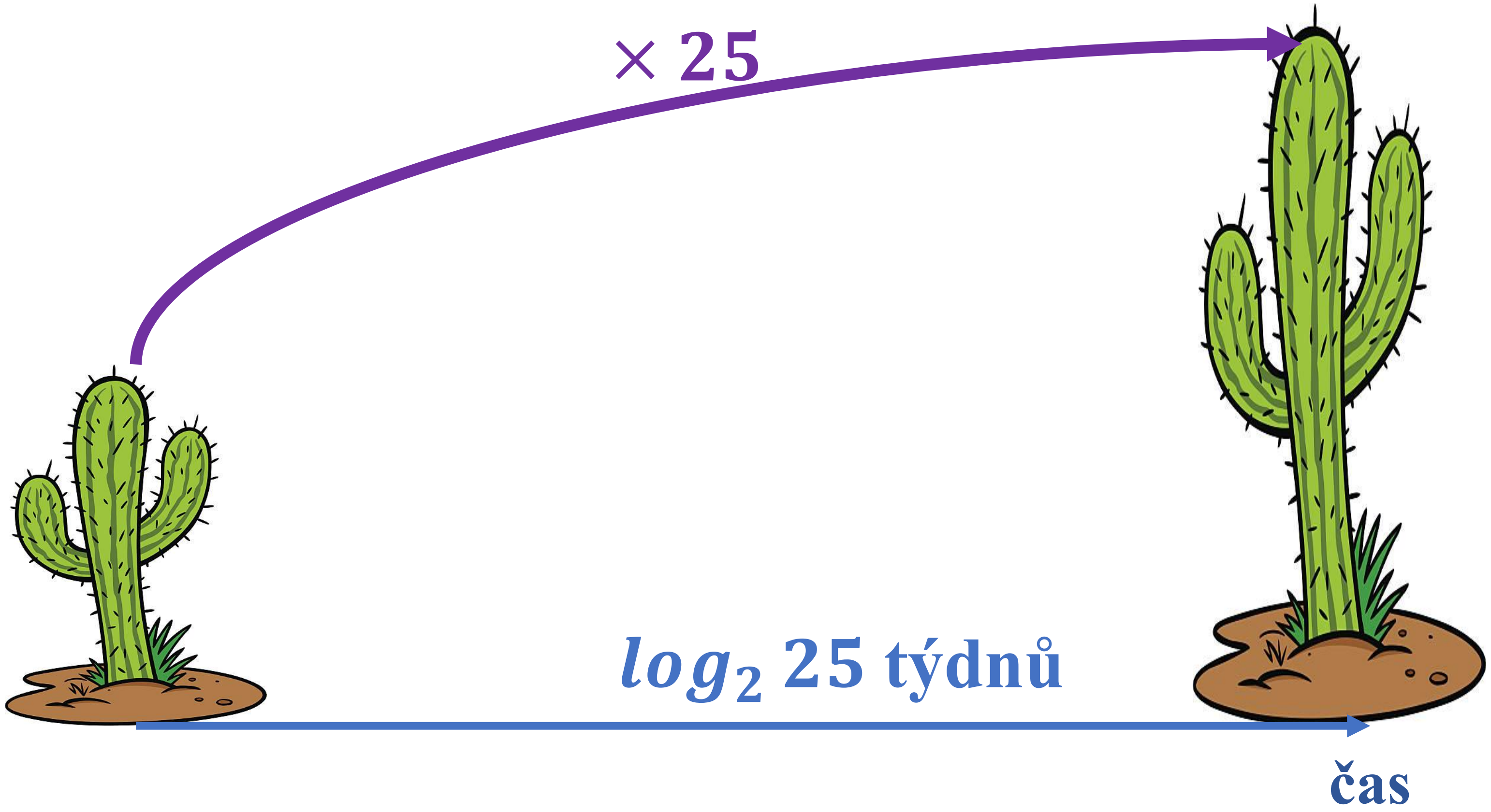
Jak můžeme popsat například $\mathbf{\log_2 8}$ v příběhu o kaktusu?

$\mathbf{\log_2 8}$ je počet činitelů 2, které máme v čísle **8**.

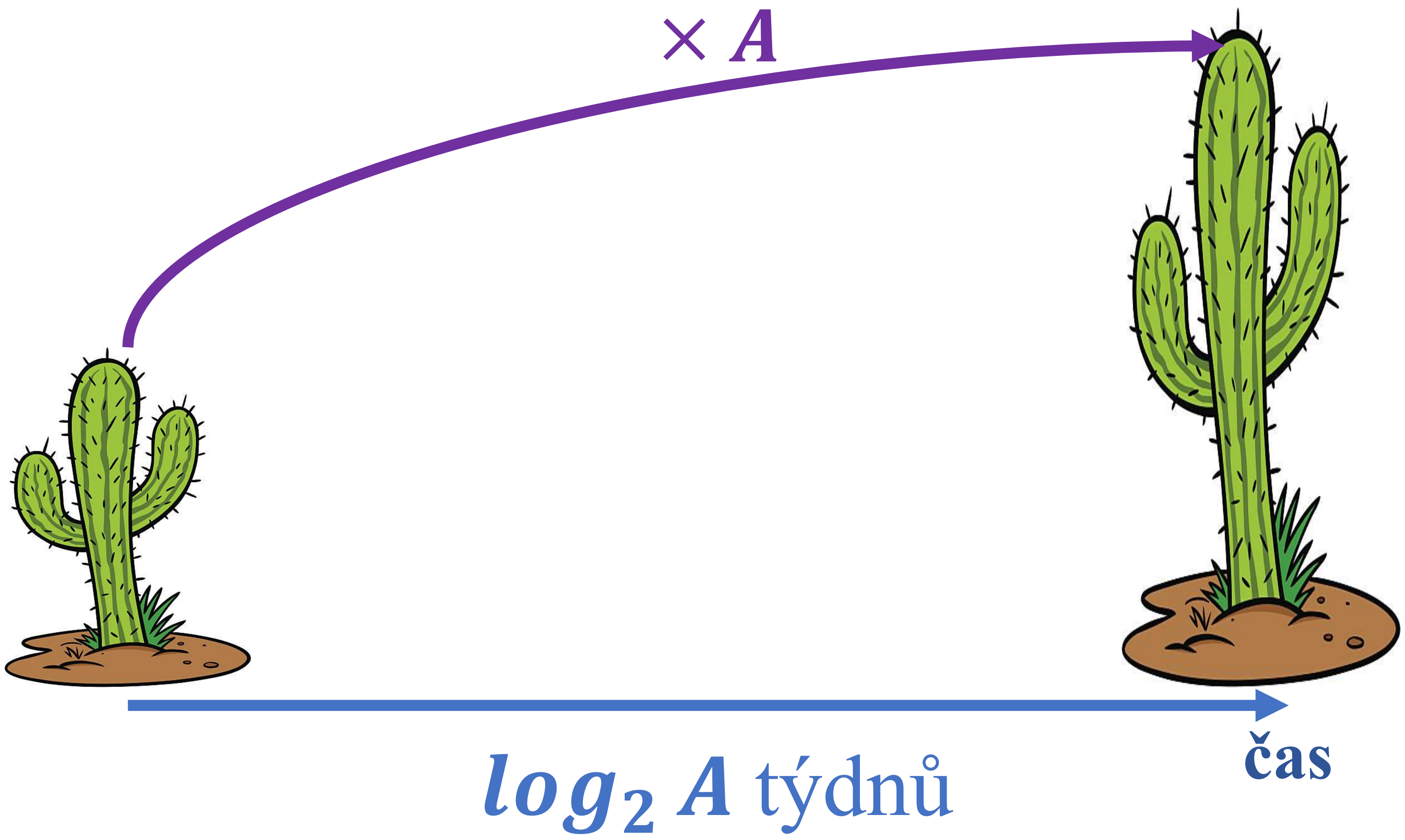
$\mathbf{\log_2 8}$ je počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl **8násobku** své výšky.



$\mathbf{log_2 25}$ je **počet týdnů**, které kaktus potřebuje, aby dosáhl ***25*násobku** své výšky.

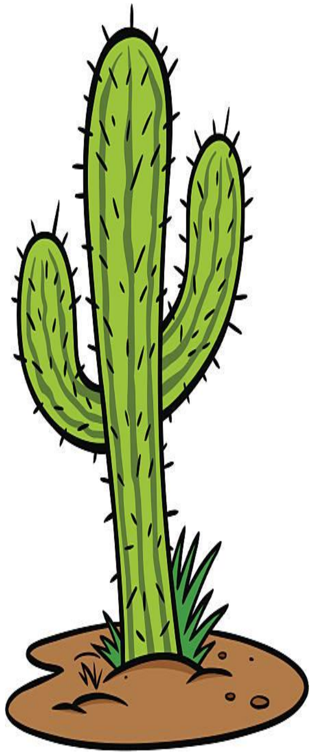


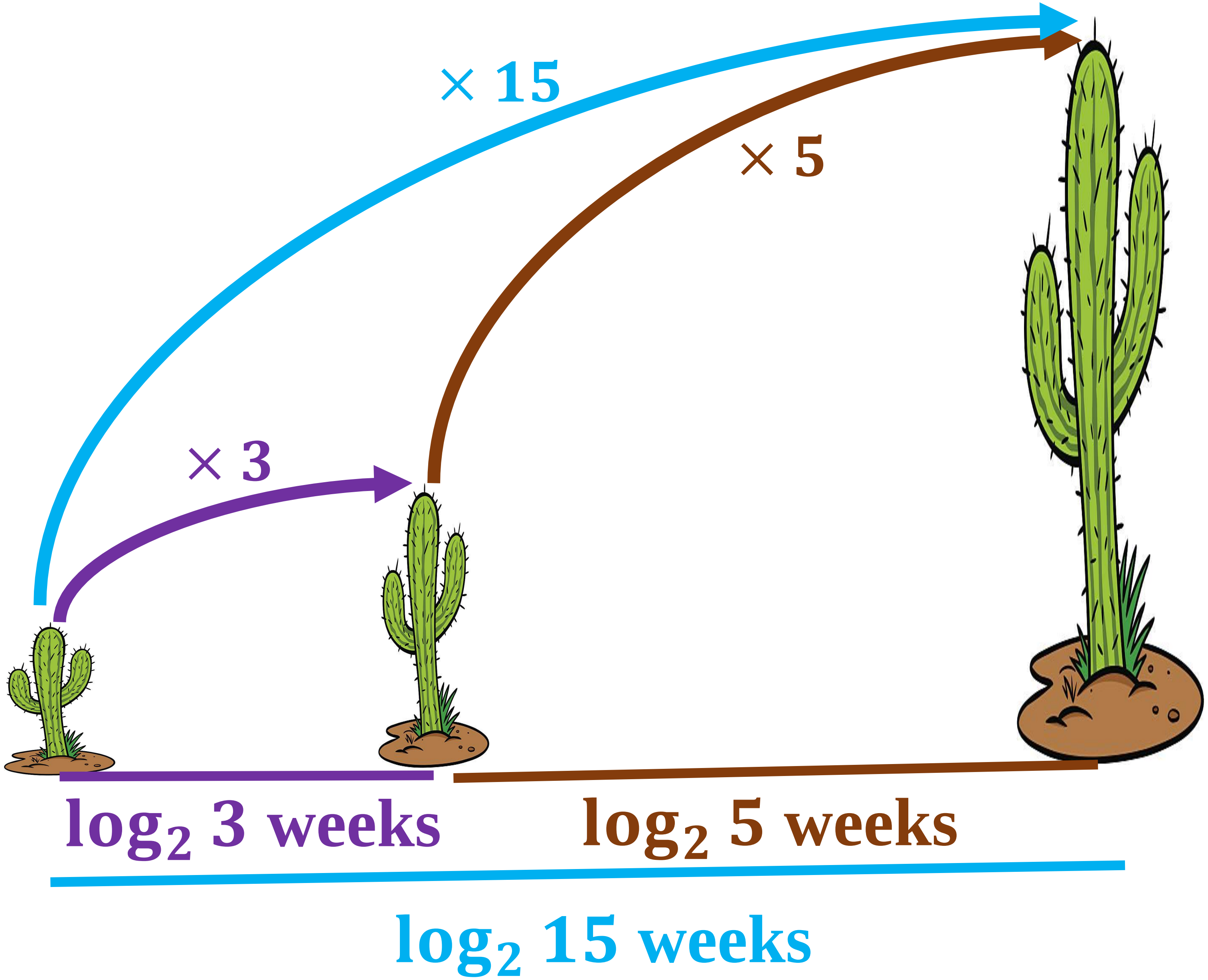
$\boldsymbol{log_2 A}$ vyjadřuje počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení ***A-násobku*** své výšky.



$$\boxed{\log_b X + \log_b Y = \log_b XY}$$

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

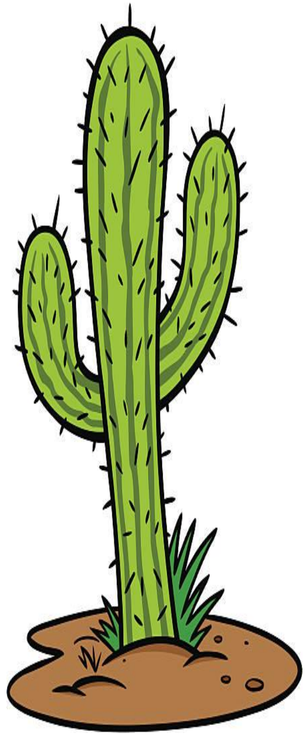




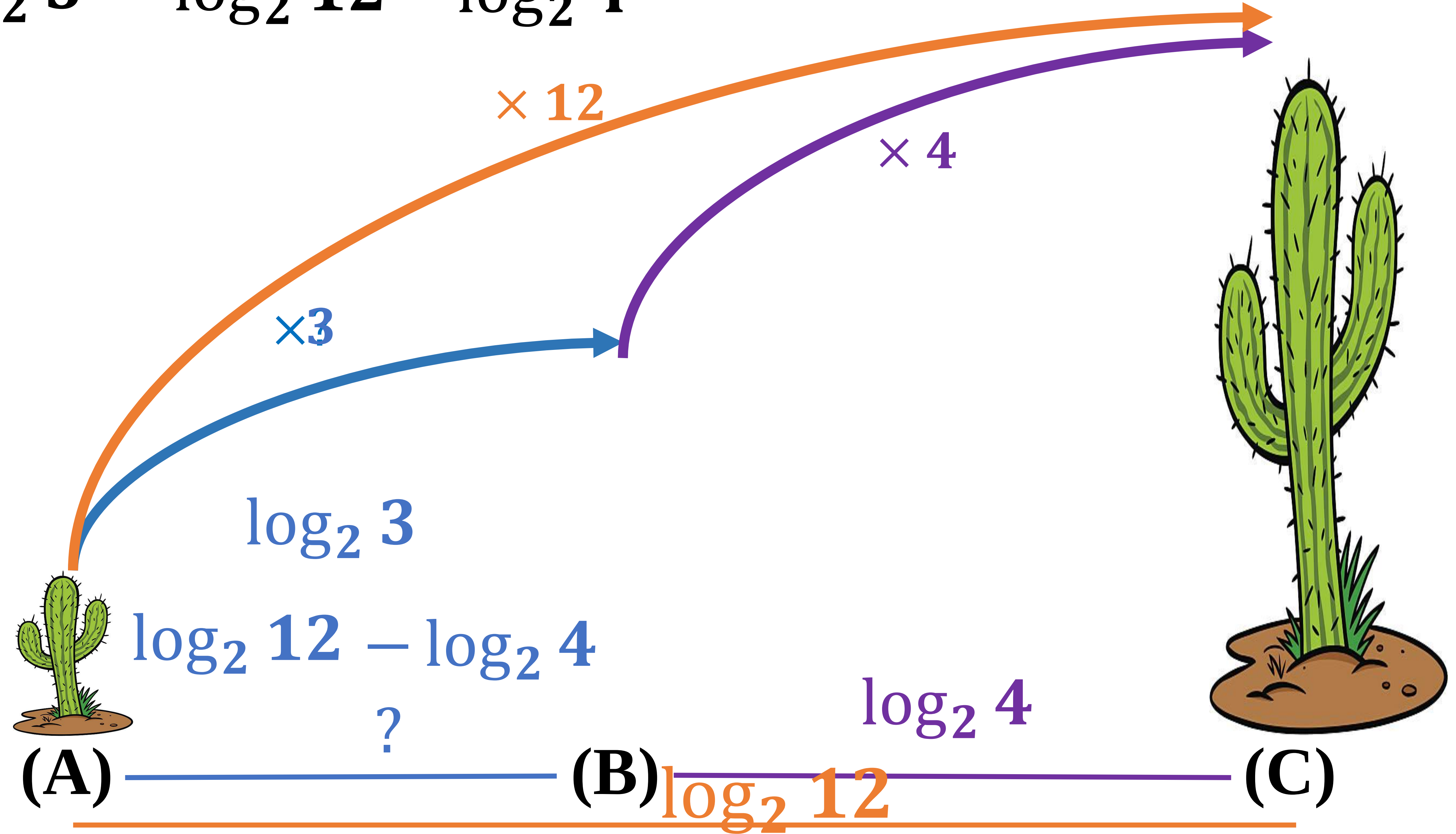
$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

$$\boxed{\log_b X - \log_b Y = \log_b \frac{X}{Y}}$$

$$\log_2 12 - \log_2 4 = \log_2 3$$

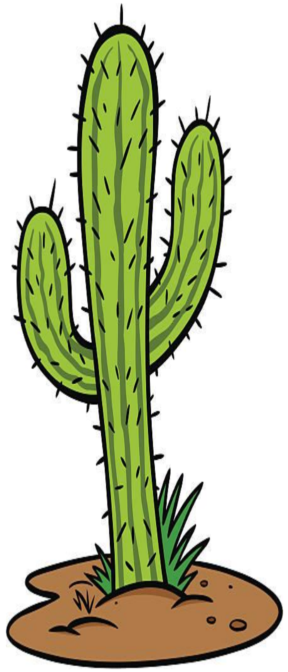


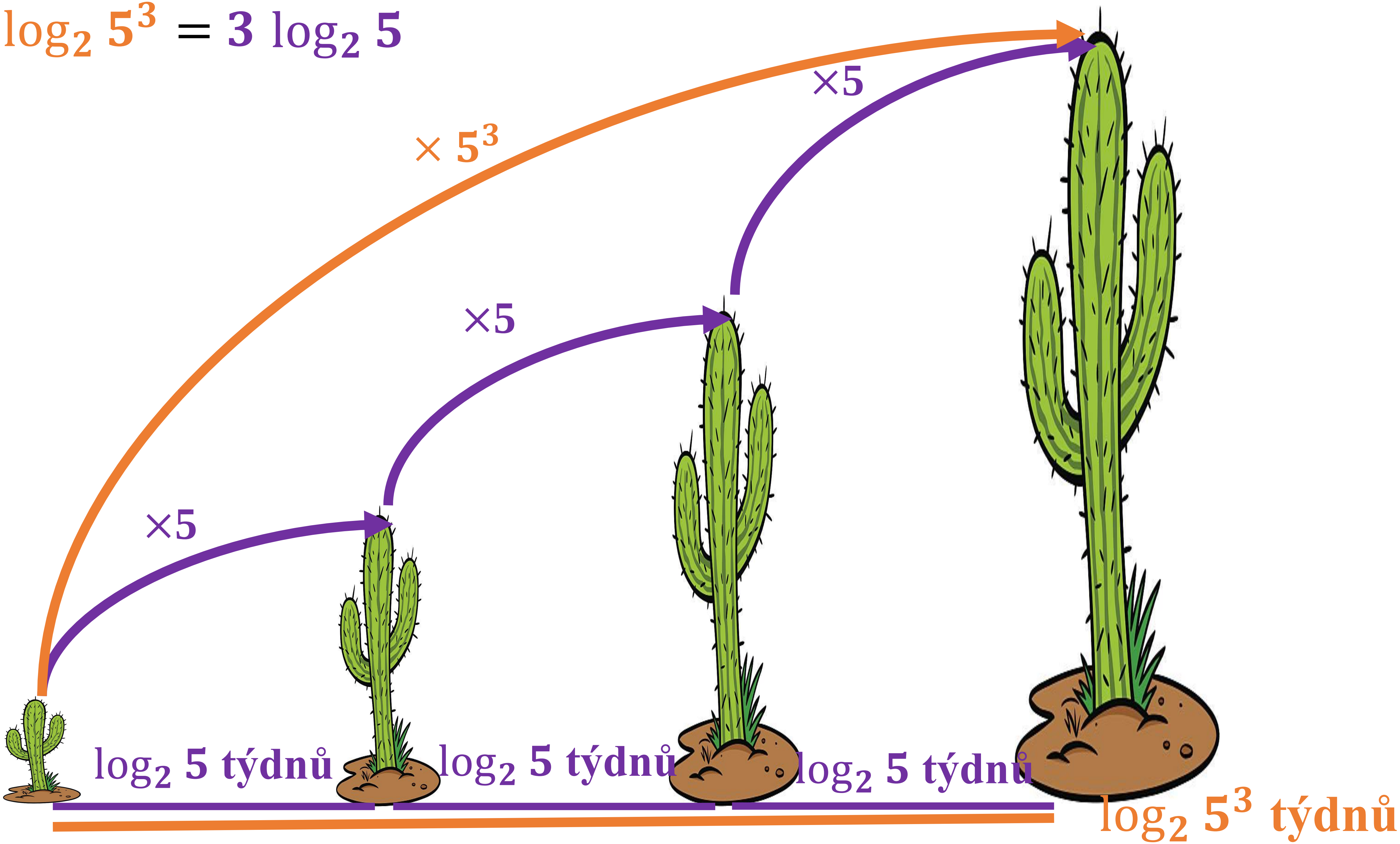
$$\log_2 \mathbf{3} = \log_2 \mathbf{12} - \log_2 \mathbf{4}$$



$$\boxed{\log_b X^y = y.\log_b X}$$

$$\log_2 \mathbf{5}^3 = \mathbf{3} \log_2 \mathbf{5}$$



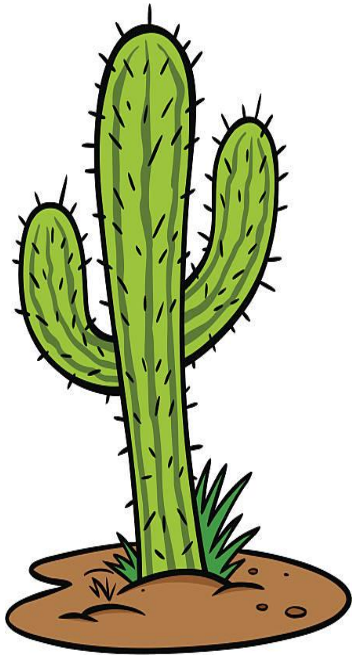

$\log_2 5^3 = 3\log_2 5$
$\times 5^3$
$\times 5$
$\times 5$
$\times 5$
$\log_2 5$ týdnů
$\log_2 5$ týdnů
$\log_2 5$ týdnů
$\log_2 5^3$ týdnů

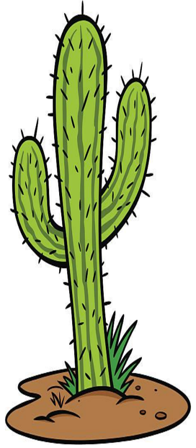
Další logaritmické věty můžeme interpretovat v příběhu o kaktusu.

$$\log_2 2^A = A$$

$$2^{\log_2 A} = A$$

$$\frac{\log_2 A}{\log_2 B} = \log_B A$$





Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte prázdná místa.

a) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^3-*násobku* své výšky je …. 3

b) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^4-*násobku* své výšky je …. 4

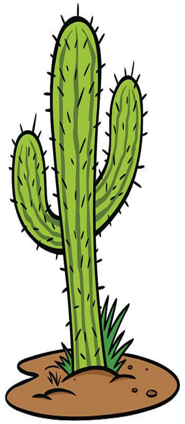
c) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^{100}-*násobku* své výšky je …. 100

d) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^A-*násobku* své výšky je …. A

e) Napište větu z části (d) jako logaritmickou rovnost.

$$\log_2 \boldsymbol{2^A} = \boldsymbol{A}$$

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte prázdná místa.



a) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 8-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 8

b) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 9-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 9

c) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 10-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 10

d) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } 100-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … 100

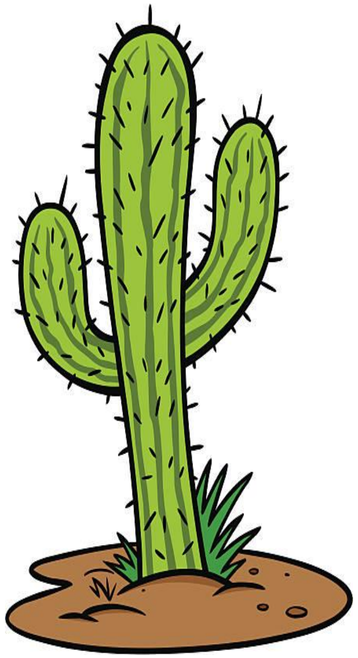
e) $2^{\text{počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení } A-\textit{násobku} \text{ své výšky}}$ je … A

f) Napište větu z části (e) jako logaritmickou rovnost.

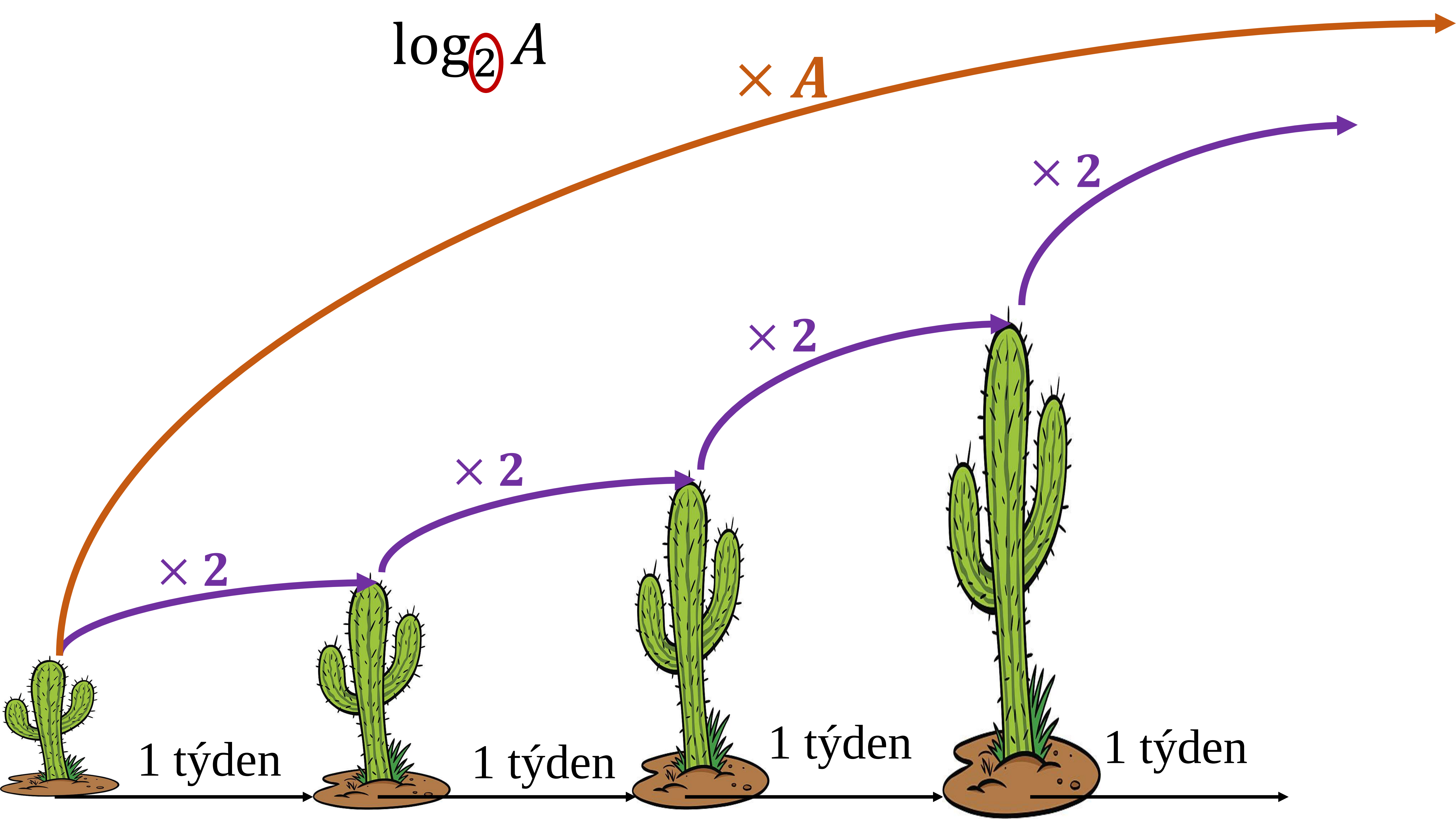
$$\mathbf{2^{\log_2 A} = A}$$

Použijte příběh s kaktusem a vysvětlete, proč tato logaritmická věta platí.

$$\frac{\log_2 \boldsymbol{A}}{\log_2 \boldsymbol{B}} = \log_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{A}$$

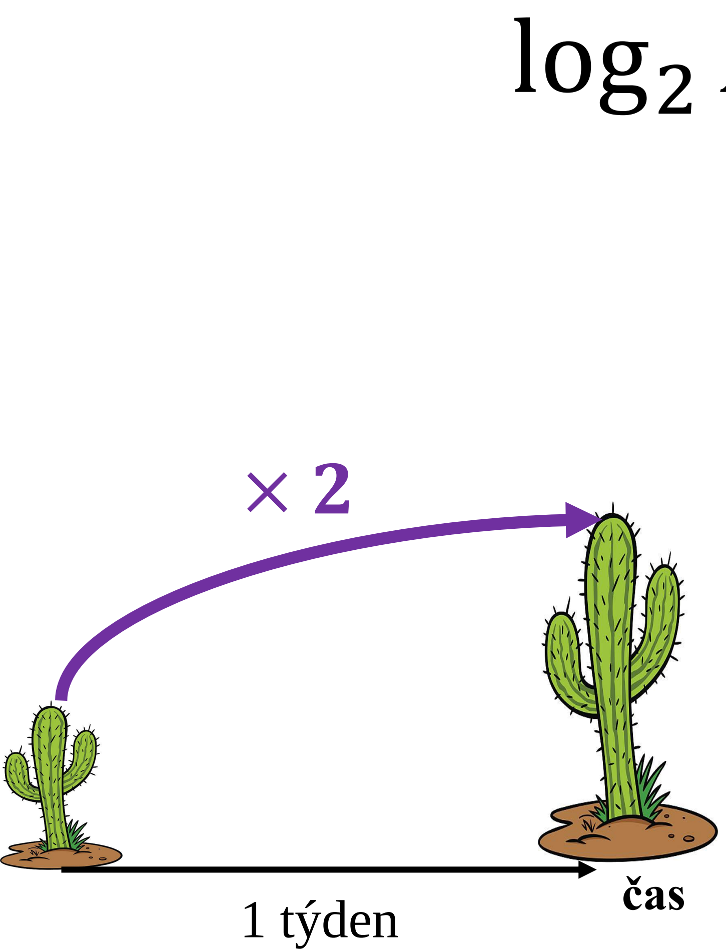


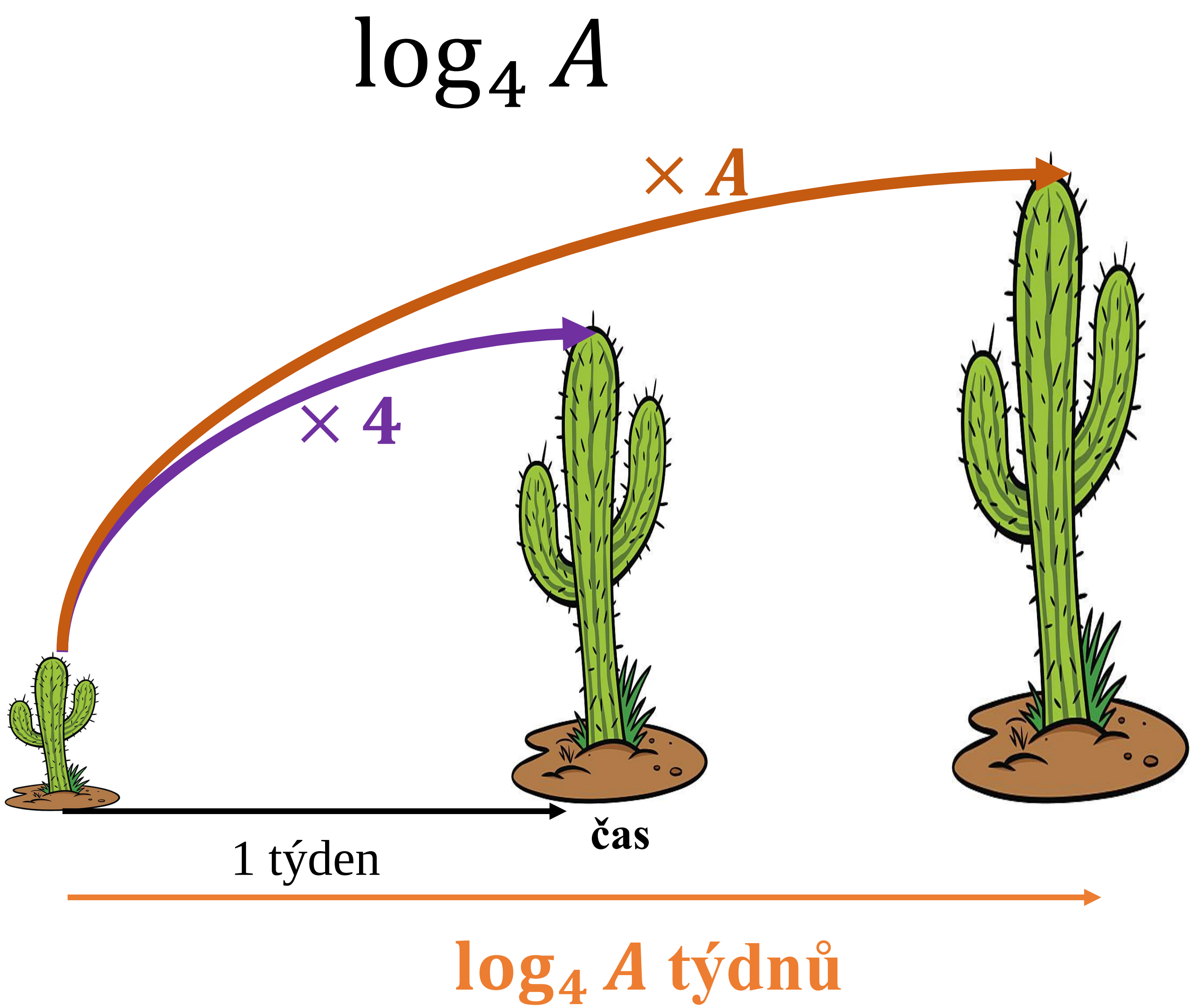
$$\frac{\log_2 \mathbf{15}}{\log_2 \mathbf{5}} = \frac{\log_4 \mathbf{15}}{\log_4 \mathbf{5}} = \frac{\log_3 \mathbf{15}}{\log_3 \mathbf{5}} = \log_5 \mathbf{15}$$

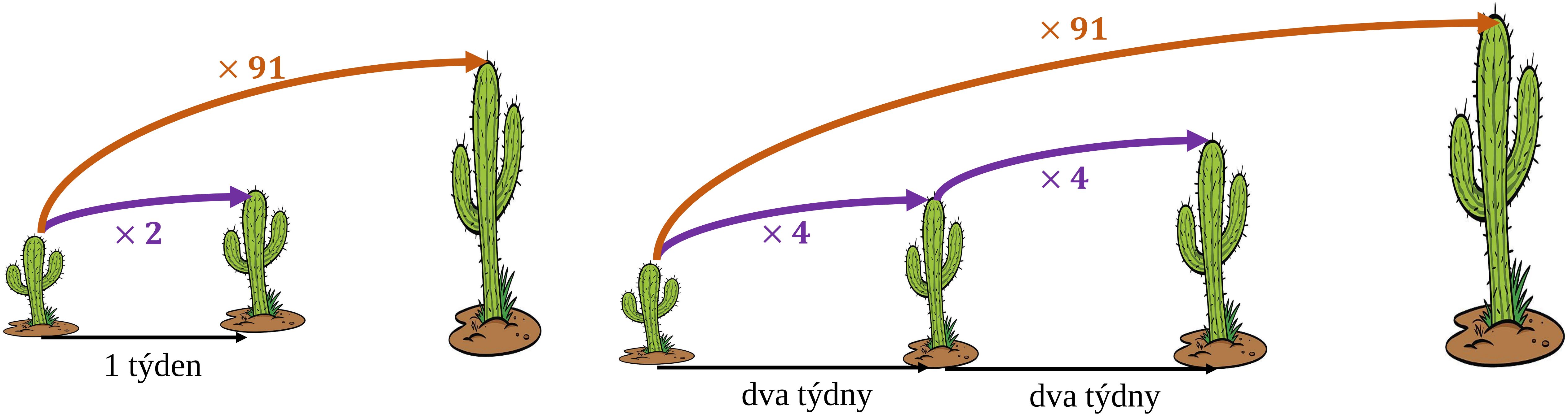


$\log_2 A$
$\times A$
$\times 2$
$\times 2$
$\times 2$
$\times 2$
1 týden
1 týden
1 týden
1 týden

Jak můžeme změnit základ logaritmu z 2 na jiné číslo (například 4, 8, nebo 16, atd.)?



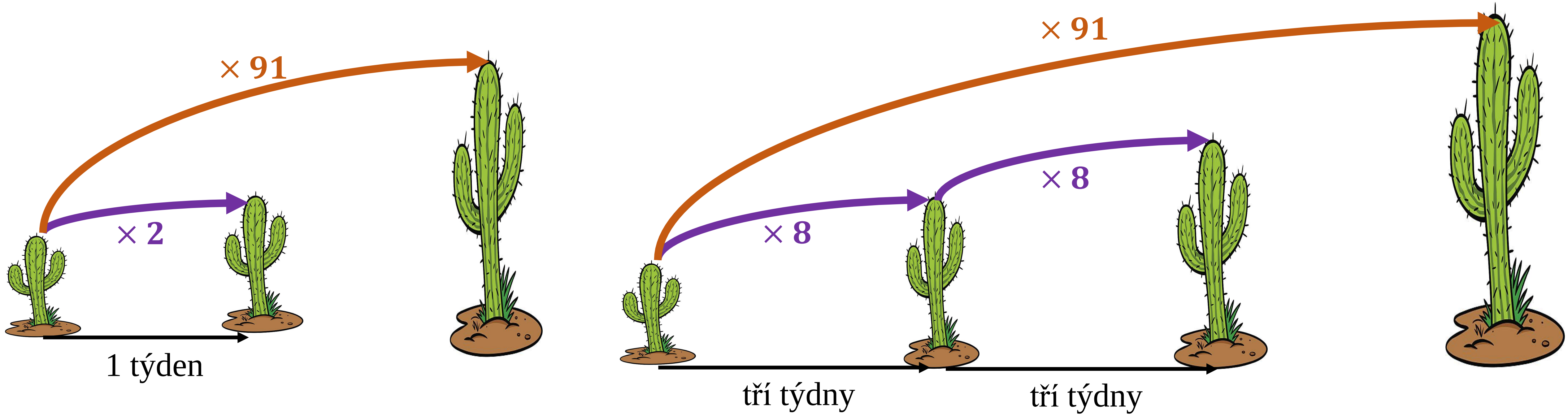




$\log_2 91$ ukazuje počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

dvojtýdenních období

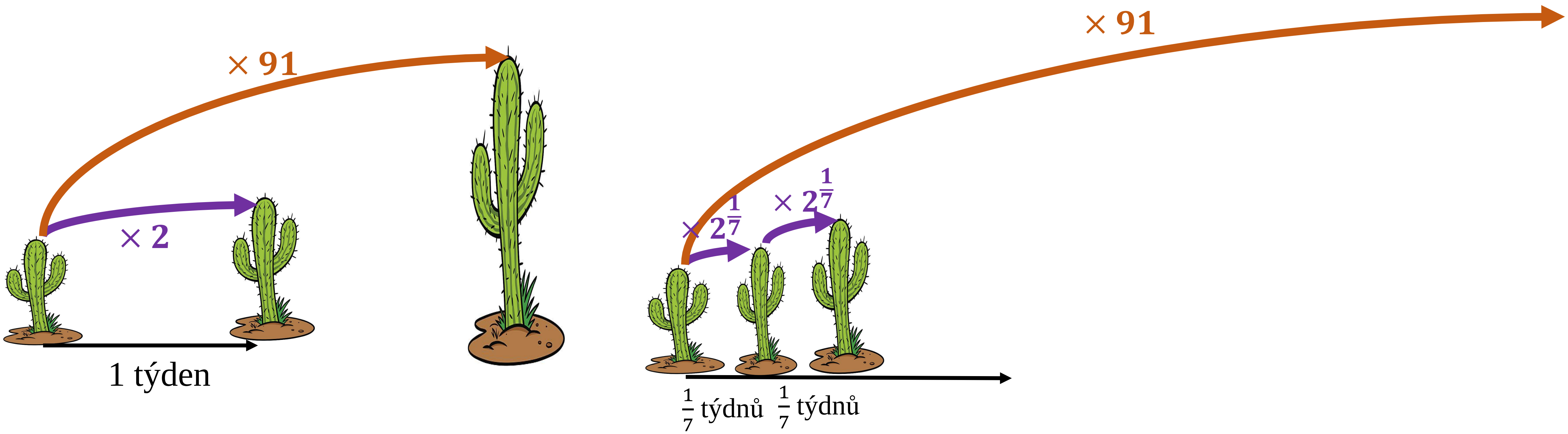
$\log_4 91$ ukazuje počet ………., které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.



$\mathbf{\log_2 91}$ ukazuje počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

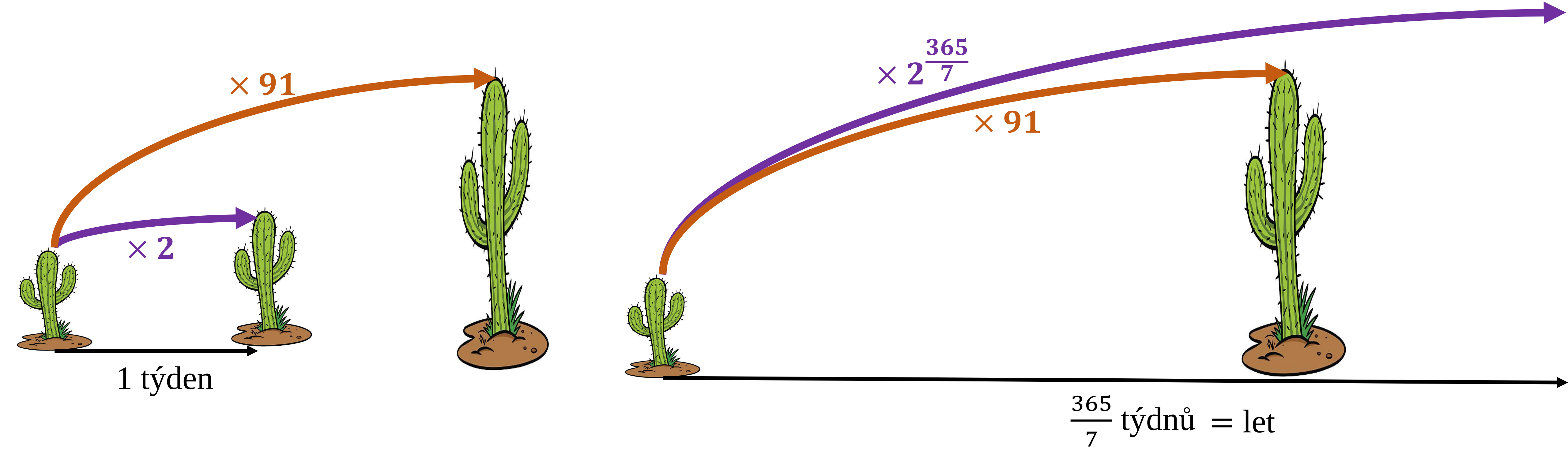
tří týdenních období

$\mathbf{\log_8 91}$ ukazuje počet ………., které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.



$\log_{2} 91$ ukazuje počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

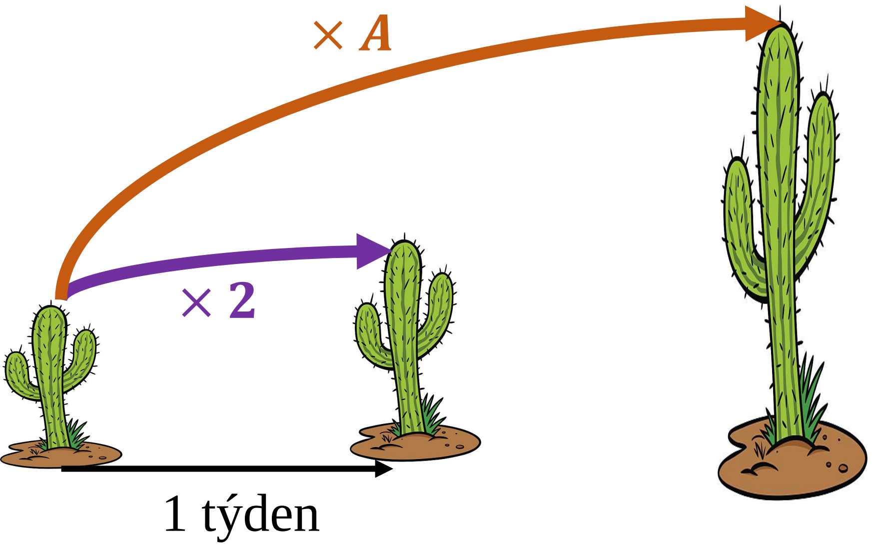
$\log_{2^{\frac{1}{7}}} 91$ ukazuje počet dní ……….., které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

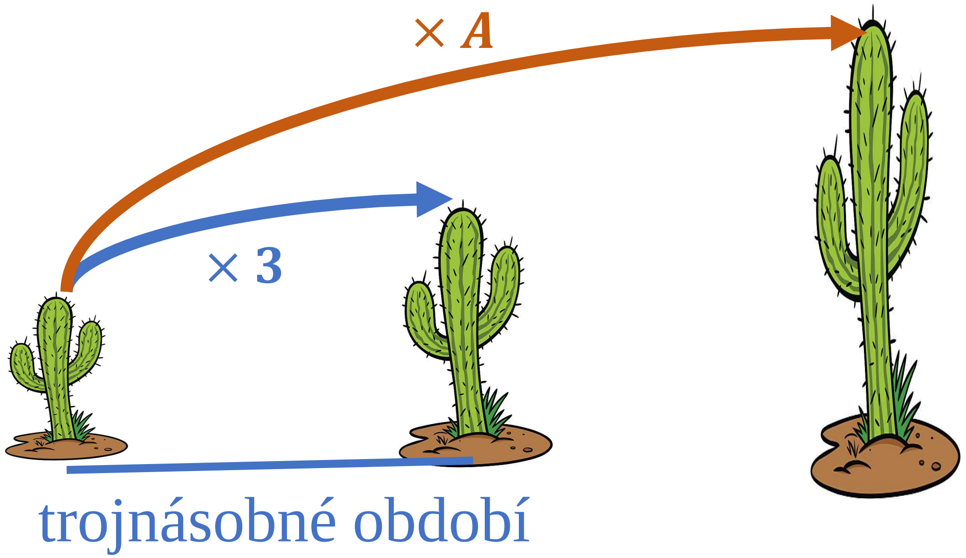


$\log_2 91$ ukazuje počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

$\log_{2^{\frac{365}{7}}} 91$

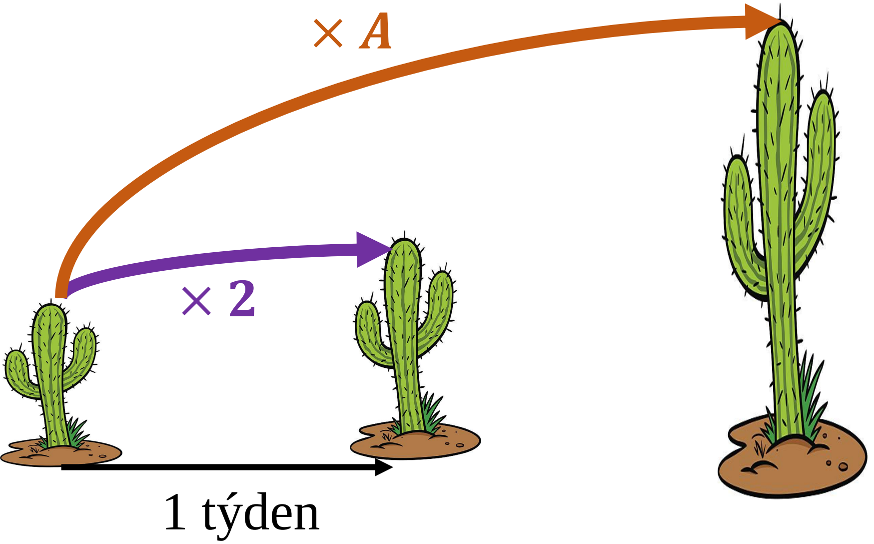
ukazuje počet **let**, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

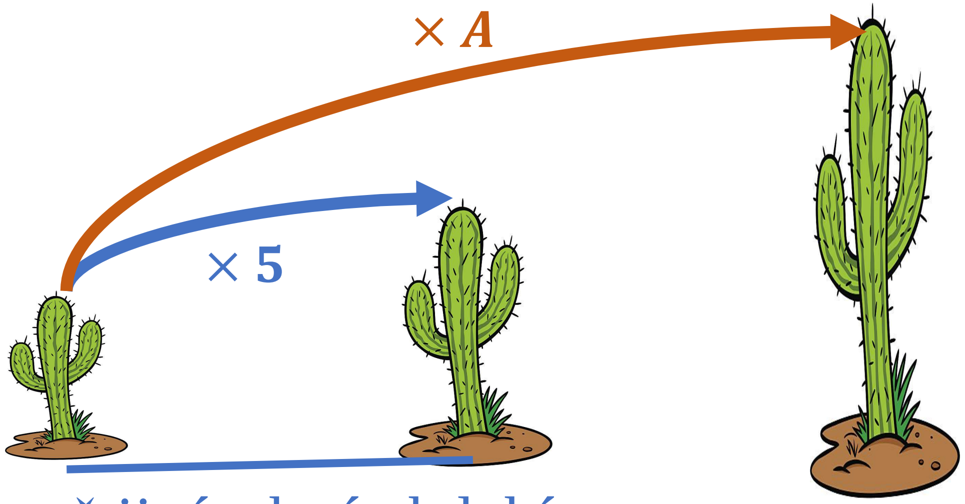




= je doba, za kterou se výška kaktusu ztrojnásobí.

$\log_3 A = ?$ Kolik **trojnásobných období** kaktus potřebuje, aby dosáhl *A-násobku* své výšky?



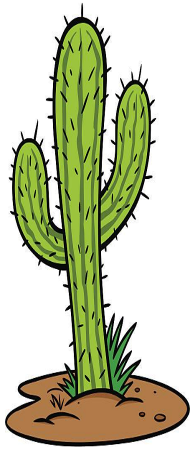


pětijnásobné období

= je doba, za kterou se výška kaktusu zpětinásobí.

$\log_5 A = ?$ Kolik **pětinásobných období** kaktus potřebuje, aby dosáhl *A-násobku* své výšky?

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte každou z následujících vět.

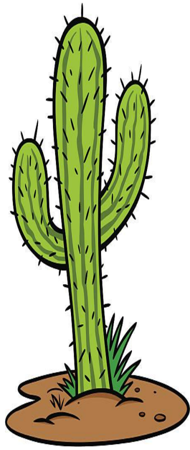


a) Dvojnásobné období je doba, za kterou …… se výška kaktusu zdvojnásobí.

b) Čtyřnásobné období je doba, za kterou …. se výška kaktusu zčtyřnásobí.

c) Desetinásobné období je doba, za kterou …. se výška kaktusu zdesetinásobí.

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Odpovězte na následující otázky [vaše odpověď by měla být přirozené číslo]. Ke každé části nakreslete diagram a ukažte, jak můžete pomocí diagramu svou odpověď zdůvodnit.



a) Kolik dvojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky? 3

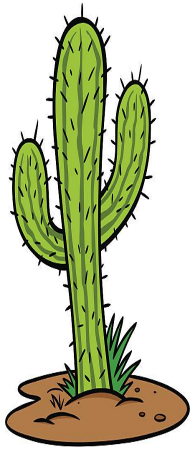
b) Kolik čtyřnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *16-násobku* své výšky? 4

c) Kolik šestinásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *216-násobku* své výšky? 3

d) Kolik trojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *81-násobku* své výšky? 4

e) Kolik pětinásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *5-násobku* své výšky? 1

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Odpovězte na následující otázky [vaše odpověď by měla být ve tvaru logaritmu].



a) Kolik dvojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *9-násobku* své výšky? $\log_2 9$

b) Kolik čtyřnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *5-násobku* své výšky? $\log_4 5$

c) Kolik šestinásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *200-násobku* své výšky? $\log_6 200$

d) Kolik trojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky?

$\log_3 8$

$$\boxed{\log_{y^a} x = \frac{1}{a}\log_y x}$$

Domácí úkol: Máme kaktus, jehož výška se každý měsíc zdvojnásobí. Pomocí tohoto kaktusu, navrhněte jednoduchý slovní úkol, který ukáže, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12}\log_2 17$ platí.

Nápověda: Musíte odpovědět na svůj slovní úkol dvěma různými způsoby. V prvním způsobu musíte získat jako odpověď $\log_{2^{12}} 17$. V druhém způsobu musíte získat $\frac{1}{12}\log_2 17$. Jelikož má slovní úkol pouze jednu správnou odpověď, můžete uzavřít, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12}\log_2 17$ platí.

References

Borji, V., Surynková, P., Kuper, E., & Robová, J. (2024). Using contextual problems to develop preservice mathematics teachers' understanding of exponential and logarithmic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2309284

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 211–230. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Díaz-Berrios, T., & Martínez-Planell, R. (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, Article 100953. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953

Euler, L. (1984). *Elements of algebra*. (J. Hewlet, Trans.). Springer. (Original work published 1770).

Kuper, E., & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, *57*, Article 100740. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Webb, D. C., van der Kooij, H., & Geist, M. R. (2011). Design research in the Netherlands: Introducing logarithms using realistic mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *2*(1), 47–52. https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.708

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz