



UNIVERZITA KARLOVA

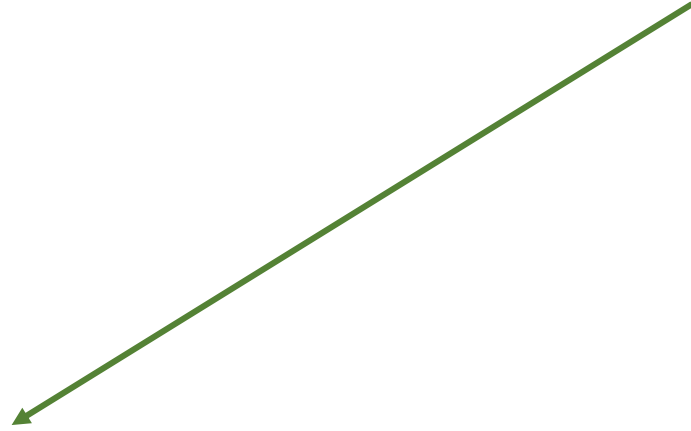
**Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky**

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

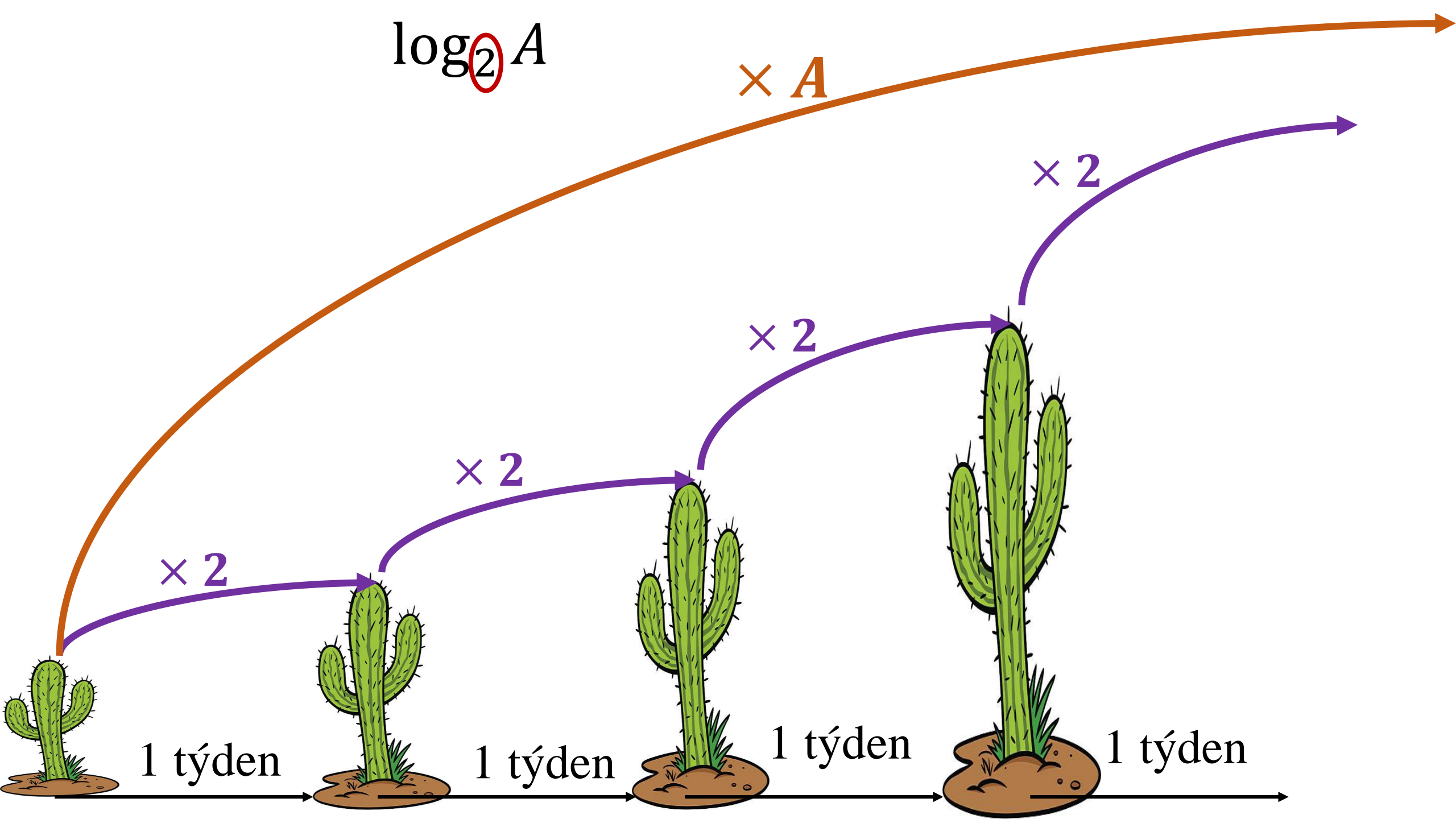
Lekce #2

Vahid Borji & Petra Surynková

Interpretace exponenciálních a logaritmických funkcí v kontextové situaci



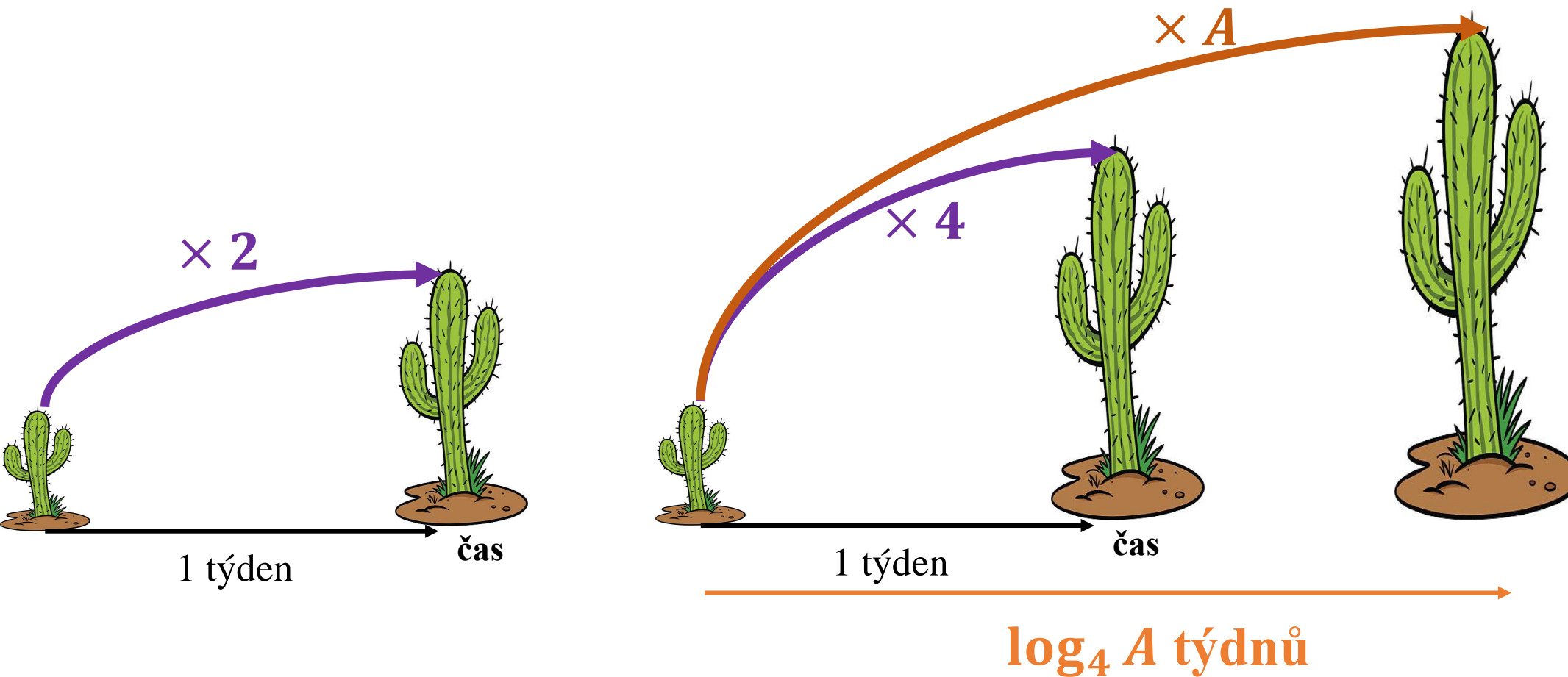
Některé reálné situace, které zažíváme v každodenním životě nebo nějaké pseudorealistické situace.

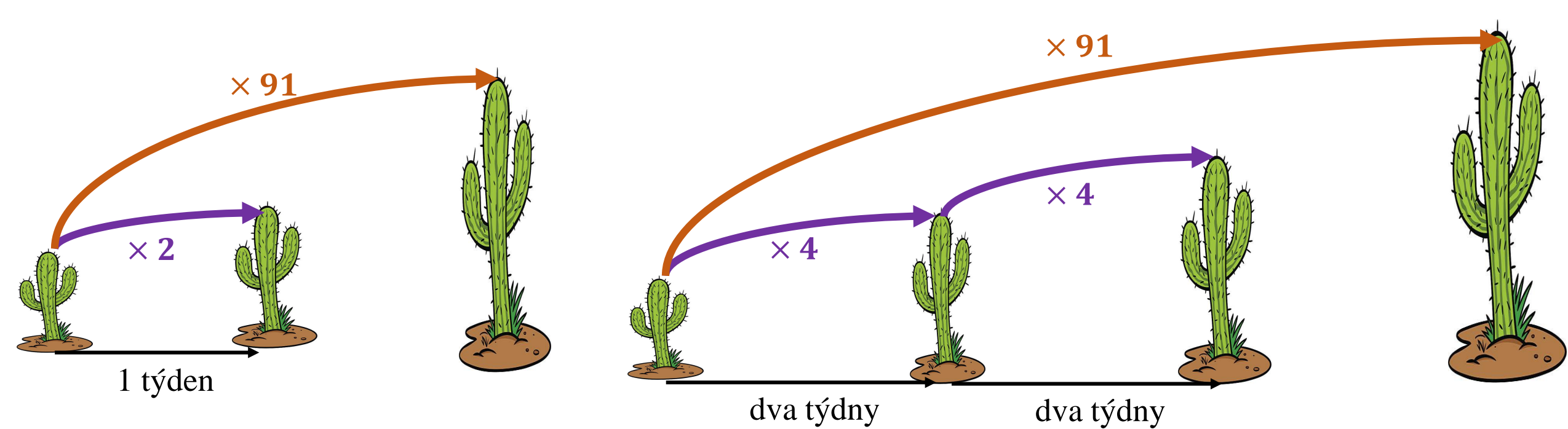


Jak můžeme změnit základ logaritmu z 2 na jiné číslo (například 4)?

$\log_2 A$

$\log_4 A$

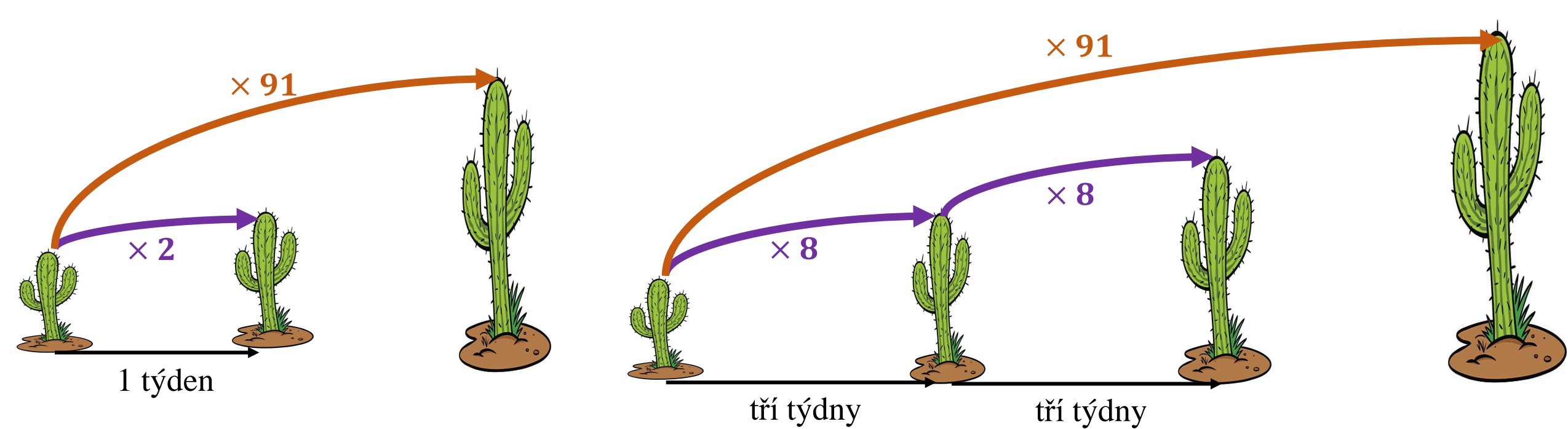




$\log_2 91$ ukazuje počet **týdnů**, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

dvoutýdenních období

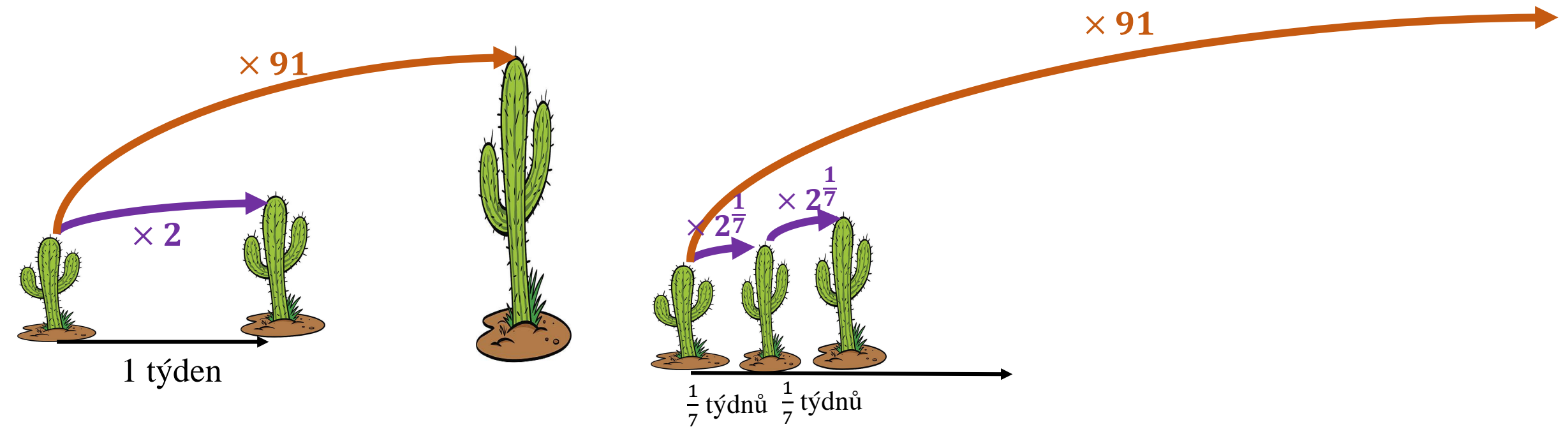
$\log_4 91$ ukazuje počet, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.



$\log_2 91$ ukazuje počet **týdnů**, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

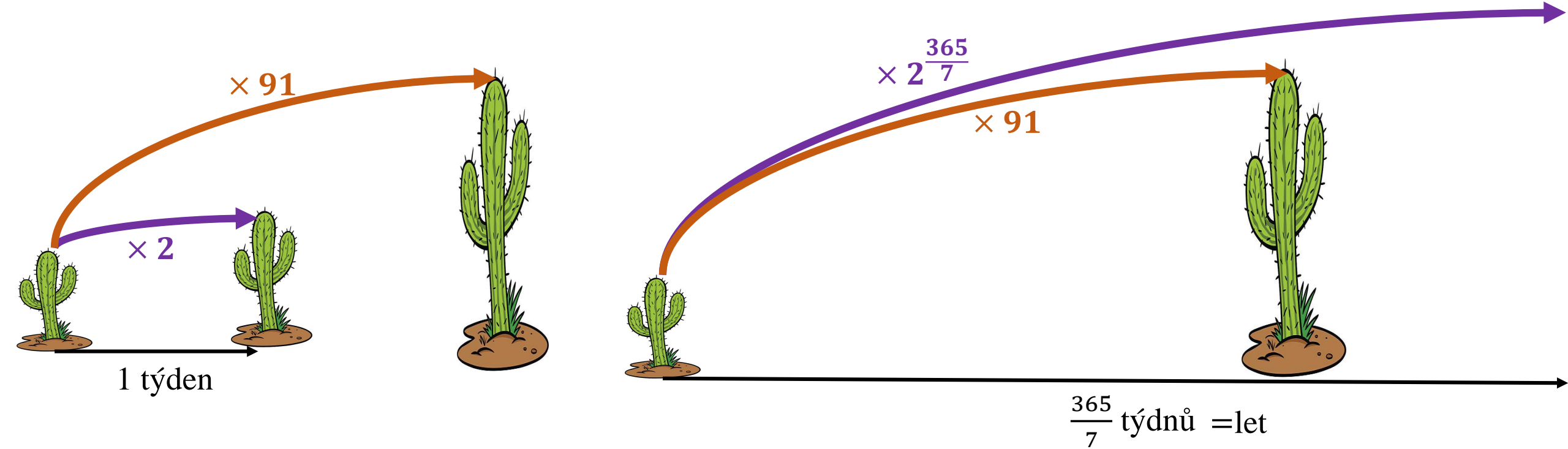
tři týdenních období

$\log_8 91$ ukazuje počet, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.



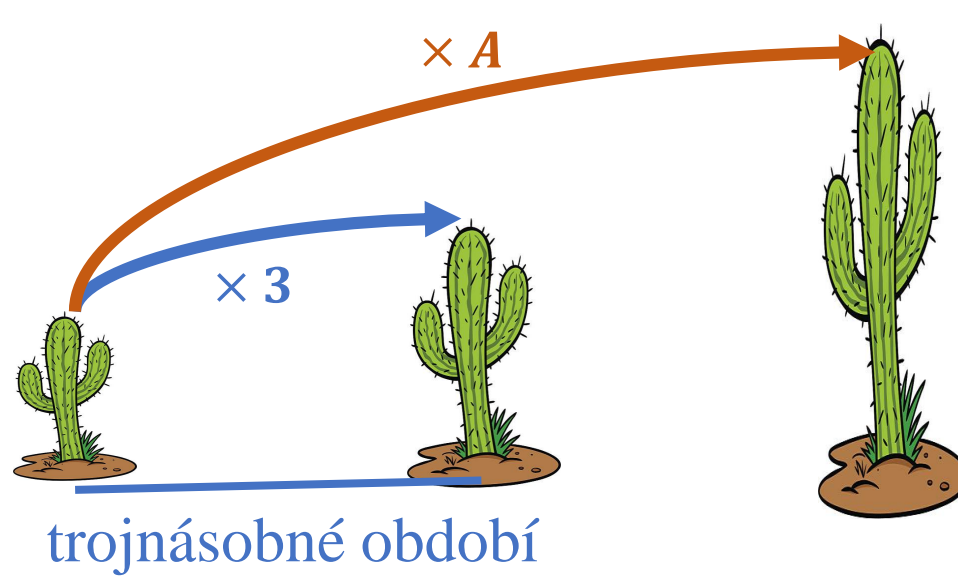
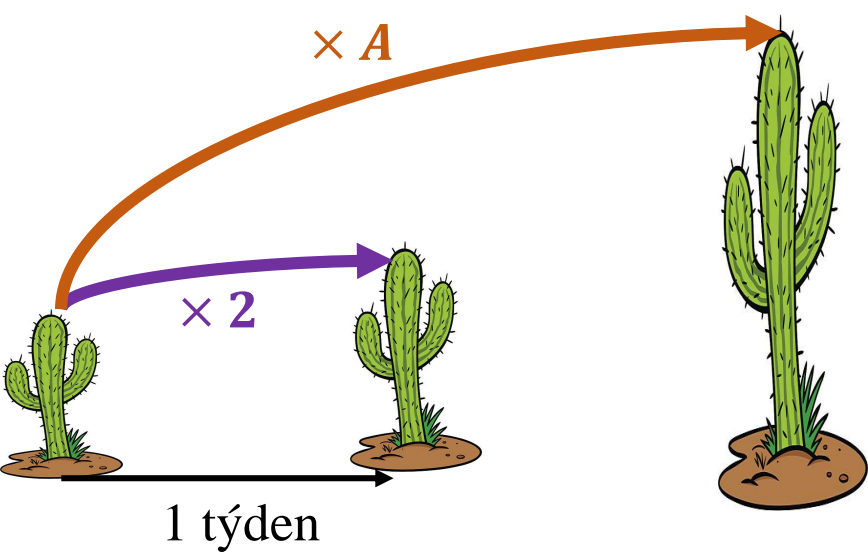
$\log_2 91$ ukazuje počet **týdnů**, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

$\log_{2^{\frac{1}{7}}} 91$ ukazuje počet **dní**....., které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.



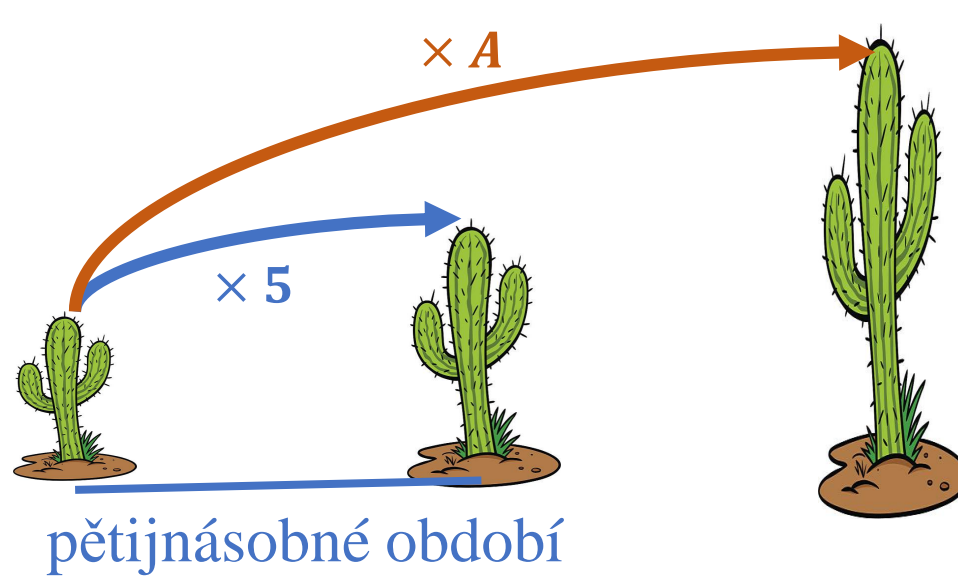
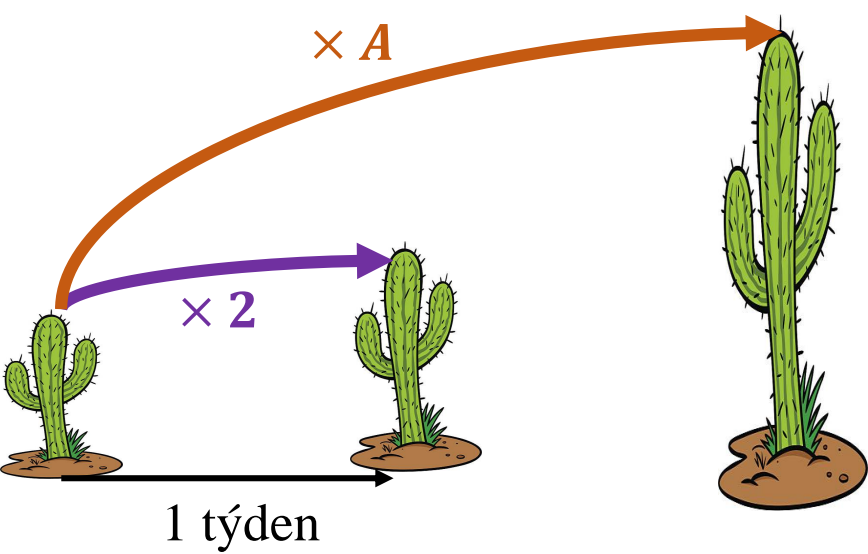
$\log_2 91$ ukazuje počet **týdnů**, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.

$\log_{2^{\frac{365}{7}}} 91$ ukazuje počet **let**, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 91-násobku své výšky.



= je doba, za kterou se výška kaktusu ztrojnásobí.

$\log_3 A = ?$ Kolik trojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl A -násobku své výšky?

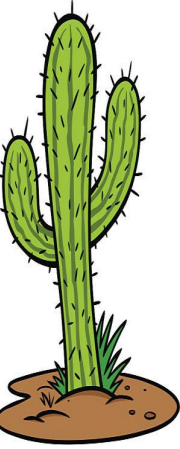


= je doba, za kterou se výška kaktusu zpětínásobí.

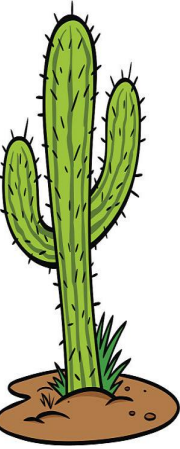
$\log_5 A = ?$ Kolik pětijnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *A-násobku* své výšky?

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte každou z následujících vět.

- a) Dvounásobné období je doba, za kterou **se výška kaktusu zdvounásobí.**
- b) Čtyřnásobné období je doba, za kterou **se výška kaktusu zčtyřnásobí.**
- c) Desetinásobné období je doba, za kterou **se výška kaktusu zdesetinásobí.**

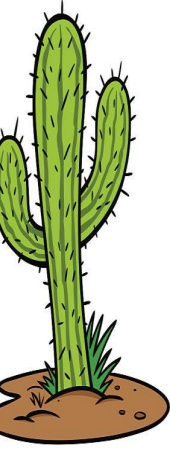


Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Odpovězte na následující otázky [vaše odpověď by měla být přirozené číslo]. Ke každé části nakreslete diagram a ukažte, jak můžete pomocí diagramu svou odpověď zdůvodnit.



- a) Kolik dvoujnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky? **3**
- b) Kolik čtyřnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *16-násobku* své výšky? **4**
- c) Kolik šestinásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *216-násobku* své výšky? **3**
- d) Kolik trojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *81-násobku* své výšky? **4**
- e) Kolik pětinásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *5-násobku* své výšky? **1**

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Odpovězte na následující otázky [vaše odpověď by měla být ve tvaru logaritmu].



a) Kolik dvoujnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *9-násobku* své výšky? $\log_2 9$

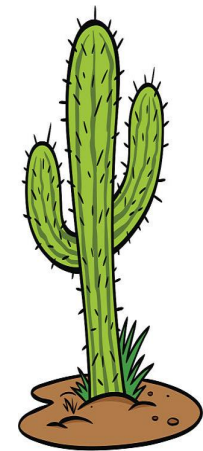
b) Kolik čtyřnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *5-násobku* své výšky? $\log_4 5$

c) Kolik šestinásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *200-násobku* své výšky? $\log_6 200$

d) Kolik trojnásobných období kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky?

$$\log_3 8$$

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Opravte níže uvedenou rovnost.



Počet dvoujnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky

=

Počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl *8-násobku* své výšky

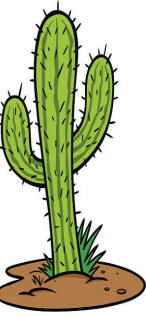
Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Zjednodušte každý zlomek/podíl.

a)
$$\frac{\text{Počet dvoujnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2^k\text{-násobku své výšky}}{\text{Počet dvoujnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2\text{-násobku své výšky}} = k$$

b)
$$\frac{\text{Počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2^k\text{-násobku své výšky}}{\text{Počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2\text{-násobku své výšky}} = k$$

c)
$$\frac{\text{Počet pětinásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2^k\text{-násobku své výšky}}{\text{Počet pětinásobných období, které kaktus potřebuje, aby dosáhl } 2\text{-násobku své výšky}} = k$$

Použijte příběh s kaktusem a vysvětlete, proč tato logaritmická věta platí.



$$\frac{\log_2 15}{\log_2 5} = \frac{\log_4 15}{\log_4 5} = \log_5 15$$

$\frac{\log_2 15}{\log_2 5}$ počet dvoujnásobných období, které kaktus potřebuje k dosažení **15-násobku** své výšky
= $\frac{\log_4 15}{\log_4 5}$ počet dvoujnásobných období, které kaktus potřebuje k dosažení **5-násobku** své výšky

$\frac{\log_4 15}{\log_4 5}$ počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje k dosažení **15-násobku** své výšky
= $\frac{\log_5 15}{\log_5 5}$ počet čtyřnásobných období, které kaktus potřebuje k dosažení **5-násobku** své výšky

= $\frac{\log_5 15}{\log_5 5}$ počet pětinasobných období, které kaktus potřebuje k dosažení **15-násobku** své výšky
= $\frac{\log_5 15}{\log_5 5}$ počet pětinasobných období, které kaktus potřebuje k dosažení **5-násobku** své výšky

$$\frac{\log_2 15}{\log_2 5} = \frac{\log_4 15}{\log_4 5} = \frac{\log_5 15}{\log_5 5}$$

$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 4 - \log_{10} 2$$

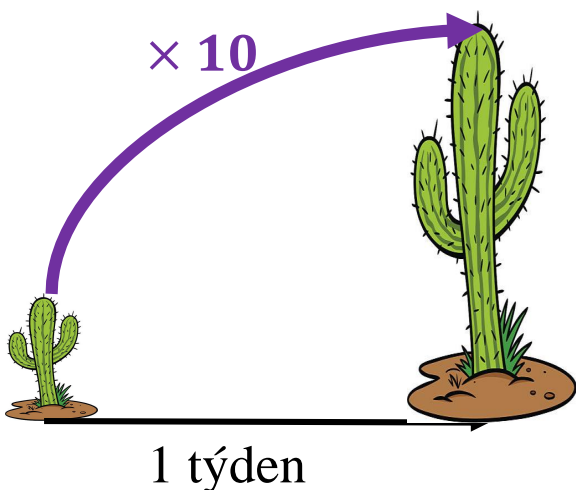
$$\log_{10} 3x = \log_{10} 16 - \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 3x = \log_{10} 8$$

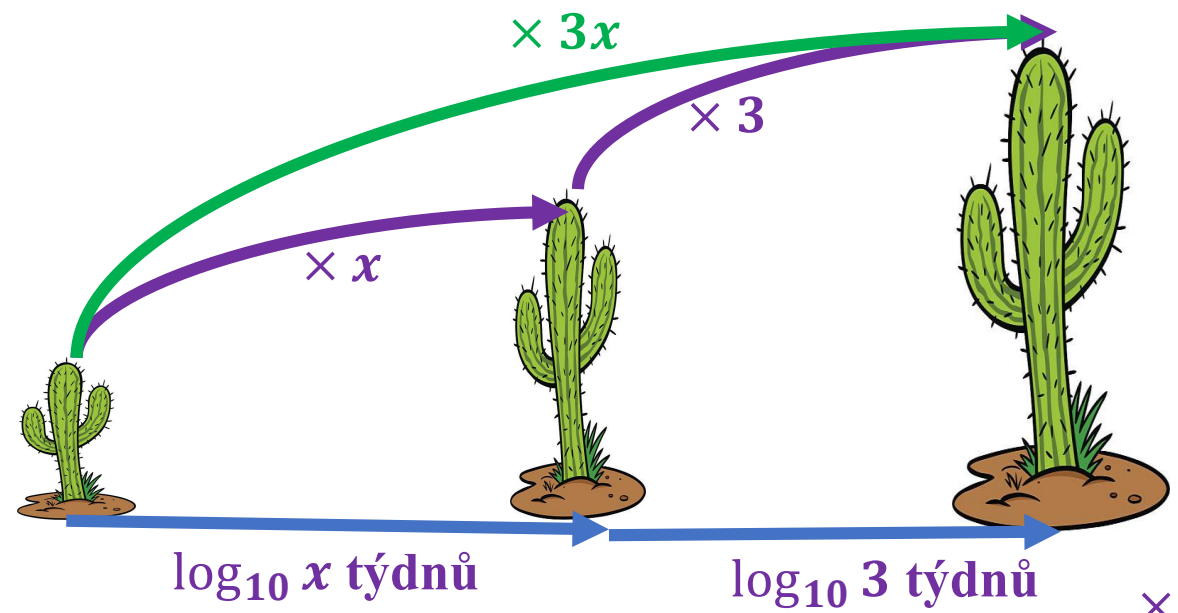
$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Co znamená každý krok? Co znamená ta odpověď?

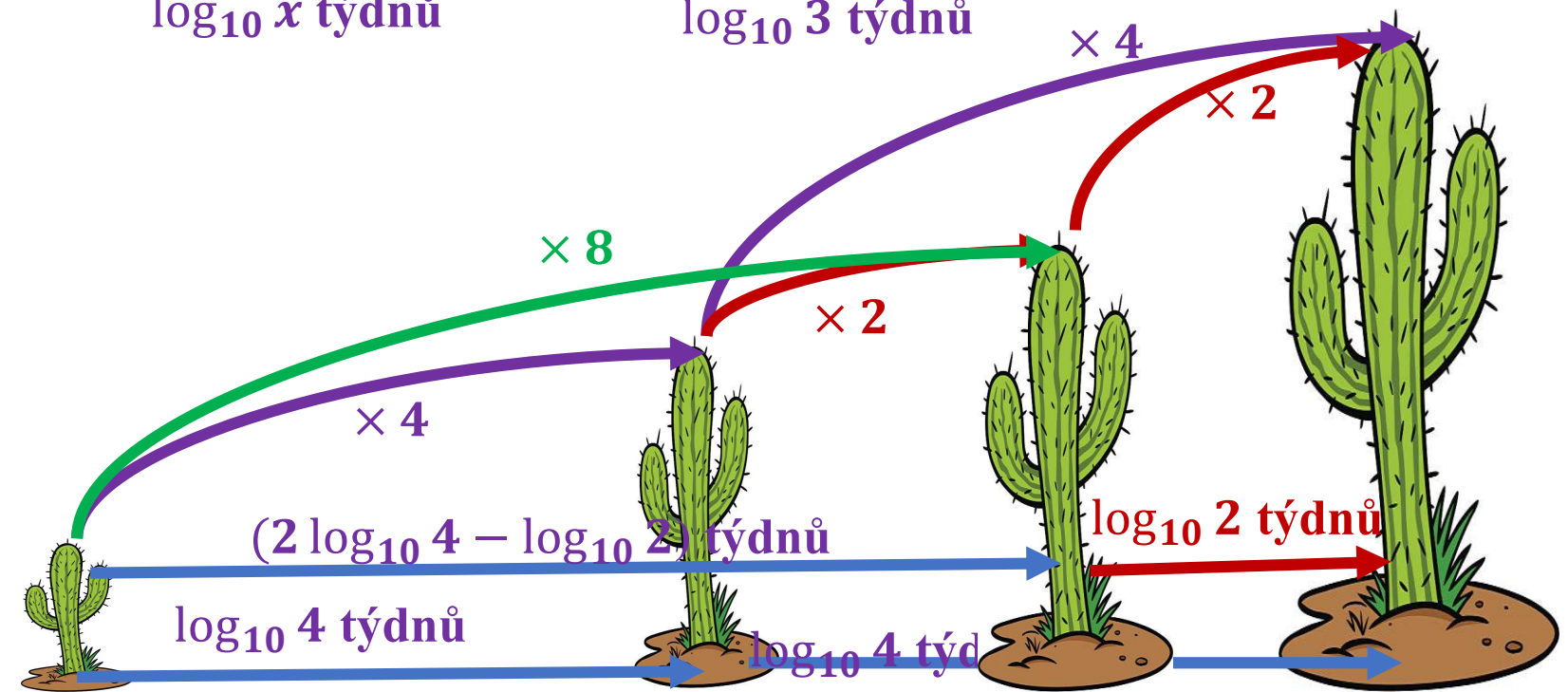


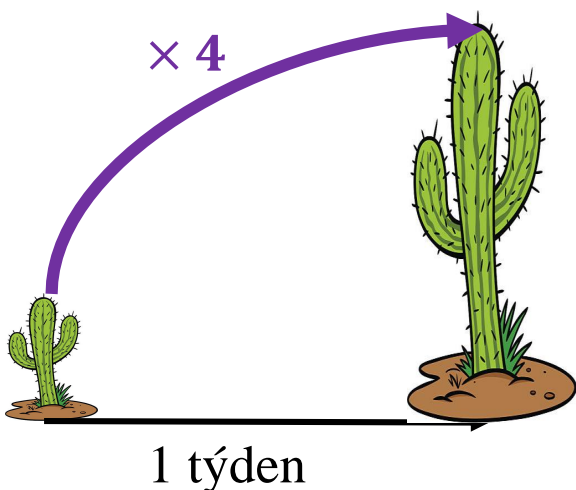
$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 4 - \log_{10} 2$$



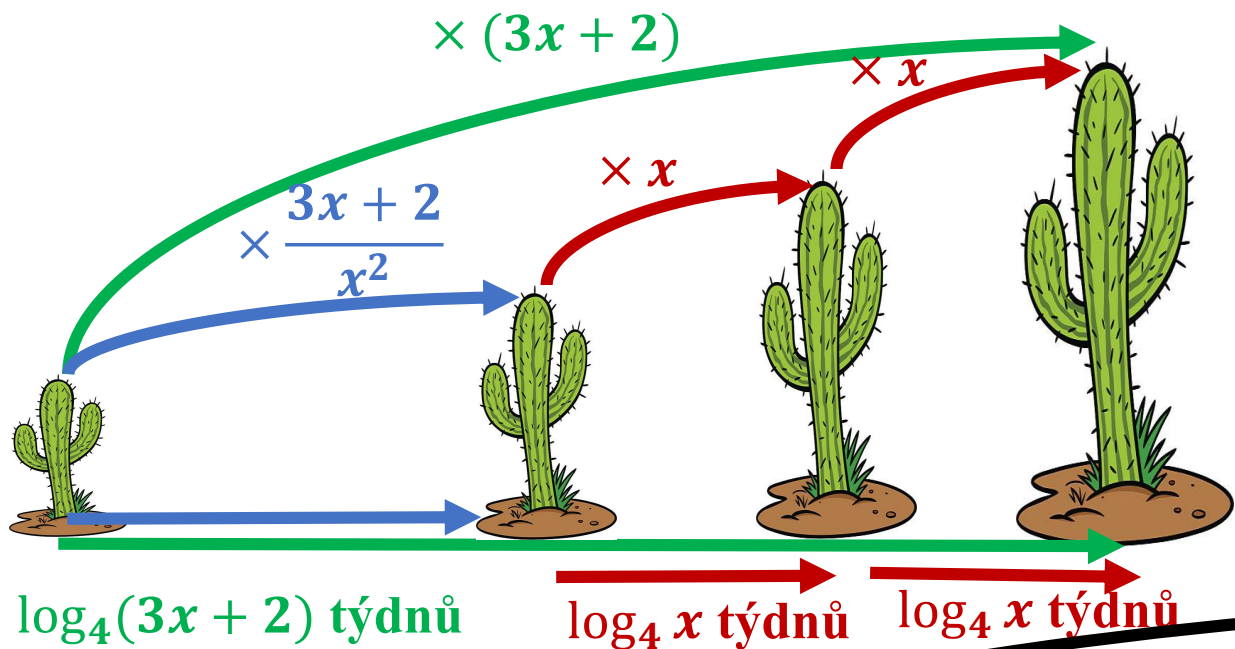
$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$





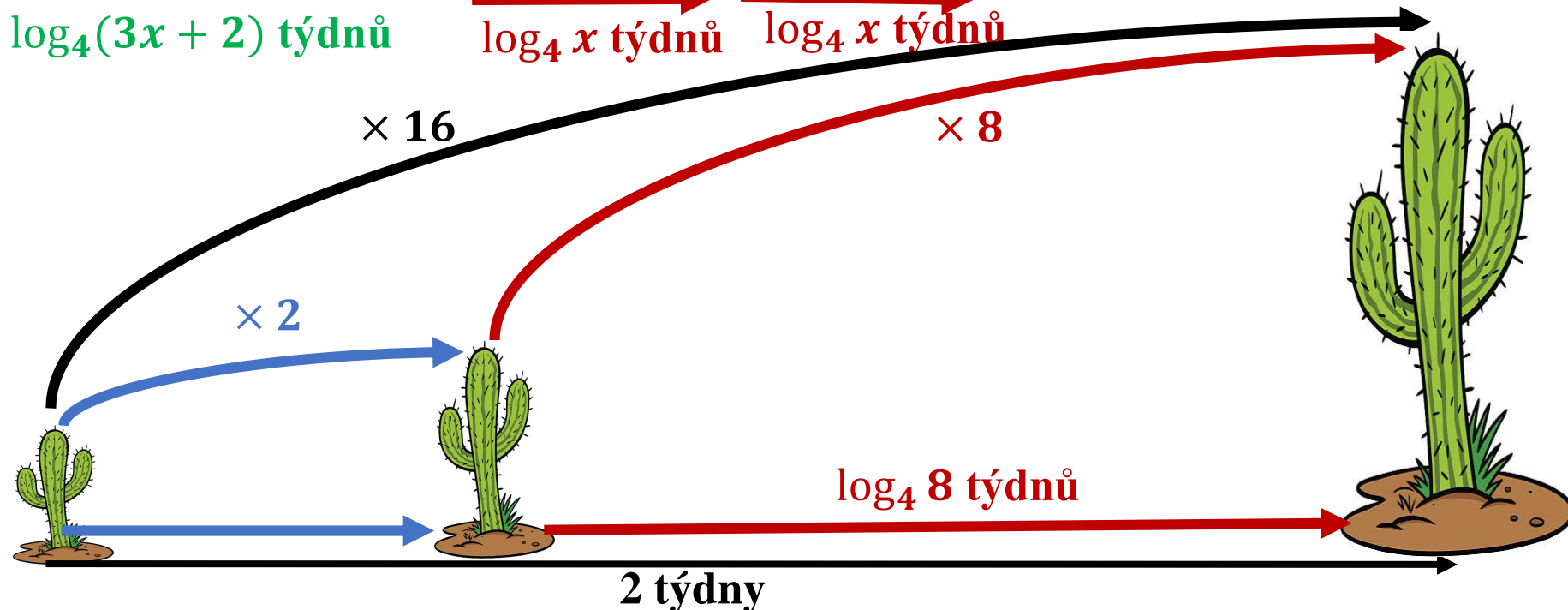
$$\log_4(3x + 2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$$



$$\frac{3x + 2}{x^2} = 2$$

$$x = 2$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \times$$



$$\log_{y^a} x = \frac{1}{a} \log_y x$$

Domácí úkol: Máme kaktus, jehož výška se každý měsíc zdvojnásobí. Pomocí tohoto kaktusu, navrhnete jednoduchý slovní úkol, který ukáže, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12} \log_2 17$ platí.

Nápověda: Musíte odpovědět na svůj slovní úkol dvěma různými způsoby. V prvním způsobu musíte získat jako odpověď $\log_{2^{12}} 17$. V druhém způsobu musíte získat $\frac{1}{12} \log_2 17$. Jelikož má slovní úkol pouze jednu správnou odpověď, můžete uzavřít, že rovnost $\log_{2^{12}} 17 = \frac{1}{12} \log_2 17$ platí.

References

- Borji, V., Surynková, P., Kuper, E., & Robová, J. (2024). Using contextual problems to develop preservice mathematics teachers' understanding of exponential and logarithmic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2309284>
- Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 211–230. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1>
- Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3), 135–164. <https://doi.org/10.1007/BF01273661>
- Díaz-Berrios, T., & Martínez-Planell, R. (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, Article 100953. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953>
- Euler, L. (1984). *Elements of algebra*. (J. Hewlet, Trans.). Springer. (Original work published 1770).
- Kuper, E., & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 57, Article 100740. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740>
- Webb, D. C., van der Kooij, H., & Geist, M. R. (2011). Design research in the Netherlands: Introducing logarithms using realistic mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 2(1), 47–52. <https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.708>

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz