



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #12

Vahid Borji & Petra Surynková

Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Co to znamená, když se řekne, že „**nekonečná řada konverguje nebo diverguje**“?

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Posloupnost částečných součtů (S_n)

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Existuje-li limita částečných součtů $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

Pokud $S \in \mathbb{R}$, říkáme že řada $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ je konvergentní

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ neexistuje nebo je nekonečná, říkáme, že řada $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ je divergentní

1. Řada jako nekonečný nekončící proces sčítání [Series as an infinite unending process of addition]

$$\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \dots$$

$$S = (\frac{1}{1} - \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{3}{5}) + (\frac{3}{5} - \frac{4}{7}) + \dots = 1 + (-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) + (-\frac{3}{5} + \frac{3}{5}) + (-\frac{4}{7} + \frac{4}{7}) + \dots \quad \mathbf{S = 1}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (\text{Grandi, 1703})$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

$$B = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots$$

$$A > B \quad A < B \quad A = B$$

2. Řada jako posloupnost částečných součtů

$$\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \dots$$

$$S_1 = 1 - \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = 1 - \frac{3}{5}$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) = 1 - \frac{4}{7}$$

$$S_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = s$$

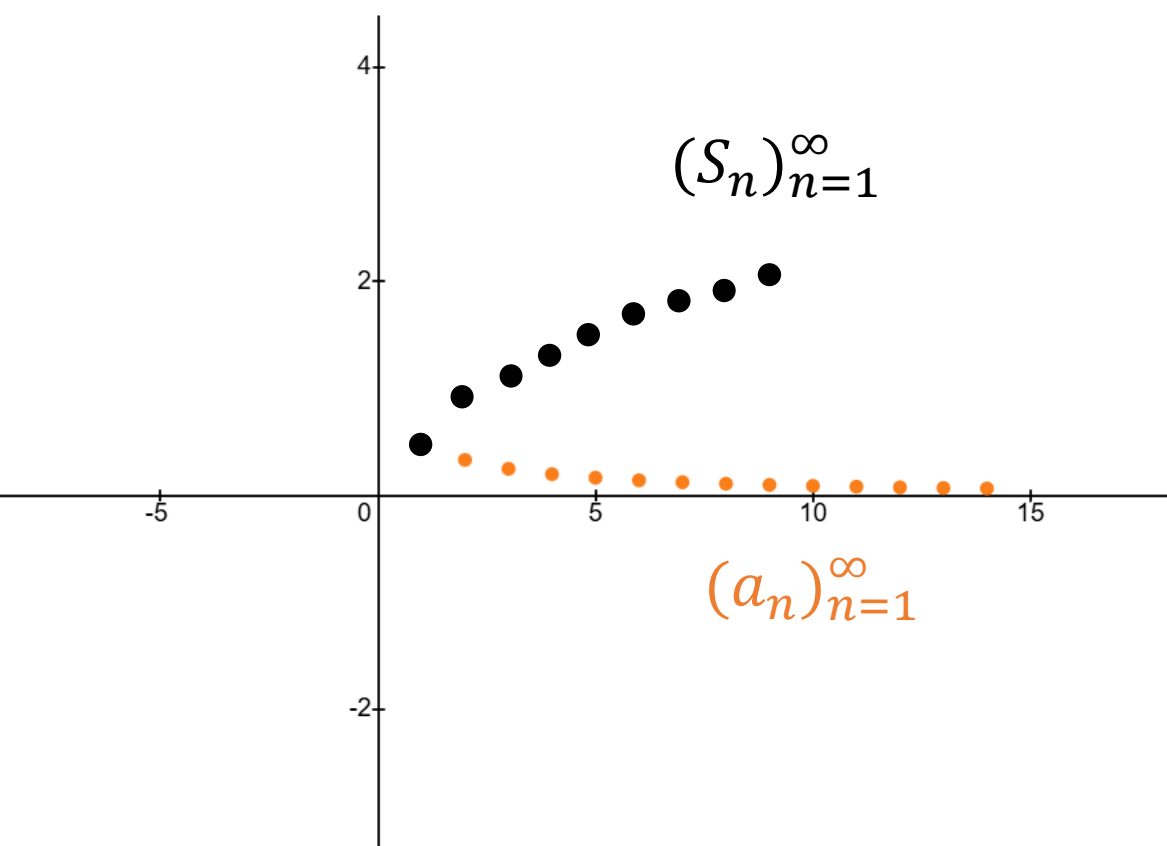
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (\text{Grandi, 1703})$$

$$(S_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 0, 1, 0, 1, \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ neexistuje}$$

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty \quad \text{řada } A \text{ je divergentní}$$

$$B = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots \quad S_n = n(n+1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1) = +\infty \quad \text{řada } B \text{ je divergentní}$$

Grafické znázornění posloupnosti členů a_n a posloupnosti částečných součtů S_n :



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje}$$

S_1

a_1

S_2

a_2

S_3

a_3

S_4

a_4

S_5

a_5

S_6

a_6

S_7

a_7

S_8

a_8

Mylné představy studentů o nekonečných řadách

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \checkmark$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{10000}, \dots$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{10000} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \times$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{10000}, \dots$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{10000} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \times$$

Dvě různé představy o nekonečných řadách:

Představa 1: Řada jako nekonečný nekončící proces sčítání

Představa 2: Řada jako posloupnost částečných součtů

- ❑ Většina výzkumů, které jsem vám ukázal (Bagni, 2005; Barahmand, 2018; Cornu, 1991, Tall, 1976), byla prováděna se studenty, kteří dosud neabsolvovali formální výuku nekonečných řad. Proto účastníci těchto studií většinou vykazovali představu 1.
- ❑ Domníváme se, že po formální výuce se představa studentů posune z představy 1 na představu 2, ale některé studie (Martínez-Planell et al., 2012; Eckman & Hah Roh, 2024) ukazují, že i po formální výuce mnoho studentů stále vykazuje představu 1.

V kurzech Analýza 1 nebo Kalkulu se mnoho učitelů věnuje velkému množství kritérií konvergence, a kvůli časovým omezením často nezbývá čas na jiné krásné části řad.

Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy

Věta (Nutná podmínka konvergence řady).

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ neexistuje} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+4} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+4} \text{ diverguje}$$

Věta (Srovnávací kritérium).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy, které
: $a_n \leq b_n$, pak platí:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2}$$

$$\frac{n}{n^2} < \frac{17n+2}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{17n+2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje } \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n+2}{n^2} \text{ diverguje}$$

Věta (Limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$$

(a) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(b) Pro $A \in (0, \infty)$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje

(c) Pro $A = 0$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(d) Pro $A = \infty$ platí: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \quad a_n = \sin \frac{1}{n} \quad b_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ D } \implies \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \text{ D}$$

Věta (Cauchyho limitní odmocninové kritérium).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverguje

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Řada může konvergovat i divergovat.

Věta (D'Alembertovo limitní podílové kritérium).

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

Pak platí:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Konverguje}$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Diverguje}$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Řada může konvergovat i divergovat.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \qquad a_n = \frac{n^2}{1+3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{1+3^n}} = \dots = \frac{1}{3} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n}$$

$$a_n = \frac{n^2}{1+3^n} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{1+3^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{1+3^{n+1}}}{\frac{n^2}{1+3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(1+3^n)}{n^2(1+3^{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n + \dots}{n^2 3^{n+1} + \dots} = \dots = \frac{1}{3} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+3^n} \text{ konverguje}$$

Zkušební otázky na téma nekonečná řada v MA1

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

[10 bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{n} \right)^n \sin(7^{-n}).$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

[10 bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (n+1)^4}{3^n \cdot n! \cdot n^6}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

[10 bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln \left(\frac{1 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right).$$

Nyní vyřešíme několik aktivit souvisejících s řadami

1) Zapište pomocí sumy:

a) $10 - 2 + 0,4 - 0,08 + \dots$

b) $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \dots$

2) Napište ve tvaru zlomku tato čísla (řešte pomocí řady)

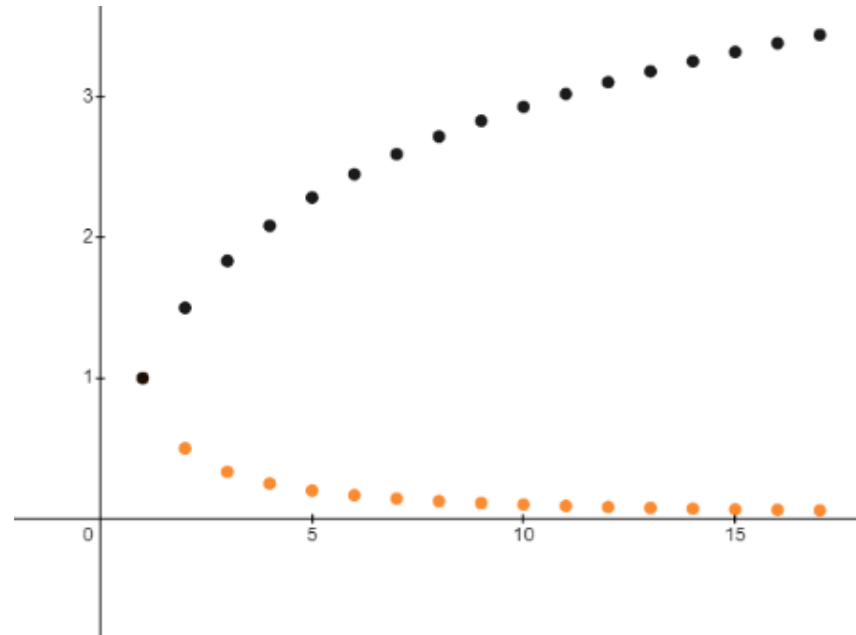
a) $14,\overline{3}$ b) $-0,\overline{61}$ c) $5,25\overline{87}$

3) U nekonečné geometrické řady určete první člen a_1 a kvocient q . Rozhodněte, zda je daná řada konvergentní a pokud ano, určete její součet $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{2-i}$.

4) Řešte rovnici $2 - 4x + 8x^2 - \dots = 1$

5) Řešte rovnici $(x + 1) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (x + 2)^i = \frac{3x+2}{5}$

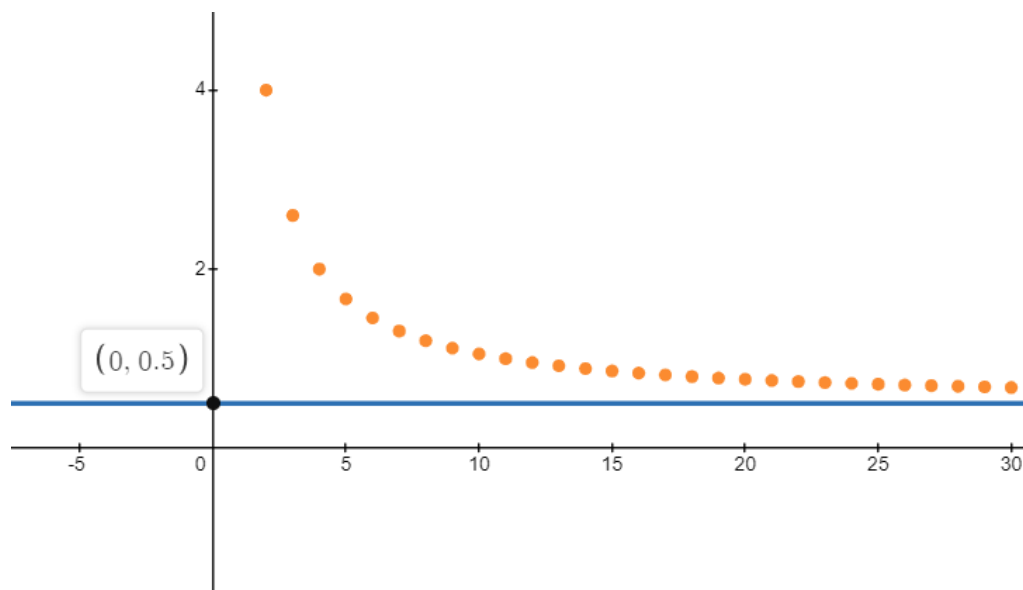
6) Na obrázku níže jsou grafy dvou posloupností souvisejících s jistou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vysvětlete, který graf náleží posloupnosti se členy a_n a který náleží posloupnosti částečných součtů S_n .



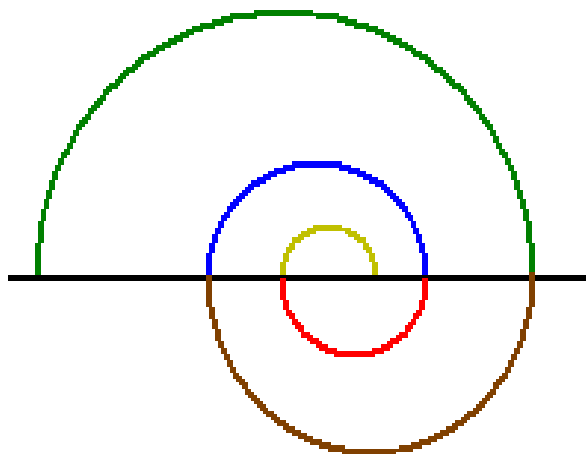
7) Uvažujme nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Graf posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je na obrázku níže.

a) Je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, nebo divergentní?

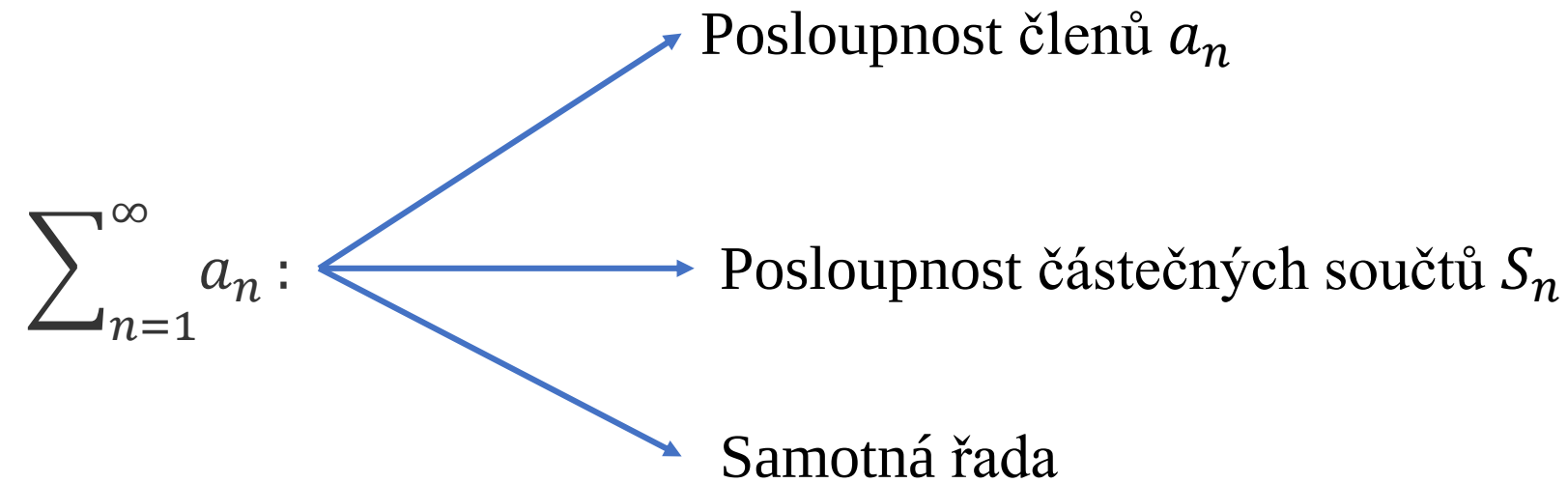
b) Načrtněte, jak přibližně vypadá graf posloupnosti částečných součtů této řady a stručně vysvětlete svou odpověď na otázku (a).



8) Nekonečná spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je o $\frac{1}{3}$ menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.



➤ Pro každou danou řadu spolu souvisejí tři složky:



➤ Přestože se snažíme vše co nejlépe vysvětlit, mnoho studentů má potíže pochopit, jak tyto tři složky spolu souvisejí.

9) Zvažme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tato řada buď konverguje, nebo diverguje. Stejně tak posloupnost členů $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ buď konverguje, nebo diverguje. A samozřejmě i odpovídající posloupnost částečných součtů $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ buď konverguje, nebo diverguje. Pro každý scénář od A do H v tabulce rozhodněte, zda je daný scénář možný, nebo nemožný. Například ve scénáři A se ptáme: Je možné nalézt řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro kterou posloupnost členů $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ konverguje, ale posloupnost částečných součtů $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ diverguje a samotná řada diverguje?

Scénář	Posloupnost členů $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$	Posloupnost částečných součtů $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$	Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	možný, nebo nemožný?
A	Konverguje	Diverguje	Diverguje	
B	Konverguje	Diverguje	Konverguje	
C	Konverguje	Konverguje	Diverguje	
D	Konverguje	Konverguje	Konverguje	
E	Diverguje	Konverguje	Diverguje	
F	Diverguje	Konverguje	Konverguje	
G	Diverguje	Diverguje	Diverguje	
H	Diverguje	Diverguje	Konverguje	

10) Necht' je n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dán vzorcem $S_n = 3 - n2^{-n}$.

(a) Najděte hodnotu a_n (pro obecné $n \in \mathbb{N}$).

(b) Určete součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

11) Najděte součet $\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \dots$

Teleskopická řada vhodná pro střední školu

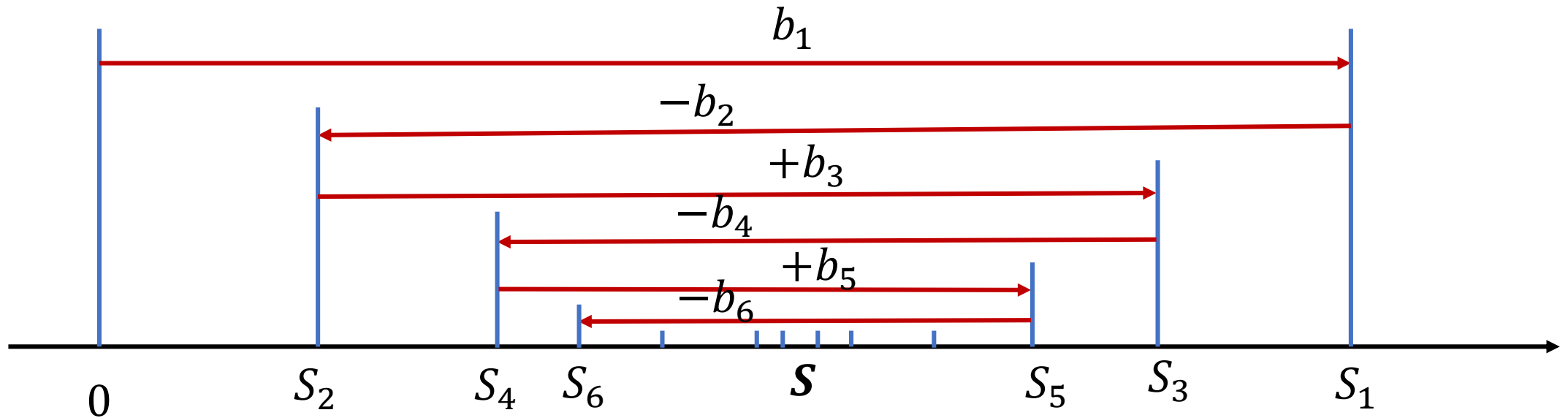
$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cancel{n+1}}{n(\cancel{n+1})} - \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ & s_1 = 1 - \frac{1}{2} \quad s_2 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3} \\ & s_3 = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{4} \\ & s_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

12) Najděte součet řady: a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$ b) **[domácí úkol]** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$:

1) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost reálných čísel

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$



Vizuální důkaz, proč tato řada konverguje

13) Je padesátý částečný součet S_{50} řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ větší, nebo menší než její součet? Vysvětlete.

14) Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

15) Známe fakt, že $e^x > x + 1$ pro každé $x > 0$. Pokud je S_n Částečným součtem harmonické řady ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), ukažte, že $e^{S_n} > n + 1$. Proč z toho plyne, že harmonická řada diverguje?

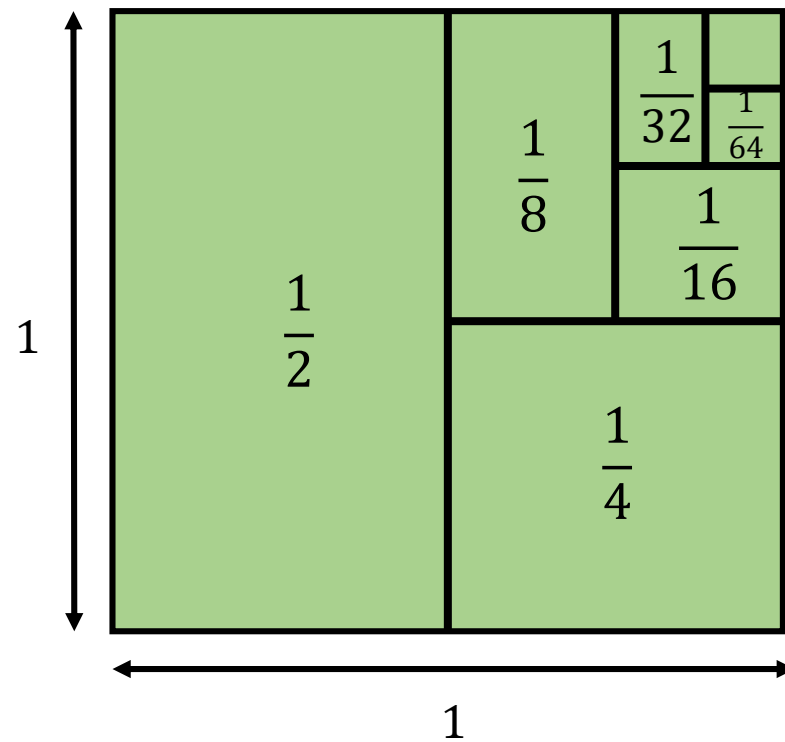
16) Dokažte, že daná rovnost platí (řešte geometricky pomocí obsahu čtverce.)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

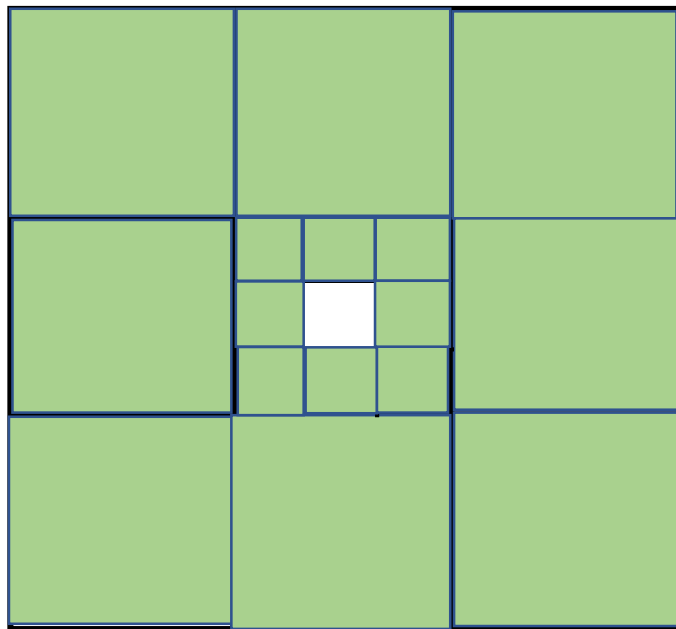
$$\frac{8}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8}{9^3} + \cdots + \frac{8}{9^n} + \cdots = 1$$

Nekonečné řady a geometrie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$



$$\frac{8}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8}{9^3} + \cdots + \frac{8}{9^n} + \cdots = 1$$



17) Najděte součet řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$$

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz

- Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1–32. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047051.07646.92>
- Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 77–100. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-2813-5>
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 557–578. <https://doi.org/10.2307/749887>
- Barahmand, A. (2021). Exploring students' consistency in their notions: The case of comparing infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(7), 1049–1062. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1736350>
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, A. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0>
- Eckman, D., & Roh, K. H. (2024). A symbolizing activity for constructing personal expressions and its impact on a student's understanding of the sequence of partial sums. *Journal of Mathematical Behavior*, 73. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101117>
- Larsen, S., Strand, S., & Vroom, K. (2024). How undergraduate students think about summation (sigma) notation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 10(1), 232–254. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00193-w>
- Martínez-Planell, R., González, A. C., DiCristina, G., & Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 235–249. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9401-2>
- Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371–397. <https://doi.org/10.1007/BF00240986>
- Tall, D. & Schwarzenberger, R. (1978), Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.