



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #11

Vahid Borji & Petra Surynková

Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Co to znamená, když se řekne, že „nekonečná řada konverguje nebo diverguje“?

Definice:

Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Výraz tvaru

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

se nazývá **řada**.

➤ Pokud je posloupnost konečná, tedy $(a_n)_{n=1}^k$ vznikne **konečná řada** a zapisuje se

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n$$

➤ Pokud je posloupnost nekonečná, tedy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vznikne **nekonečná řada** a zapisuje se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Posloupnost částečných součtů (S_n)

Máme danu posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Člen posloupnosti částečných součtů S_n vznikne jako součet

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Tedy

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ Limita částečných součtů

Existuje-li limita částečných součtů $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Pokud $S \in \mathbb{R}$, říkáme že řada $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ je konvergentní

Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ neexistuje nebo je nekonečná, říkáme, že řada $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ je divergentní

Představy studentů o nekonečných řadách

Mezi studenty existují dvě různé představy o nekonečných řadách (Martínez-Planell et al., 2012):

1. Řada jako nekonečný nekončící proces sčítání [Series as an infinite unending process of addition]

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

2. Řada jako posloupnost částečných součtů

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \dots$$

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \dots = 1 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\right) + \dots \quad \mathbf{S = 1}$$

1. Řada jako nekonečný nekončící proces sčítání

2. Řada jako posloupnost částečných součtů

$$S_1 = 1 - \frac{2}{3}$$

$$S_2 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = 1 - \frac{3}{5}$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) = 1 - \frac{4}{7}$$

$$S_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{2n+1}\right) \\ &= \mathbf{1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = S} \end{aligned}$$

Nekonečná geometrická řada

Necht' $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$.

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

Necht' (S_n) je posloupnost částečných součtů.

Potom je (S_n) konvergentní a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$$

Geometrická řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + q,$$

$$S_3 = 1 + q + q^2$$

$$S_n = 1 + \cancel{q + \dots + q^{n-1}}$$

$$S_n - qS_n = 1 - q^n$$

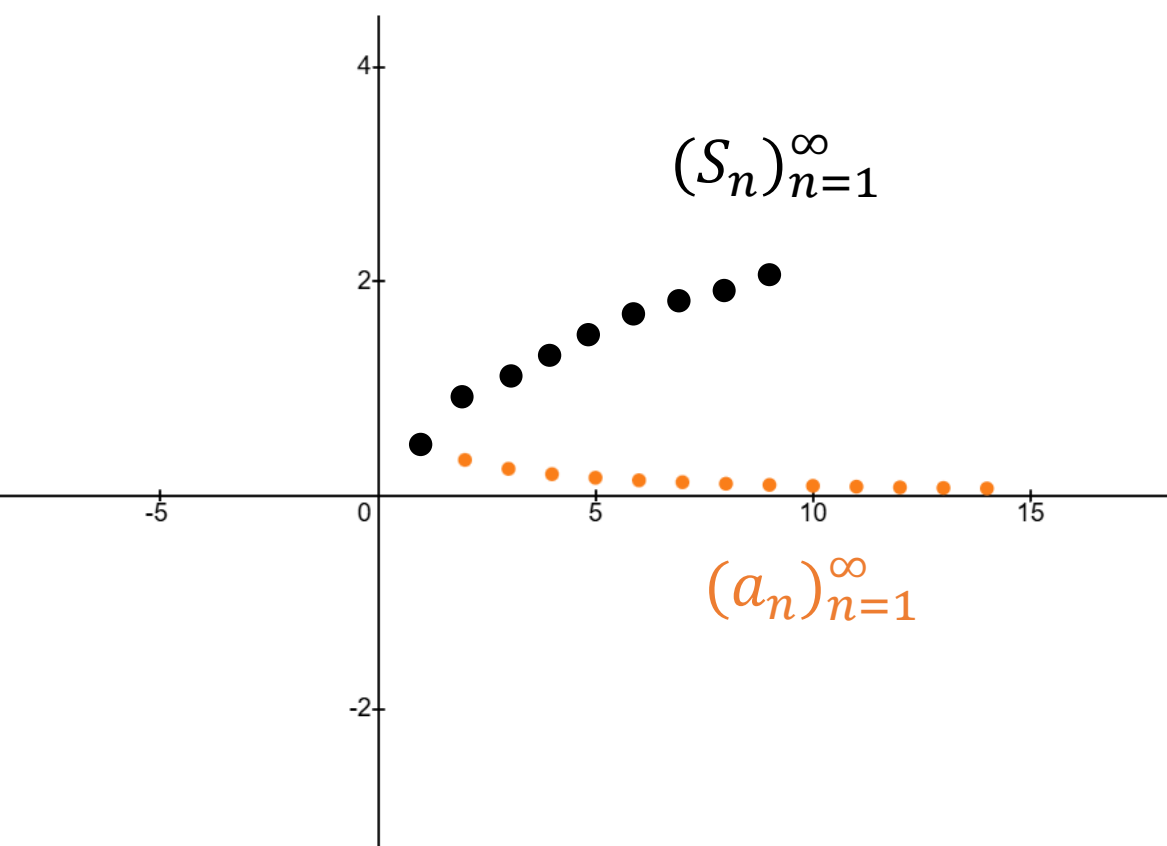
$$qS_n = \cancel{q + \dots + q^{n-1}} + q^n$$

$$S_n(1 - q) = 1 - q^n \Rightarrow S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & -1 < q < 1 \\ \text{Divergentní} & q \geq 1 \vee q \leq -1 \end{cases}$$

Grafické znázornění posloupnosti členů a_n a posloupnosti částečných součtů S_n :



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje}$$

S_1

a_1

S_2

a_2

S_3

a_3

S_4

a_4

S_5

a_5

S_6

a_6

S_7

a_7

S_8

a_8

Mylné představy studentů o nekonečných řadách

❑ Někteří studenti věří, že pokud členy řady s kladnými členy směřují k nule, částečný součet se stále bude neomezeně zvětšovat, což znamená, že řada nemůže konvergovat.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \checkmark$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{10000}, \dots \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{10000} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \times$$

❑ Někteří studenti předpokládají, že pokud posloupnost a_n klesá a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musí také konvergovat.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{10000}, \dots \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{10000} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \checkmark$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \times$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (\text{Grandi, 1703})$$

Bagni (2005) dal tuto řadu 77 studentům ve věku 16–18 let:

Odpovědi

Výsledek je 0	26	29%
Výsledek je 1	3	4%
Výsledek může být buď 0, nebo 1	18	20%
Výsledek je $\frac{1}{2}$	4	5%
Výsledek je nekonečný	2	2%
Výsledek neexistuje	5	6%
Žádná odpověď	30	34%

Odpovědi těchto 5 studentů nebyly podloženy jasným odůvodněním.

Různé výsledky pro součet Grandiho řady:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (\text{Grandi, 1703})$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)}_S \Rightarrow S = 1 - S$$
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

Částečné součty Grandiho řady:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (\text{Grandi, 1703})$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

...

$$(S_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ neexistuje}$$

Rovnost $0,999 \dots = 1$

Několik výzkumníků jako Cornu (1991), Tall (1976) a Tall a Schwarzenberger (1978) ukázali, že mnoho studentů si myslí, že tato rovnost je nepravdivá.

➤ Některí studenti si myslí, že $0,999\dots$ je poslední číslo před 1, a tedy je menší než 1.

➤ Některí studenti to odůvodňují následovně:

$$0,9 < 1$$

$$0,99 < 1$$

$$0,999 < 1$$

...

$$0,9999999999 < 1$$

$$\not\Rightarrow 0,999 \dots < 1$$

((Mylná představa souvisí s generalizací pravidel pro konečná čísla na nekonečná.))

Obvykle nemůžeme generalizovat pravidla platná pro konečné množiny na nekonečné.

Tsamir (1999) zjistil, že nejen studenti, ale i učitelé chybně připisují vlastnosti konečných množin nekonečným množinám.

Jeden příklad z MA1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} \right) \stackrel{\text{✗}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

Zde nemůžeme použít větu o aritmetické limitě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \dots = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$0,999 \dots = 1$$

$$0,9999 \dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots =$$

$$a_1 = \frac{9}{10}, \quad q = \frac{1}{10} < 1$$

$$= \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

$$\Rightarrow 0,9999 \dots = 1$$

Předpokládejme, že A je součet přirozených čísel a B je součet kladných sudých čísel:

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

$$B = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots$$

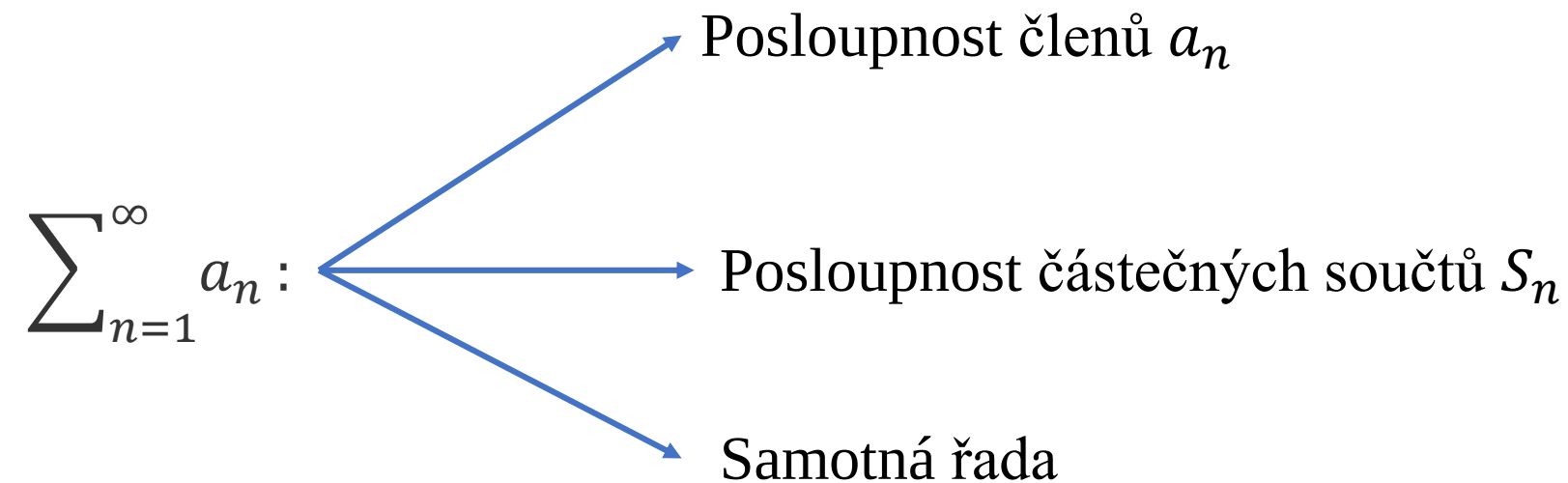
Který z následujících vztahů mezi A a B podle vás platí?

- 1) $A > B$
- 2) $A < B$
- 3) $A = B$
- 4) Nelze je porovnat.

Studie Barahmanda (2018) mezi 93 studenty středních škol ve věku 16–17 let o nekonečných řadách:

Počet odpovědí na otázku:				
$A > B$	$A < B$	$A = B$	Není možné	Žádná odpověď
43	11	11	25	3

➤ Pro každou danou řadu spolu souvisejí tři složky:



➤ Přestože se snažíme vše co nejlépe vysvětlit, mnoho studentů má potíže pochopit, jak tyto tři složky spolu souvisejí.

Aby učitelé tyto tři složky propojili, mohou uvést následující příklady:

1) Vztah mezi posloupností a_n a samotnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Příklad: Zapište součet $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \dots$ ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2) Vztah mezi a_n a S_n

Příklad: Uvažujte posloupnost $4, 3, \frac{9}{4}, \frac{27}{16}, \dots$, a najděte posloupnost částečných součtů S_n .

3) Vztah mezi S_n a samotnou řadou ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$)

Příklad: Je-li dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$, zapište posloupnost částečných součtů S_n .

Pro každý scénář od *A* do *H* v tabulce rozhodněte, zda je daný scénář možný, nebo nemožný. Například ve scénáři *A* se ptáme: Je možné nalézt řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro kterou posloupnost členů $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ konverguje, ale posloupnost částečných součtů $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$ diverguje a samotná řada diverguje?

Scénář	Posloupnost členů $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$	Posloupnost částečných součtů $\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$	Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	možný, nebo nemožný?
A	Konverguje	Diverguje	Diverguje	
B	Konverguje	Diverguje	Konverguje	
C	Konverguje	Konverguje	Diverguje	
D	Konverguje	Konverguje	Konverguje	
E	Diverguje	Konverguje	Diverguje	
F	Diverguje	Konverguje	Konverguje	
G	Diverguje	Diverguje	Diverguje	
H	Diverguje	Diverguje	Konverguje	

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz

- Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1–32. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047051.07646.92>
- Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 77–100. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-2813-5>
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 557–578. <https://doi.org/10.2307/749887>
- Barahmand, A. (2021). Exploring students' consistency in their notions: The case of comparing infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(7), 1049–1062. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1736350>
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, A. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0>
- Eckman, D., & Roh, K. H. (2024). A symbolizing activity for constructing personal expressions and its impact on a student's understanding of the sequence of partial sums. *Journal of Mathematical Behavior*, 73. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101117>
- Larsen, S., Strand, S., & Vroom, K. (2024). How undergraduate students think about summation (sigma) notation. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 10(1), 232–254. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00193-w>
- Martínez-Planell, R., González, A. C., DiCristina, G., & Acevedo, V. (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 235–249. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9401-2>
- Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371–397. <https://doi.org/10.1007/BF00240986>
- Tall, D. & Schwarzenberger, R. (1978), Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.