



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #10

Vahid Borji & Petra Surynková

Kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

Různé metody řešení kvadratické rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$):

- Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)
- Diskriminant
- Rozklad na součin
- Grafická metoda

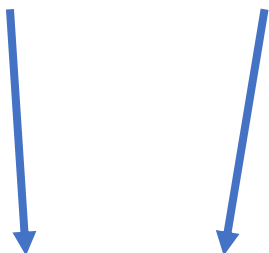
Definice druhé odmocniny?

Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla a je nezáporné reálné číslo b , pro které platí, že $b^2 = a$. Značíme $b = \sqrt{a}$.

**Mylné představy žáků při řešení $x^2 = 9$
pomocí druhé odmocniny.**

$$x^2 = 9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$



$$x = 3$$

$$x^2 = 9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$|x| = 3$$

$$x = \pm 3$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

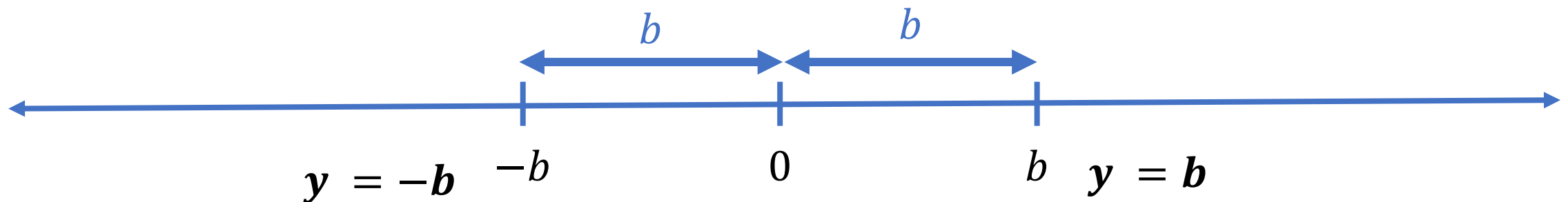
Předchozí znalosti potřebné k řešení kvadratických rovnic:

- 1) Dovednost řešit lineární rovnice: $ax + b = c$
- 2) Dovednost řešit lineární rovnice s absolutní hodnotou ve tvaru:

$$|x - a| = b$$

(geometricky, numericky a symbolicky)

$$|y| = b \quad (b \geq 0) \Rightarrow y = \pm b$$



Předchozí znalosti potřebné k řešení kvadratických rovnic:

Numerické zkoumání možných řešení rovnic:

$$\sqrt{x^2} = ?$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Poté numerické zkoumání rovnice:

$$\sqrt{(x+1)^2} = x+1$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$\sqrt{(-x+1)^2} = -x+1$$

$$\sqrt{(-x+1)^2} = |-x+1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|$$

Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x^2 = 10$$

$$x^2 = b \quad (b \geq 0) \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{b} \Rightarrow |x| = \sqrt{b} \Rightarrow x = \pm\sqrt{b}$$

$$(2x + 1)^2 = 25$$

$$(-x + 1)^2 = 16$$

$$(x - 3)^2 = 10$$

$$(ax + b)^2 = c \quad (a \neq 0, c \geq 0) \Rightarrow \sqrt{(ax + b)^2} = \sqrt{c} \Rightarrow |ax + b| = \sqrt{c} \Rightarrow ax + b = \pm\sqrt{c}$$

Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)

$$x^2 + bx = c$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (\text{Řešení metodou druhé odmocniny})$$

$$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3} \quad \times$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x = 3 &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3 + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x + 1| = 2 \\ &\Rightarrow x + 1 = \pm 2 \\ &\Rightarrow x = 1, x = -3 \end{aligned}$$

Metoda druhé odmocniny (zahrnuje doplnění na čtverec)

Koeficient u x^2 není 1 $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

(Doplnění na čtverec a následné použití druhé odmocniny)

$$4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 3 \Leftrightarrow x^2 - x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = 1 \quad x - \frac{1}{2} = 1 \quad x = \frac{3}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} = -1 \quad x = \frac{-1}{2}$$

Diskriminant

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Diskriminant

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

(Řešení pomocí doplnění na čtverec, kdy a , b a c jsou ponechány jako parametry)

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Metoda diskriminantu poskytuje všechna řešení v množině $\mathbb{R}$.

Počet kořenů může být 0, 1 nebo 2.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Použití diskriminantu k řešení rovnic ekvivalentních $ax^2 + bx + c = 0$

$$64 - x = 8 + \sqrt{x}$$

$$(x^2 - 4x)^2 - 2x^2 + 8x - 15 = 0$$

Skryté kvadratické rovnice

$$a(f(x))^2 + b(f(x)) + c = 0 \quad (f(x) \neq mx)$$

$$f(x) = u \Rightarrow au^2 + bu + c = 0$$

$$u = s \Rightarrow f(x) = s$$

$$\sqrt{x} = u \geq 0$$

$$x = u^2$$

$$64 - u^2 = 8 + u \Rightarrow u^2 + u - 56 = 0 \quad u = 7 \quad x = u^2 = 49$$

$$D = 15$$

$$u = -8 \quad \text{✗}$$

Rozklad na součin

$$x^2 + (a + b)x + ab = 0$$

$$\Rightarrow (x + a)(x + b) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x^2 + 9x + 8 = 0$$

$$(x + 1)(x + 8) = 0$$

Rozklad na součin

$$21x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{4}{21}x - \frac{1}{21} = 0 \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{7}\right) = 0$$

$$21^2x^2 + 21(4x) - 21 = 0 \Rightarrow (21x)^2 + 4(21x) - 21 = 0$$

$$21x = u \Rightarrow u^2 + 4u - 21 = 0 \Rightarrow (u+7)(u-3) = 0$$

$$u = -7 \Rightarrow 21x = -7 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$u = 3 \Rightarrow 21x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a^2x^2 + bax + ac = 0 \Rightarrow (ax)^2 + b(ax) + ac = 0$$

$$ax = u \Rightarrow u^2 + bu + ac = 0$$

➤ **Jaký je problém metody rozkladu na součin?**

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \qquad \left(x + \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

- Je nepravděpodobné, že danou kvadratickou rovnicí lze vyřešit metodou rozkladu na součin.
- To je dostatečný důvod zdůraznit další techniky, jako je použití druhé odmocniny, doplnění na čtverec a diskriminant.

Grafická metoda

Předchozí znalosti:

$$y = f(x) \qquad y = g(x)$$

x -ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $f(x)$ a $g(x)$ $\iff$ Kořeny rovnice $f(x) = g(x)$

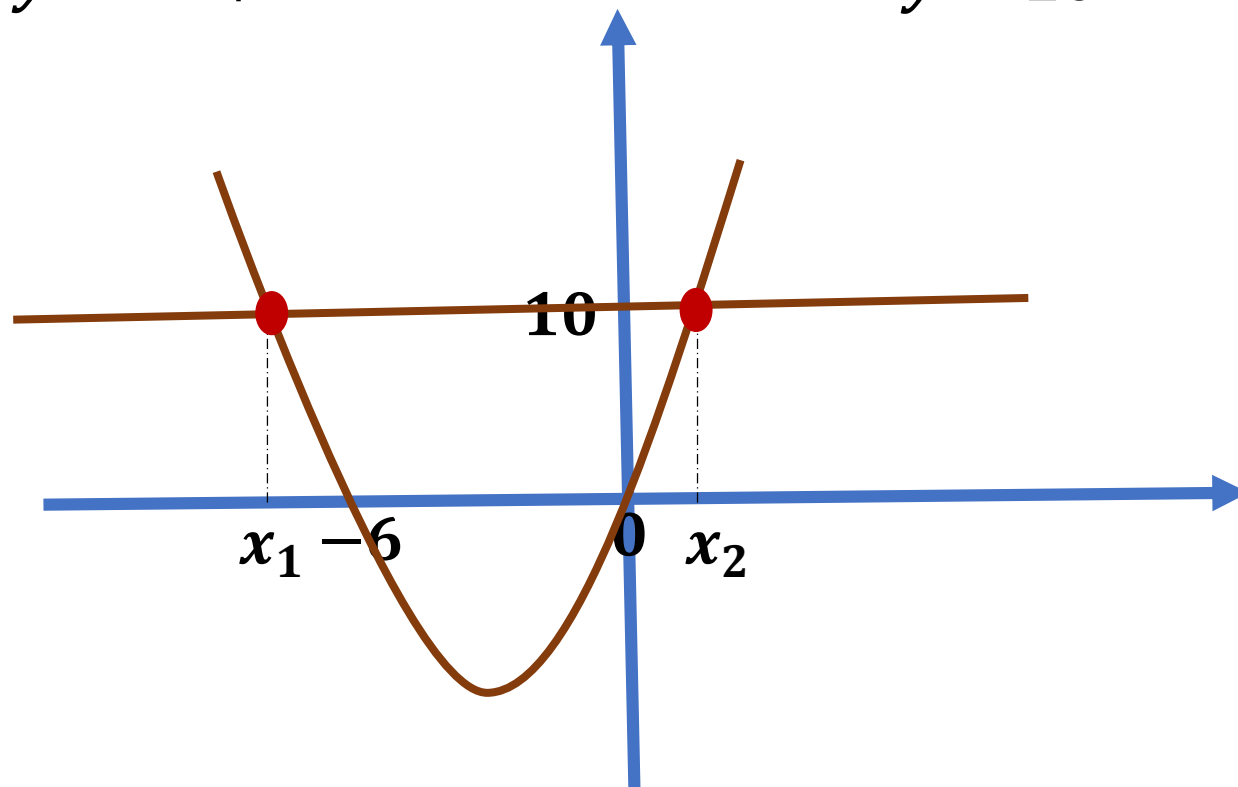
Průsečíky grafu $y = f(x)$ s osou x $\iff$ Kořeny rovnice $f(x) = 0$

$$y = x^2 + 6x$$

$$y = 10$$

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x(x + 6) = 0$$



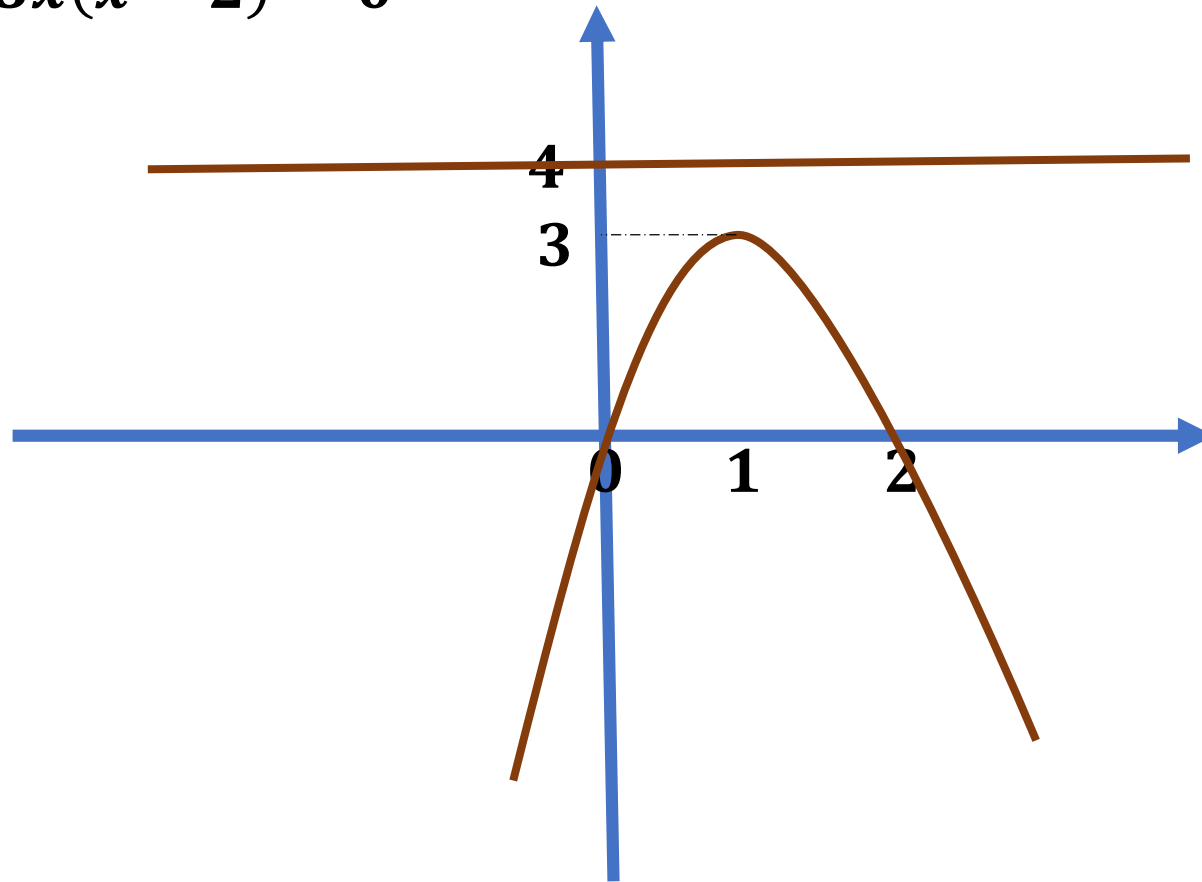
$$x^2 + 6x = 10 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 10 = 0$$

$$-3x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 4$$

$$y = -3x^2 + 6x$$

$$y = 4$$

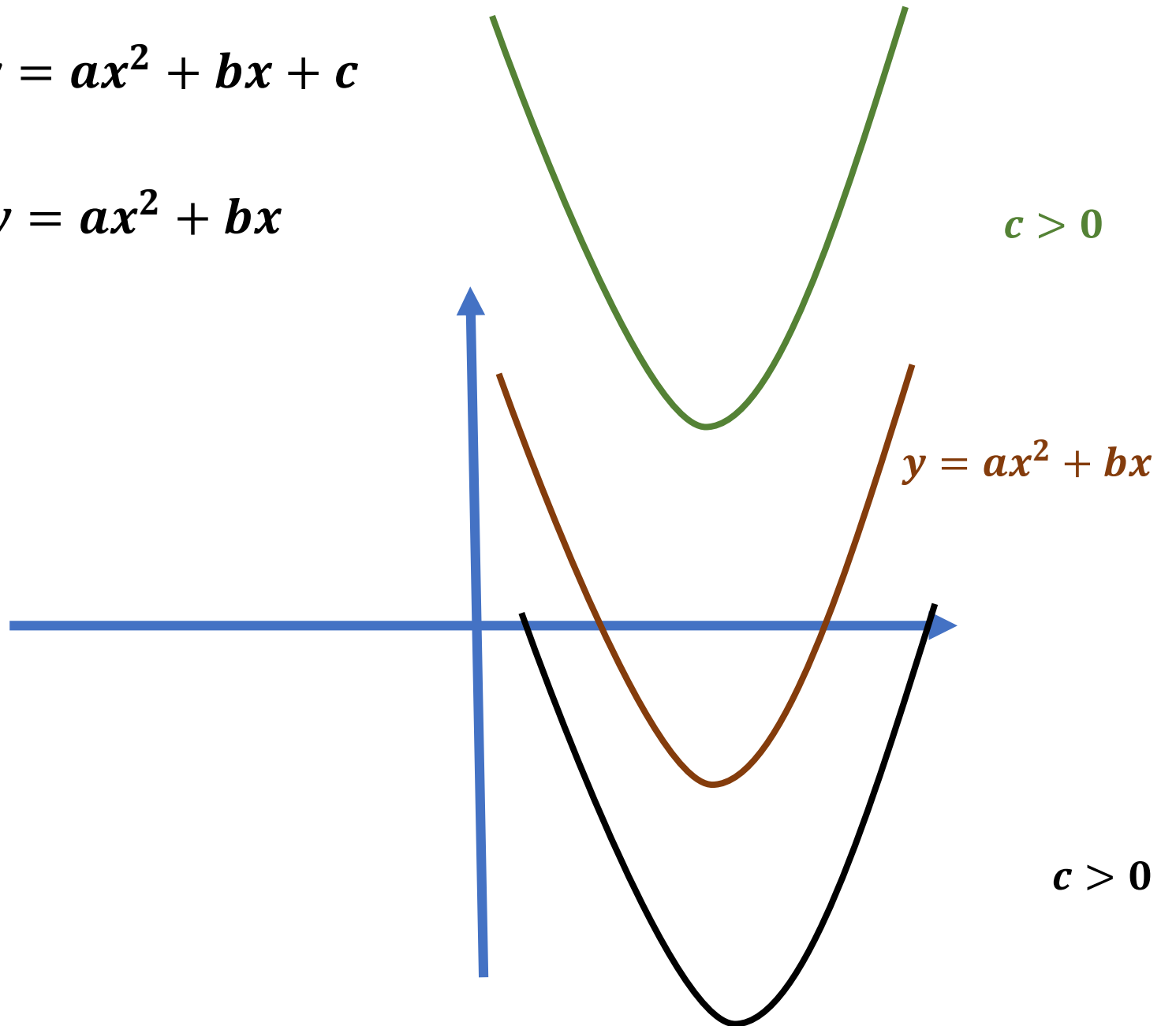
$$-3x(x - 2) = 0$$



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

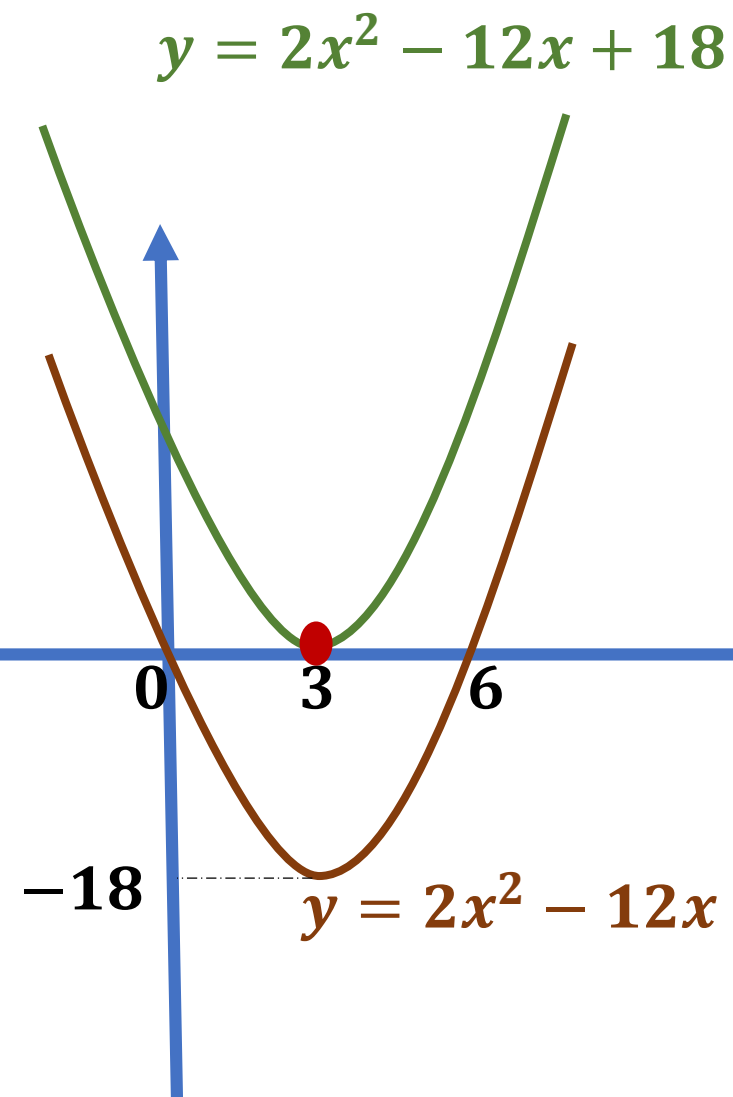
$$y = ax^2 + bx$$



$$2x^2 - 12x + 18 = 0 \quad y = 2x^2 - 12x + 18$$

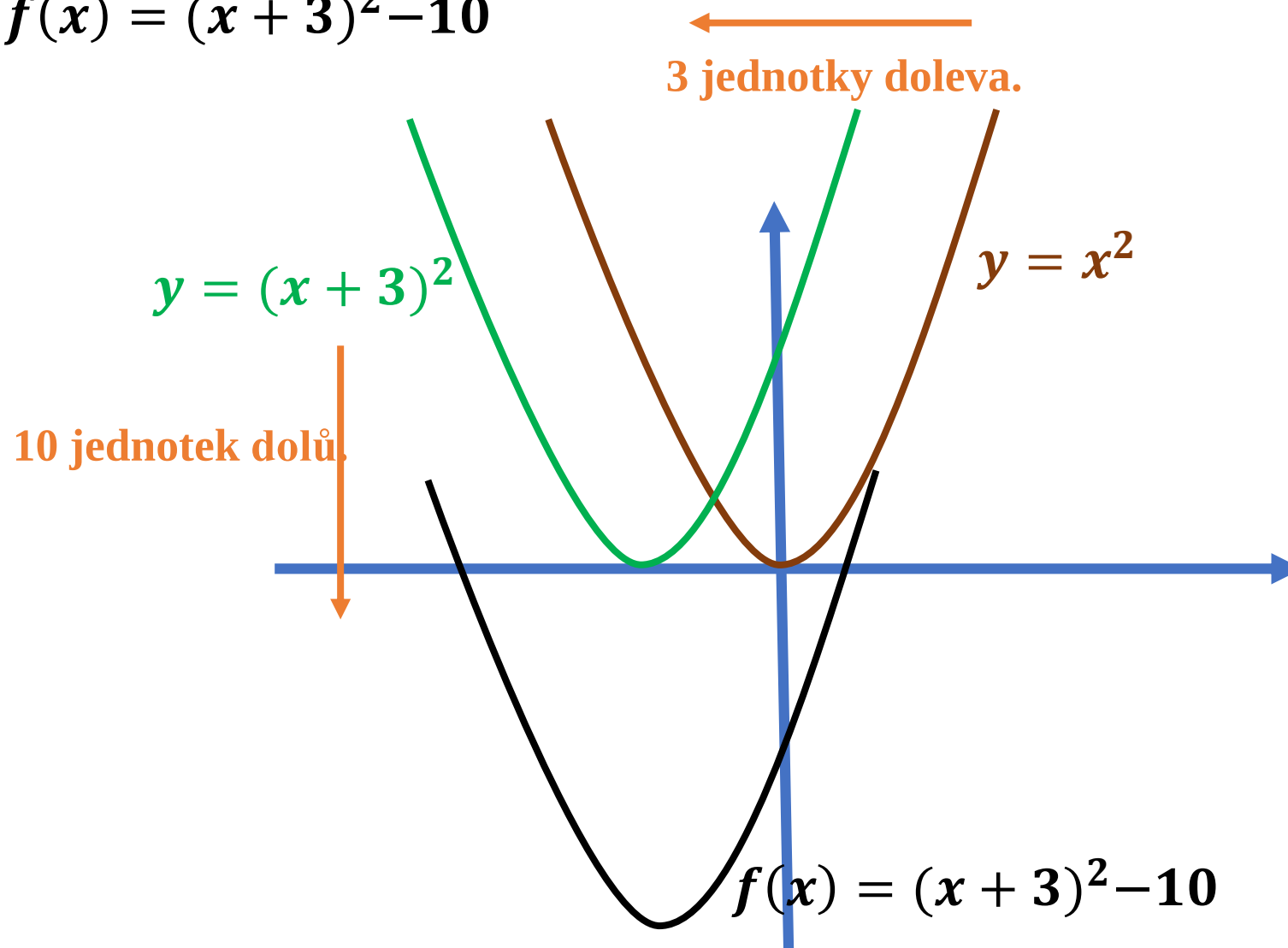
$$y = 2x^2 - 12x$$

$$2x(x - 6) = 0$$



$$x^2 + 6x - 1 = 0 \quad f(x) = x^2 + 6x - 1$$

$$f(x) = (x + 3)^2 - 10$$



➤ **Jaký je problém grafické metody?**

Při použití grafické metody (na papíře, tužkou a bez technologií) nemůžeme najít přesné hodnoty řešení.

Můžeme pouze určit, kolik existuje průsečíků, ale ne jejich přesné souřadnice.

Abychom určili přesné hodnoty kořenů, musíme použít jiné metody, jako například diskriminant, metodu odmocniny nebo rozklad na součin.

References

- Chaachoua, H., Mizoguchi, T., Bessot, A., Kaspary, D., Barquero, B., Nguyen, A. Q., & Pilet, J. (2024). A comparative study of the teaching of quadratic equations in five curricula: Brazil, France, Japan, Spain and Vietnam. *Recherches en didactique des mathématiques*, 44(1), 75–113. <https://doi.org/10.46298/rdm.13753>
- Crisan, C. (2012). I thought I knew all about square roots. In C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 32(3), 43–48.
- Crisan, C. (2014). The case of the square root: Ambiguous treatment and pedagogical implications for prospective mathematics teachers. In Pope, S. (Ed.) *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education*, 75–82.
- Didiş, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and difficulties of students in formulating and solving quadratic equations with one unknown. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 15(4), 1137–1150. <https://doi.org/10.12738/estp.2015.4.2743>
- Didiş, M. G. (2018). Secondary school students' conception of quadratic equations with one unknown. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 19(1), 112–129. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v19i1.94>
- Didiş, M. G. (2023). A thematic review of quadratic equation studies in the field of mathematics education. *Participatory Educational Research*, 10(4), 29–48. <http://dx.doi.org/10.17275/per.23.58.10.4>
- Hong, D.S., & Choi, K.M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 241–263. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9512-4>
- Kontorovich, I. (2018). Undergraduates' images of the root concept in $\mathbb{R}$ and in $\mathbb{C}$. *The Journal of Mathematical Behavior*, 49, 184–193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.002>.
- Kontorovich, I. (2021). Pre-university students square-root from squared things: A commognitive account of apparent conflicts within learners' mathematical discourses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 64, 100910. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100910>
- Li, X. (2011). Mathematical knowledge for teaching algebraic routines: A case study of solving quadratic equations. *Journal of Mathematics Education*, 4(2), 1–16.

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz