



UNIVERZITA KARLOVA

Matematicko-fyzikální fakulta;
Katedra didaktiky matematiky

Rozvíjení konceptuálních znalostí ve školské matematice

Lekce #1

Vahid Borji & Petra Surynková

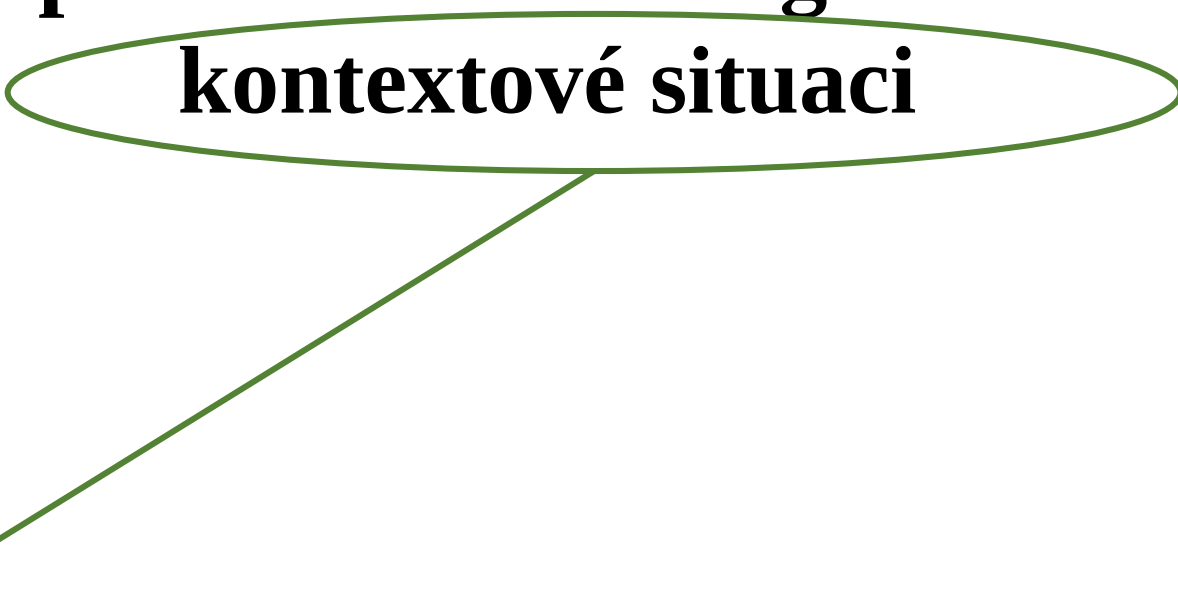
Cíle kurzu:

- Konceptuální porozumění
- Úroveň střední školy
- Problem-solving
- Domácí úkol (borji@karlin.mff.cuni.cz) [úterý 12:00]

Témata kurzu:

- Exponenciální a logaritmické funkce
- Goniometrické funkce a jejich inverze
- Derivace
- Limita posloupnosti
- Řady
- Kombinatorika

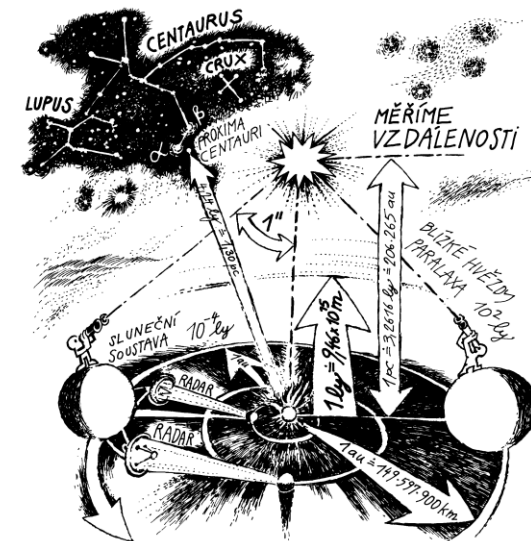
Interpretace exponenciálních a logaritmických funkcí v kontextové situaci



Některé reálné situace, které zažíváme v každodenním životě nebo nějaké pseudorealistické situace.

Důležitost funkcí exponentu a logaritmu:

- ❖ Exponenciální a logaritmické funkce jsou základními tématy středoškolských a vysokoškolských studijních programů.
- ❖ Jsou předpokladem pro osvojení dalších pokročilých matematických pojmů.
- ❖ Logaritmické škály se používají k měření mnoha jevů v reálném světě. Například měření intenzity zemětřesení, intenzity zvuku a jasu hvězdy se provádí pomocí logaritmických stupnic.



❖ Pokud $x > 0$,
logaritmus x o základu a ($a > 0, a \neq 1$),
je reálné číslo y
takové, že $\mathbf{a^y = x}$
a je symbolizováno $\mathbf{y = \log_a(x)}$. (Euler, 1770/1984)

Inverzní

$$f = a^x; a \in R^+ \setminus \{1\} \iff f^{-1} = \log_a x; a \in R^+ \setminus \{1\}$$

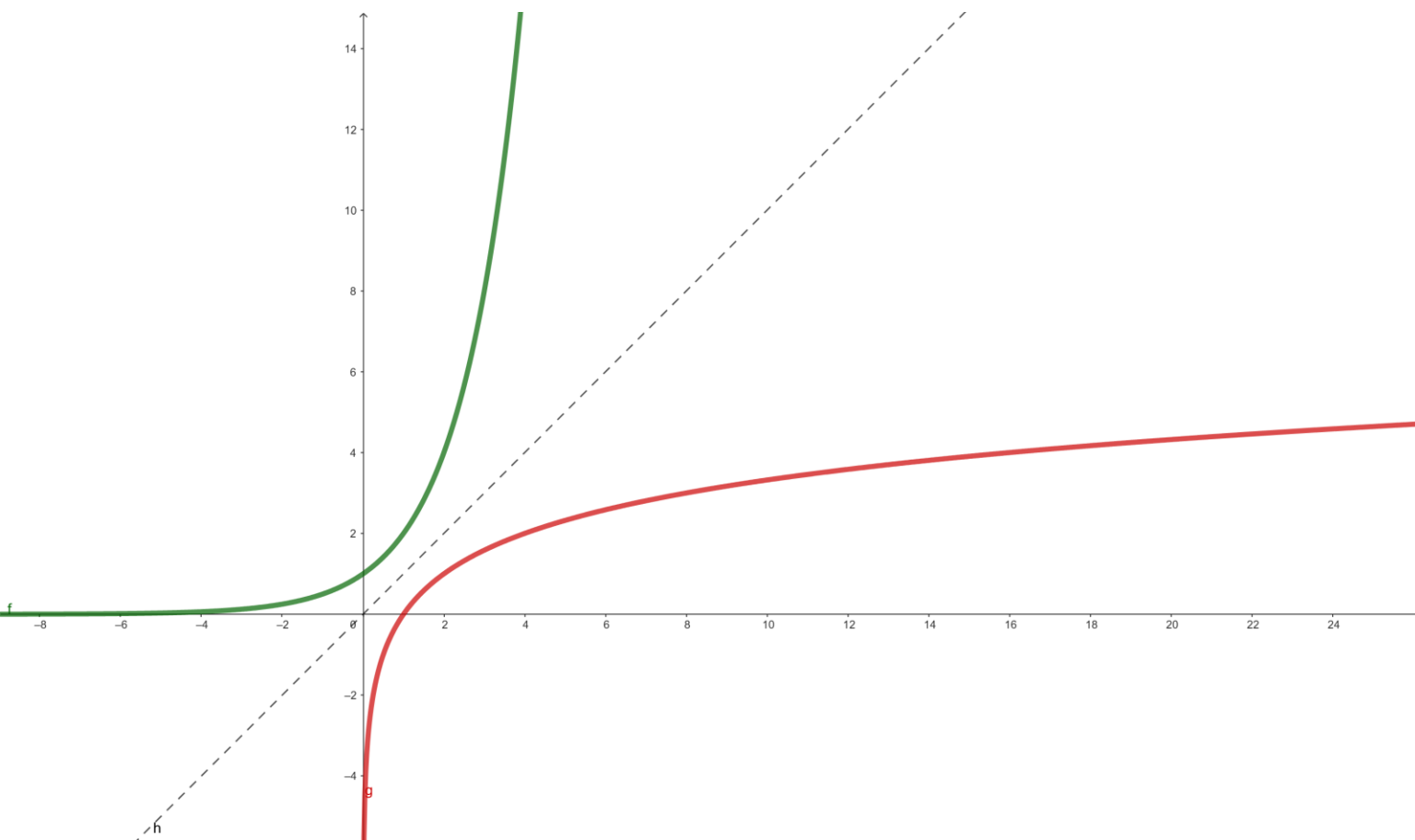
$$\log_3 9 = x \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow x = 2$$

$$\log_5 5^5 + \log_5 \frac{1}{5} = ?$$

Načrtněte graf: $y = \log_2 x$

Inverzní

$$f = 2^x \iff f^{-1} = \log_2 x$$



Logaritmické a exponenciální rovnice

$$2^x + 2^{x+1} = 24$$

$$\log_8(x-1)^2 = 0$$

$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 4 - \log_{10} 2$$

$$\log_{10} x + \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 4 - \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 3x = \log_{10} 16 - \log_{10} 2$$

$$\log_{10} 3x = \log_{10} 8$$

$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Co znamená každý krok? Co znamená ta odpověď?

Jaké problémy existují pro učitele a studenty ve výuce a učení exponenciálních a logaritmických funkcí?

- ❖ Někteří studenti učitelství nejsou schopni interpretovat pojmy exponent a logaritmus v reálných situacích a je to mezinárodní problém.
- ❖ Studenti vědí, že $\log_2 8$ je 3, ale většina z nich, dokonce ani učitelé, to nejsou schopni popsat v kontextuální situaci (reálných nebo pseudorealistických kontextech).

Studenti se svého učitele matematiky obvykle ptají na otázku:

Kdy/kde ve svém životě uvidím tyto matematické pojmy?

$$2^a \times 2^b = 2^{a+b}$$

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c a \cdot b$$

$$\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$



Žáci základní školy se učí navrhovat slovní úlohy (aplikační úlohy/příběhy/reálné úlohy) pro výroky jako $3 + 4 = 7$ nebo $2 \times 3 = 6$.

Včera jsem přečetl 3 stránky své knihy. Dnes jsem přečetl 4 stránky. Jaký je celkový počet stránek, které jsem přečetl?

$3 + 4 = 7$



$$3 \times 6 = 18$$



Jsou však studenti na střední nebo vysoké škole schopni interpretovat exponenciální a logaritmické funkce v kontextových situacích?

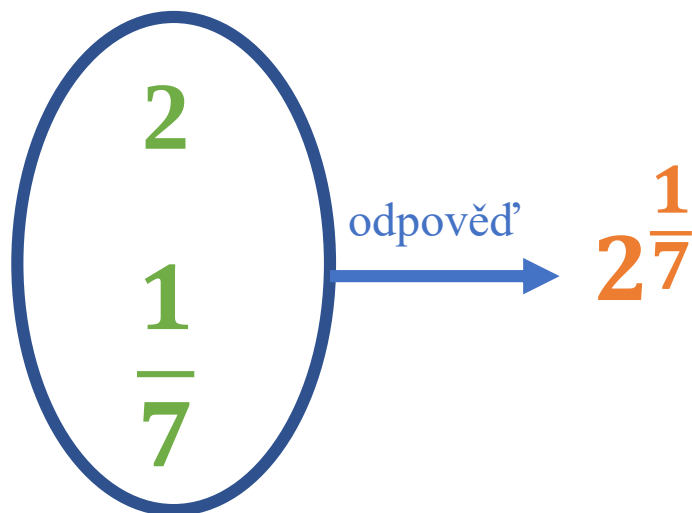
$$2^{\frac{1}{7}}$$

$$\log_2 3$$

$$\log_2 7 + \log_2 4 = \log_2 28$$

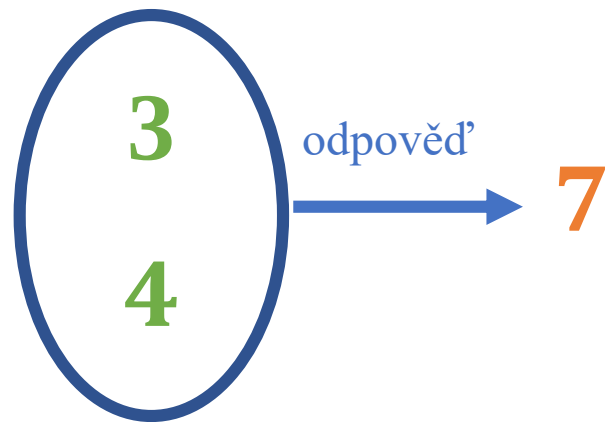


Navrhněte aplikační (slovní) úlohu s čísly 2 a $\frac{1}{7}$ tak, aby odpověď na problém v úloze byla $2\frac{1}{7}$.



Slovní úloha musí být pro studenty středních škol srozumitelná.

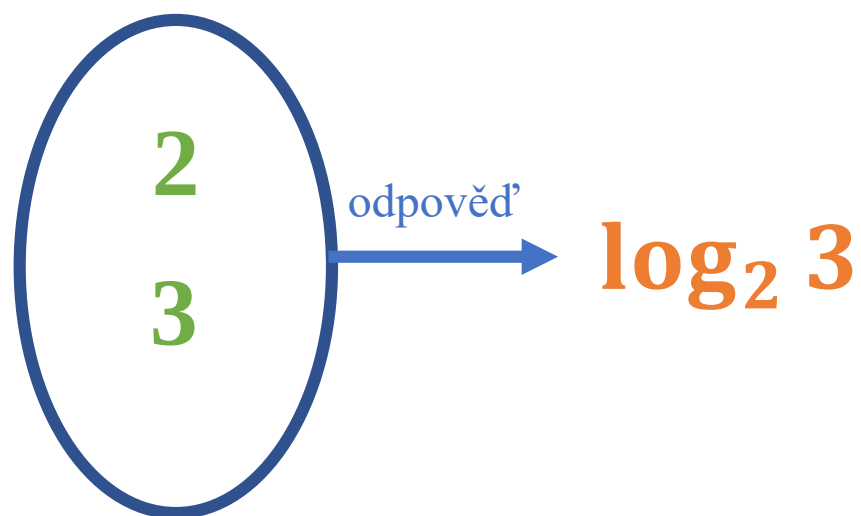
Navrhněte aplikační (slovní) úlohu s čísly **3** a **4** tak, aby odpověď na problém v úloze byla **7**.



Včera jsem přečetl **3** stránky své knihy. Dnes jsem přečetl **4** stránky. Jaký je celkový počet stránek, které jsem přečetl?

7

Navrhněte aplikační (slovní) úlohu s čísly **2** a **3** tak, aby odpověď na problém v úloze byla **$\log_2 3$** .



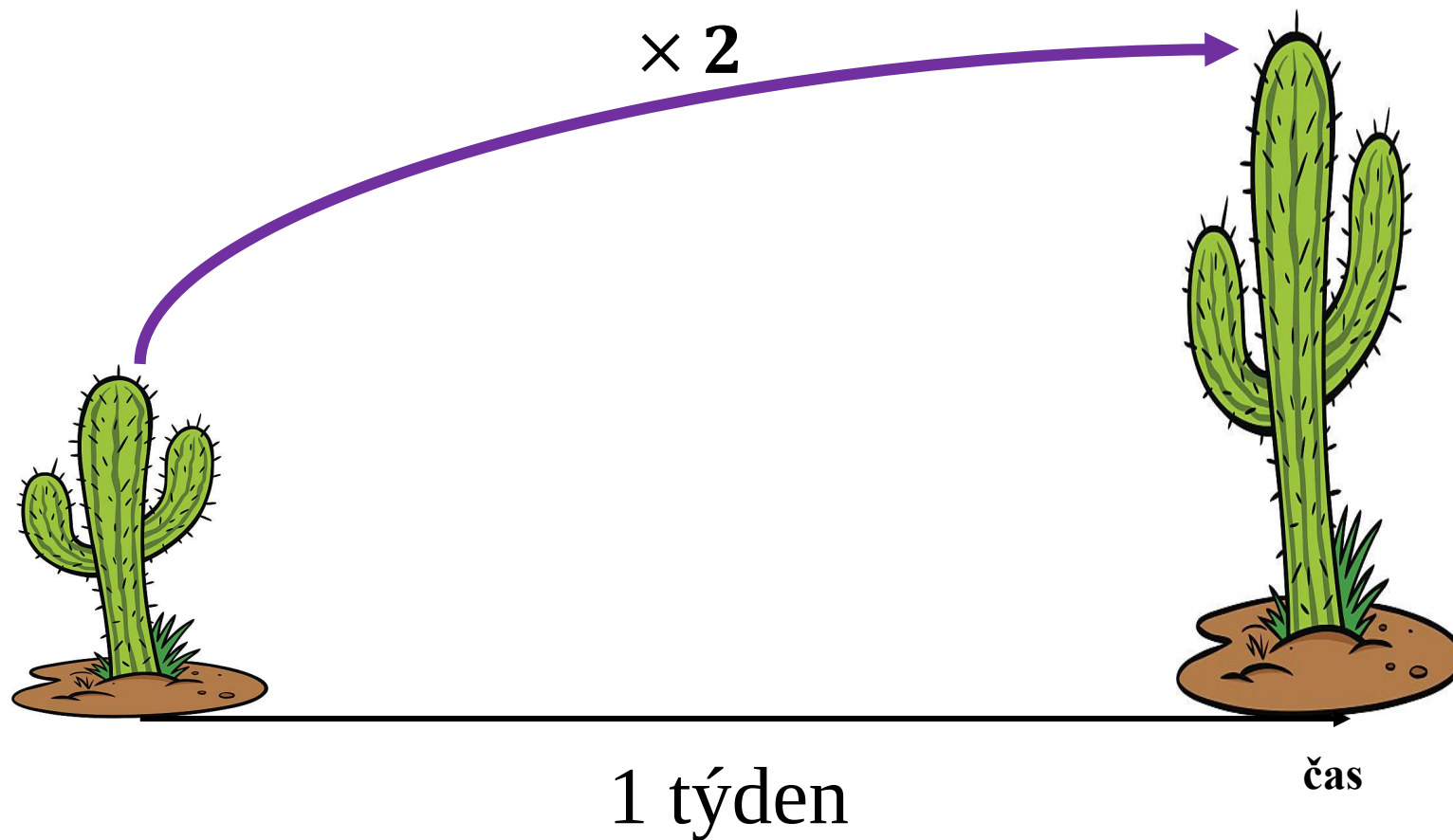
Slovní úloha musí být pro studenty středních škol srozumitelná.

Cíl: Jak můžeme studentům a učitelům pomoci porozumět konceptům exponentu a logaritmu a jejich větám v skutečné situaci?

$$2^{\frac{1}{7}} \quad \log_2 3$$

$$\log_2 7 + \log_2 4 = \log_2 28$$

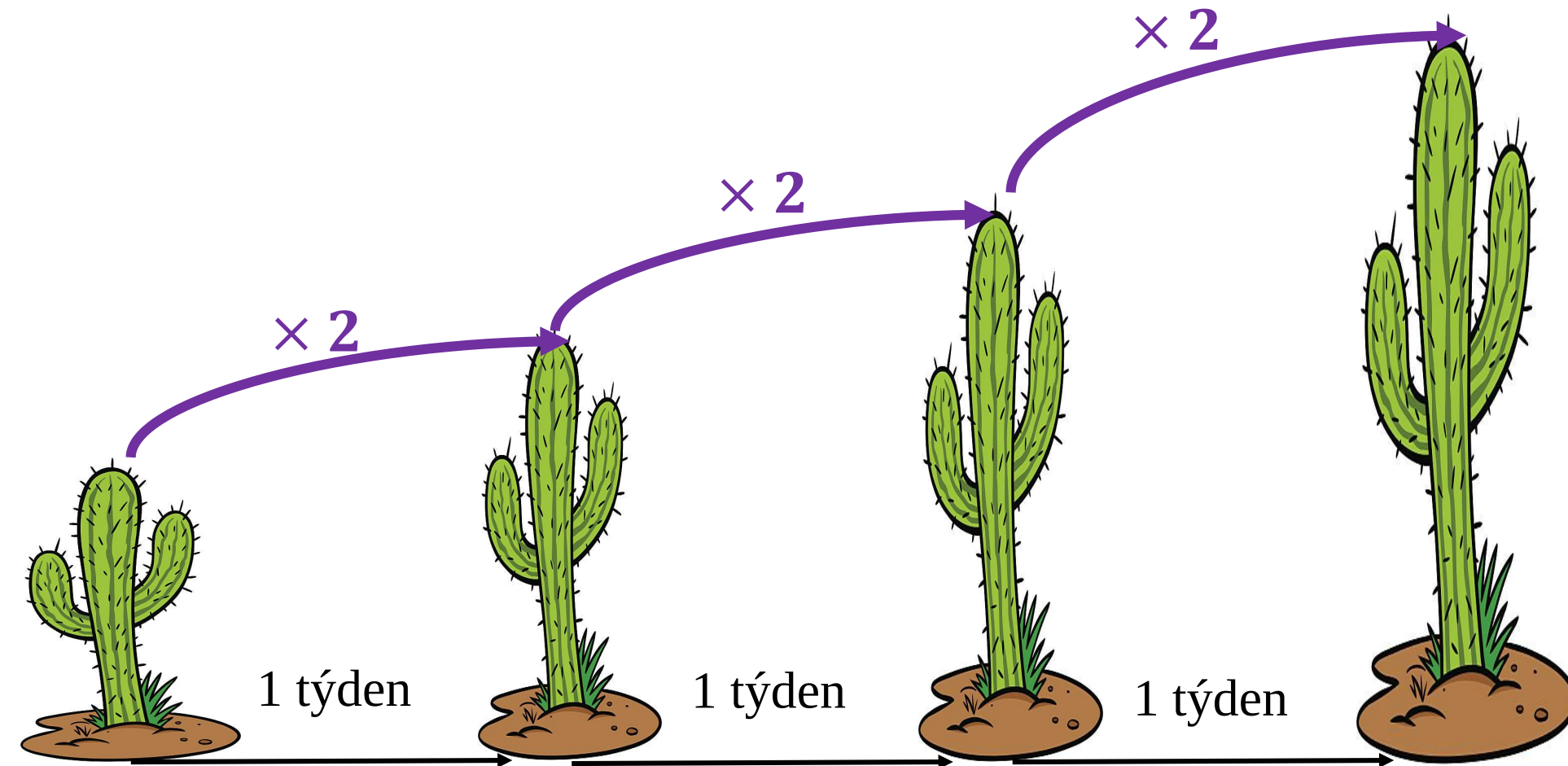
Uvažujme kontextovou situaci o kaktusu:



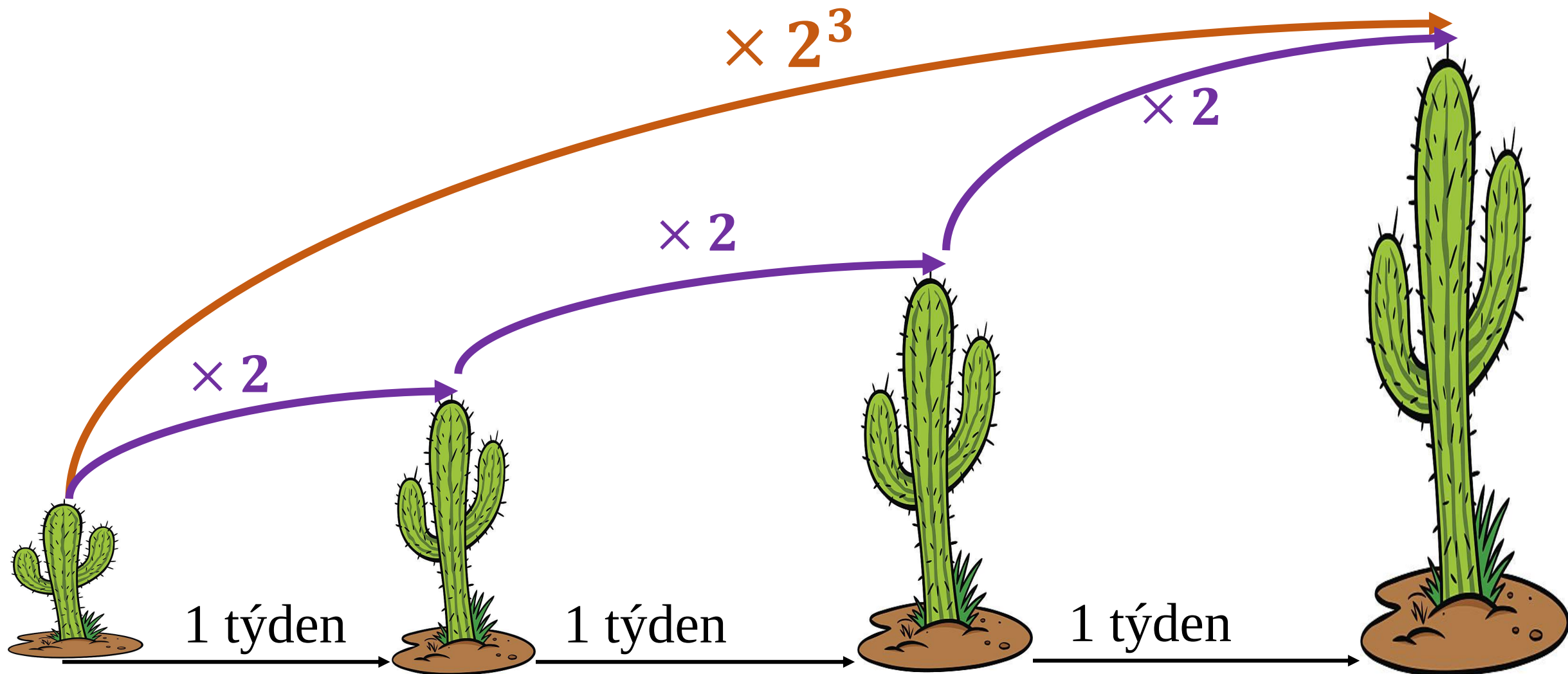
V tomto příběhu jsou dvě veličiny:

- 1) Výška kaktusu
- 2) Čas

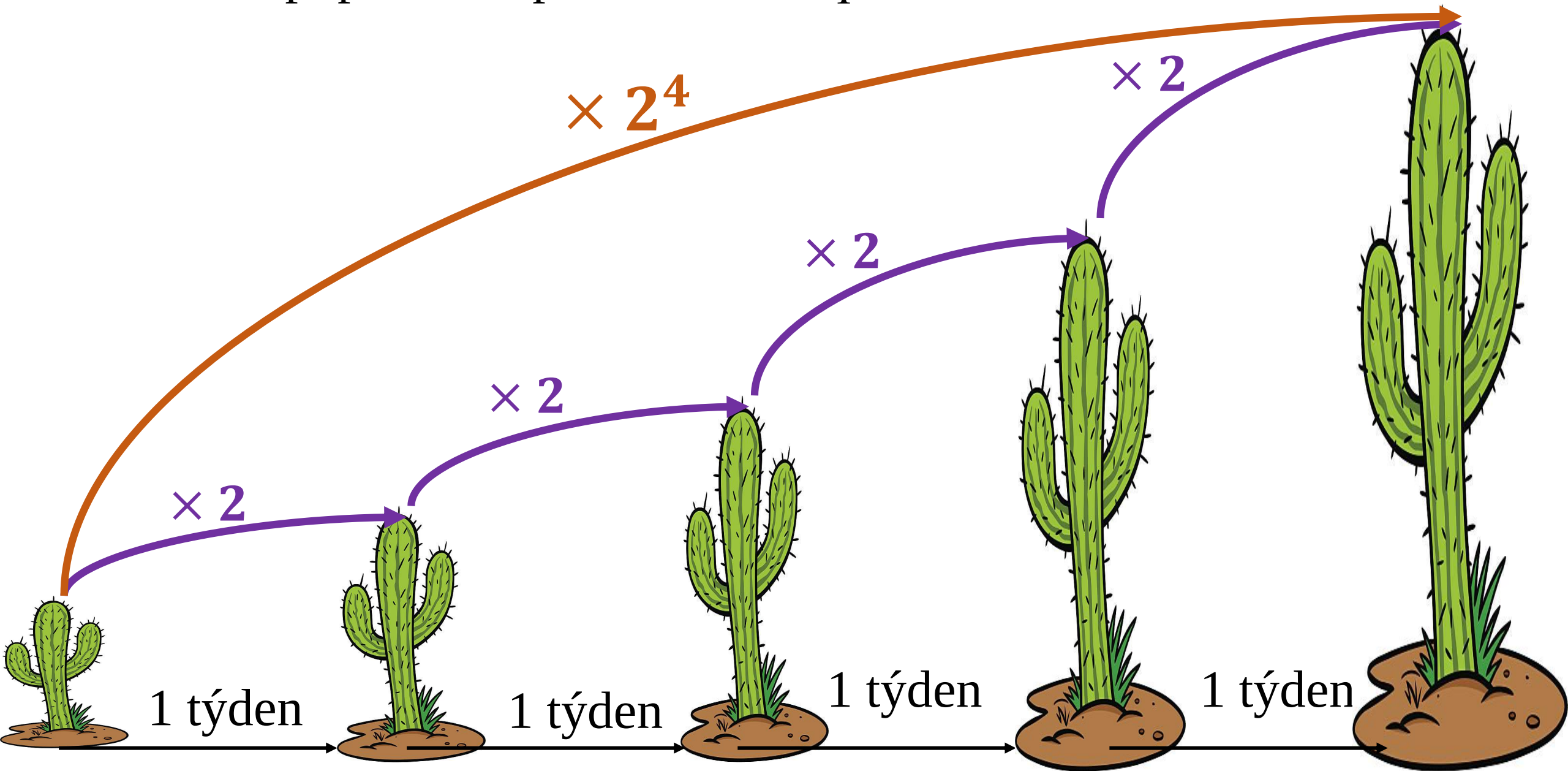
Mezi „výškou“ a „časem“ existuje exponenciální vztah



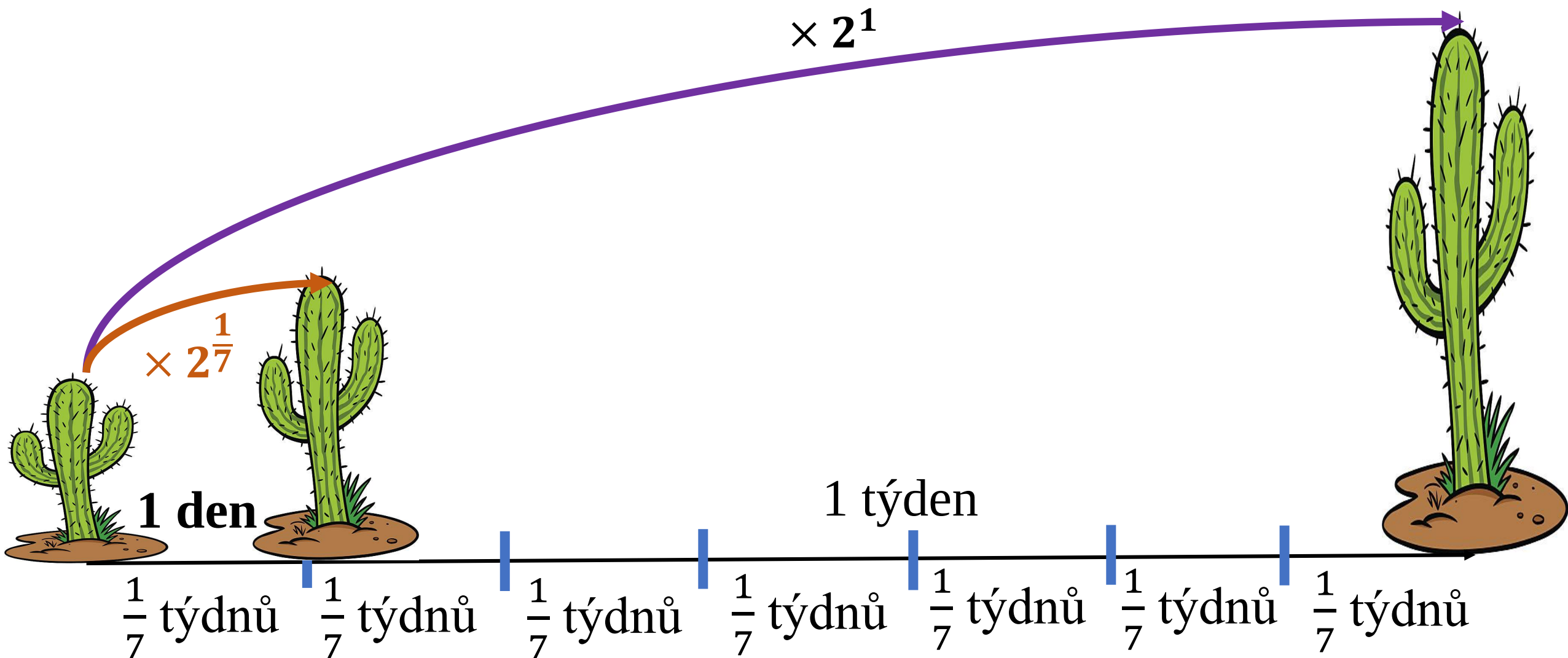
Jak můžeme popsat/interpretovat 2^3 v příběhu o kaktusu?



Jak můžeme popsat/interpretovat 2^4 v příběhu o kaktusu?

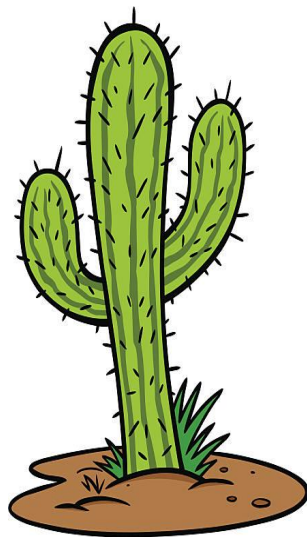


Jak můžeme popsat/interpretovat $2^{\frac{1}{7}}$ v příběhu o kaktusu?



Jak můžeme popsat/interpretovat 2^0 v příběhu o kaktusu?

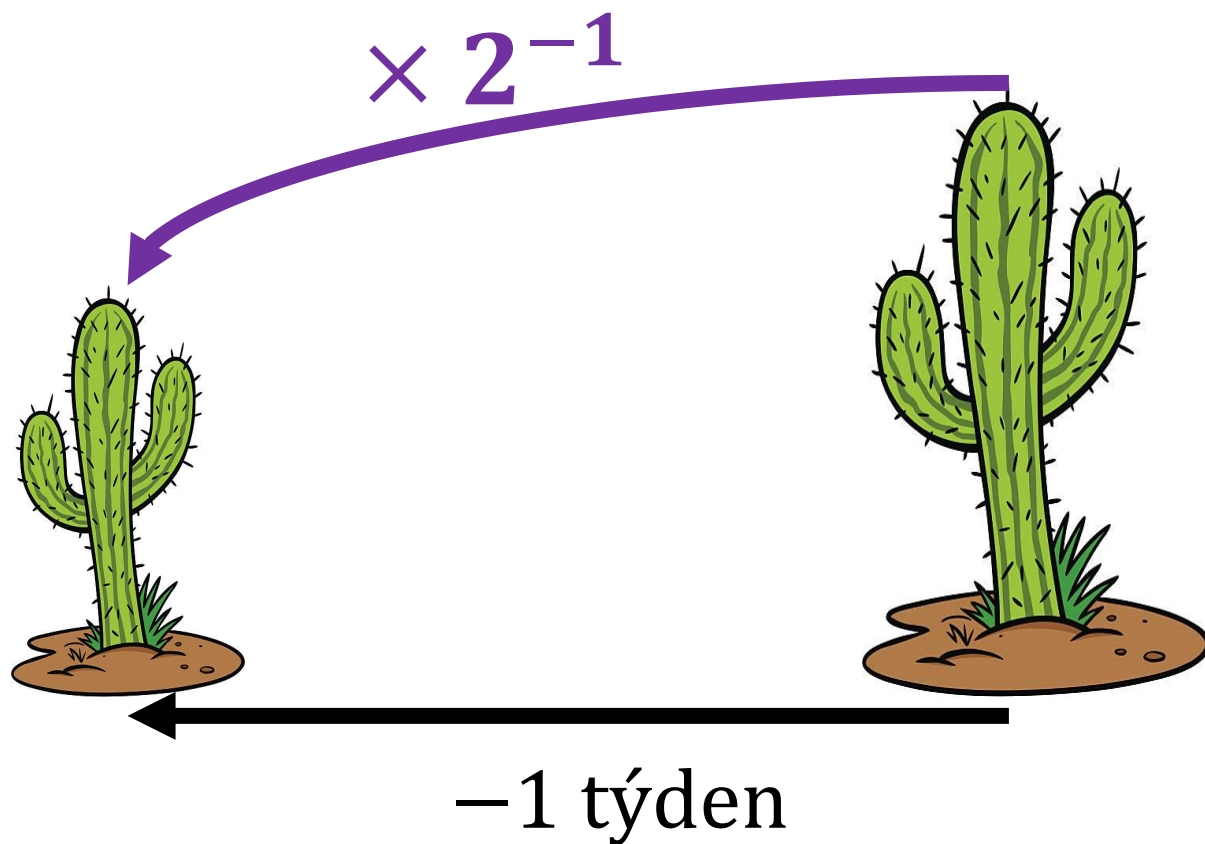
$$2^0 = 1$$



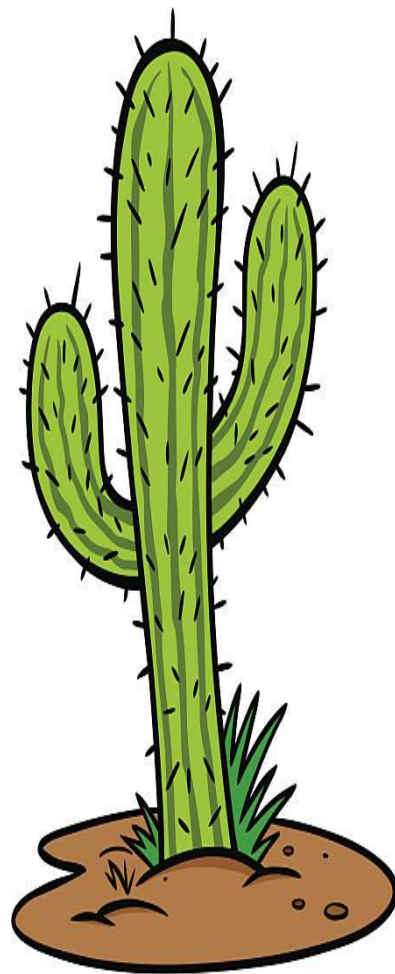
$$2^0 = 1$$

neuplynul žádný čas

Jak můžeme popsat/interpretovat 2^{-1} v příběhu o kaktusu?



log



$$\log_2 8$$

Kolik činitelů 2 máme v 8?


$$\log_2 8$$

Kolik činitelů

$\log_2$

Kolik činitelů čísla 2 má číslo 16?

4

$\log_2 16$

$\log_2$

Kolik činitelů čísla 2 má číslo 32?

5

$\log_2 32$

$\log_2$

Kolik činitelů čísla 2 má číslo 25?

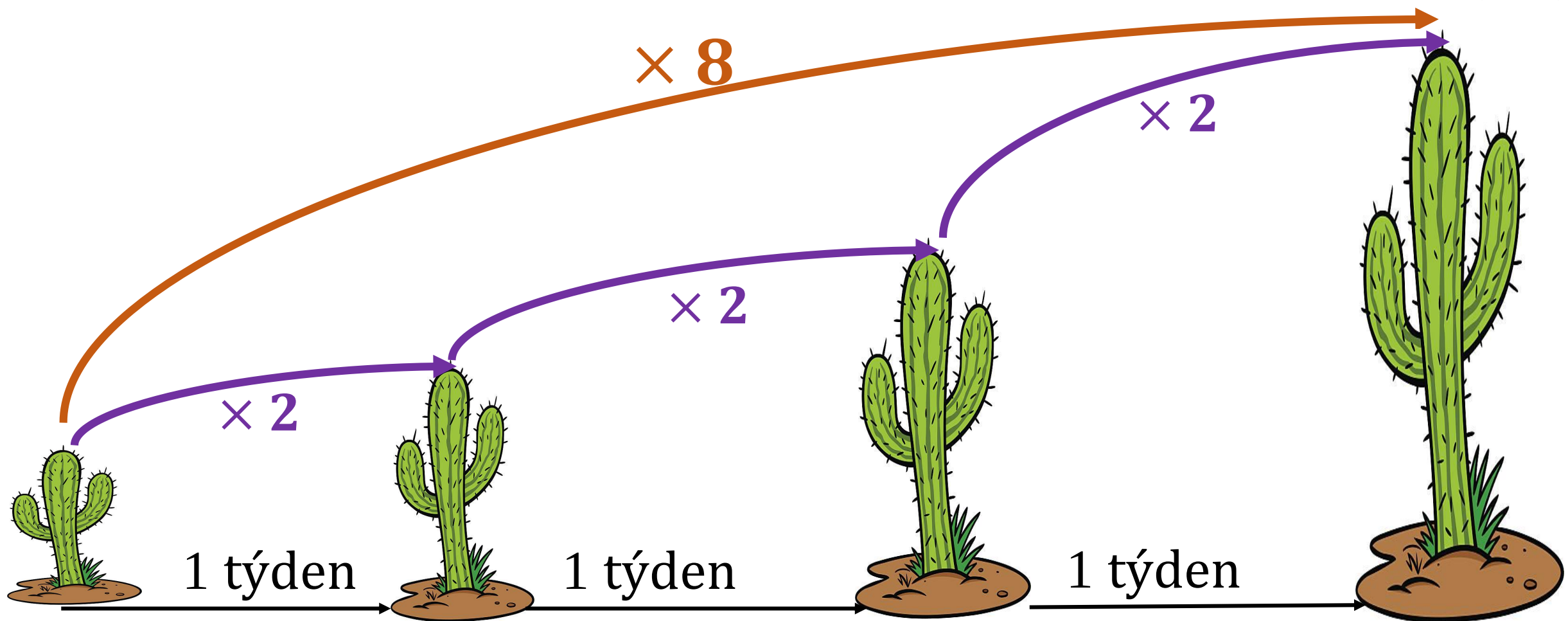
?

$\log_2 25$

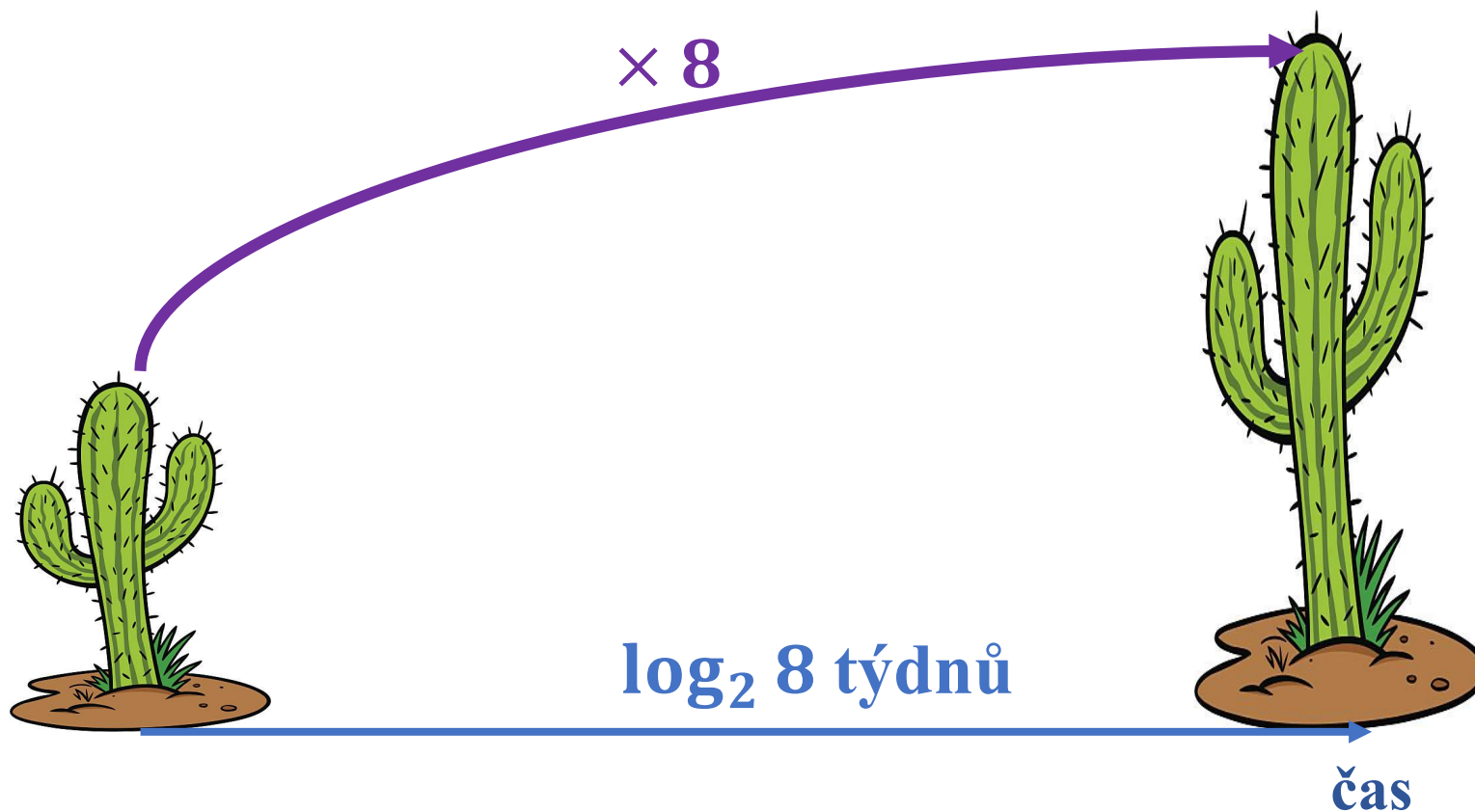
Jak můžeme popsat například $\log_2 8$ v příběhu o kaktusu?

$\log_2 8$ je počet činitelů 2, které máme v čísle 8.

$\log_2 8$ je počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 8násobku své výšky.

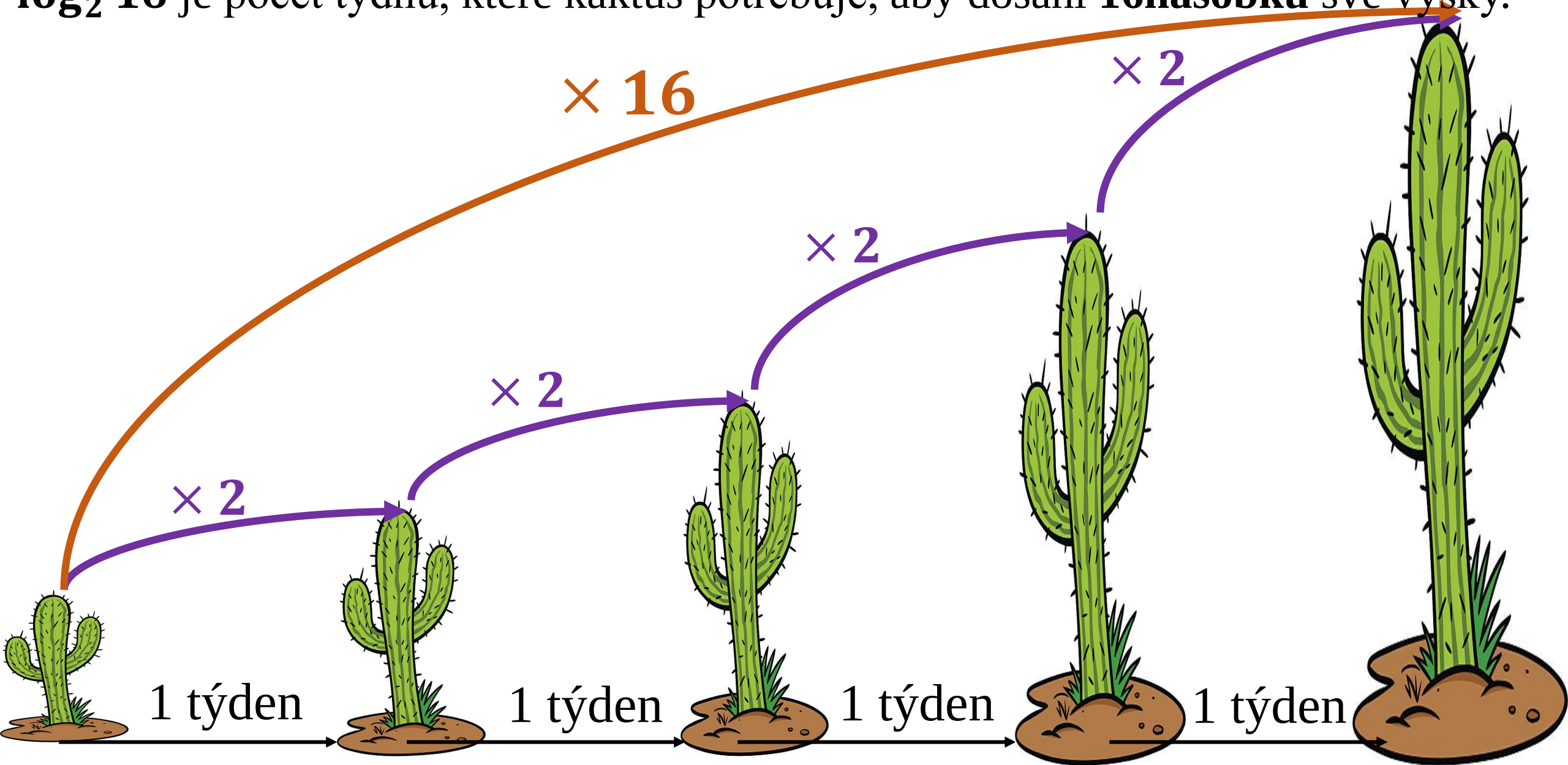


$\log_2 8$ je počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 8násobku své výšky.

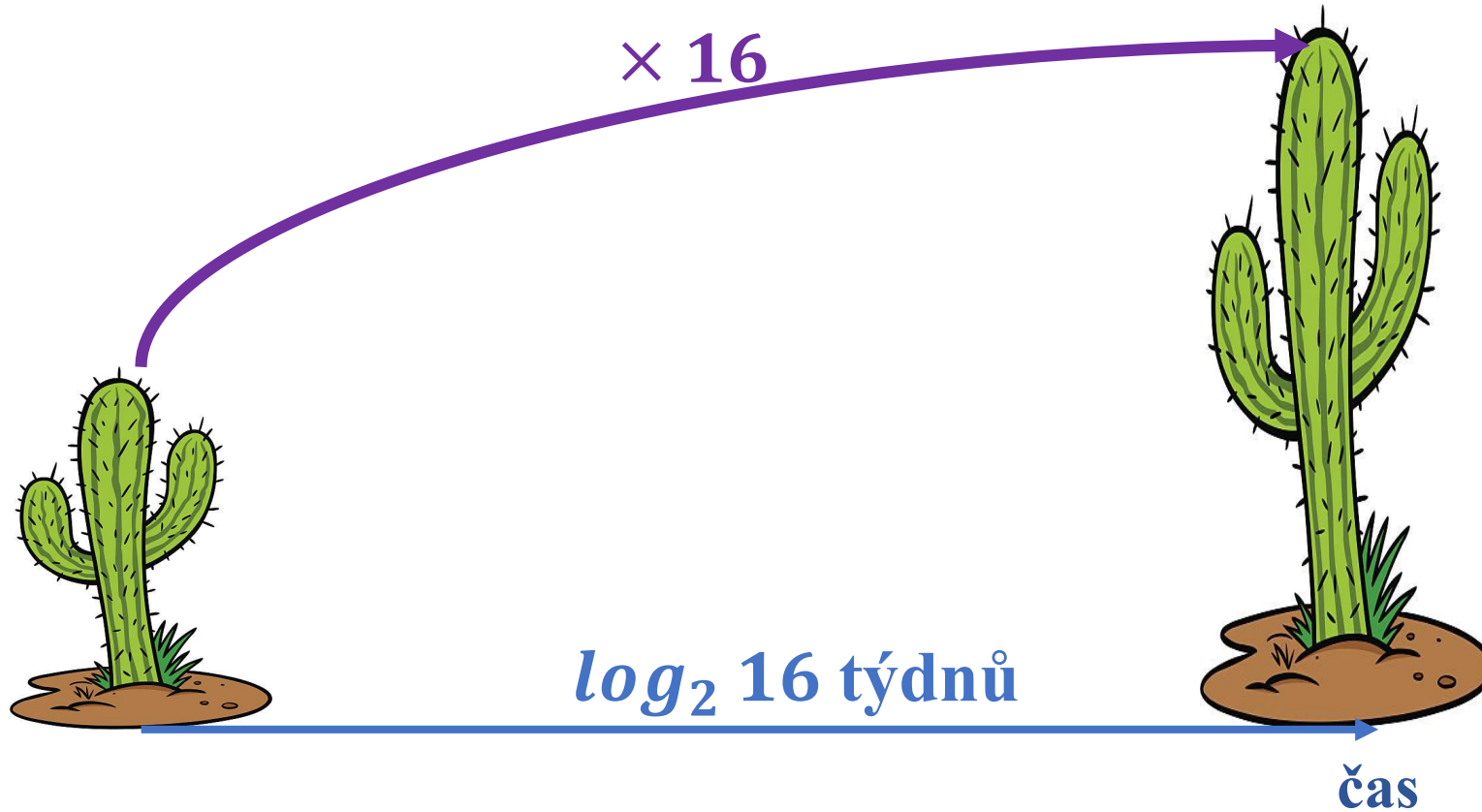


Jak můžeme popsat například $\log_2 16$ v příběhu o kaktusu?

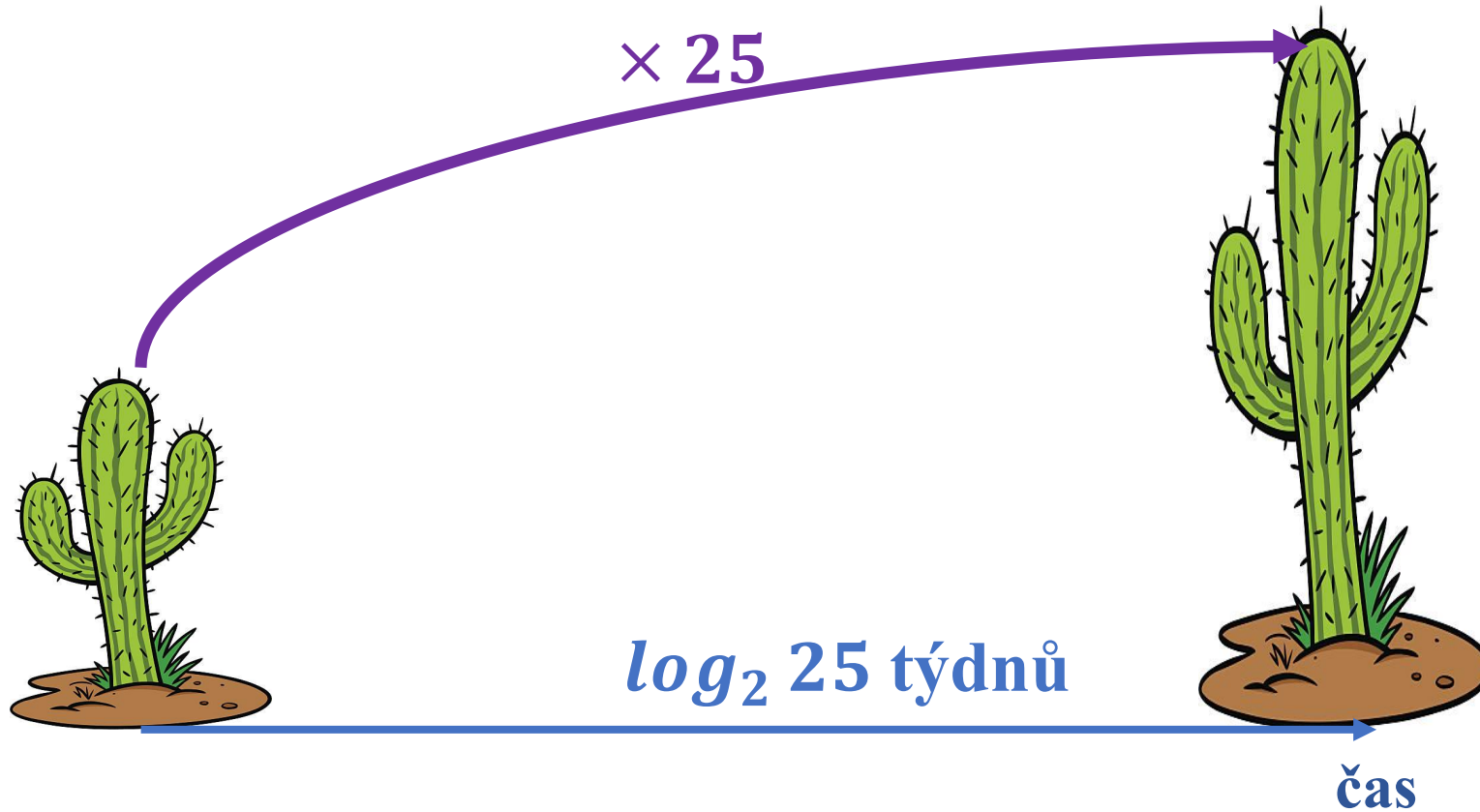
$\log_2 16$ je počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl **16násobku** své výšky.



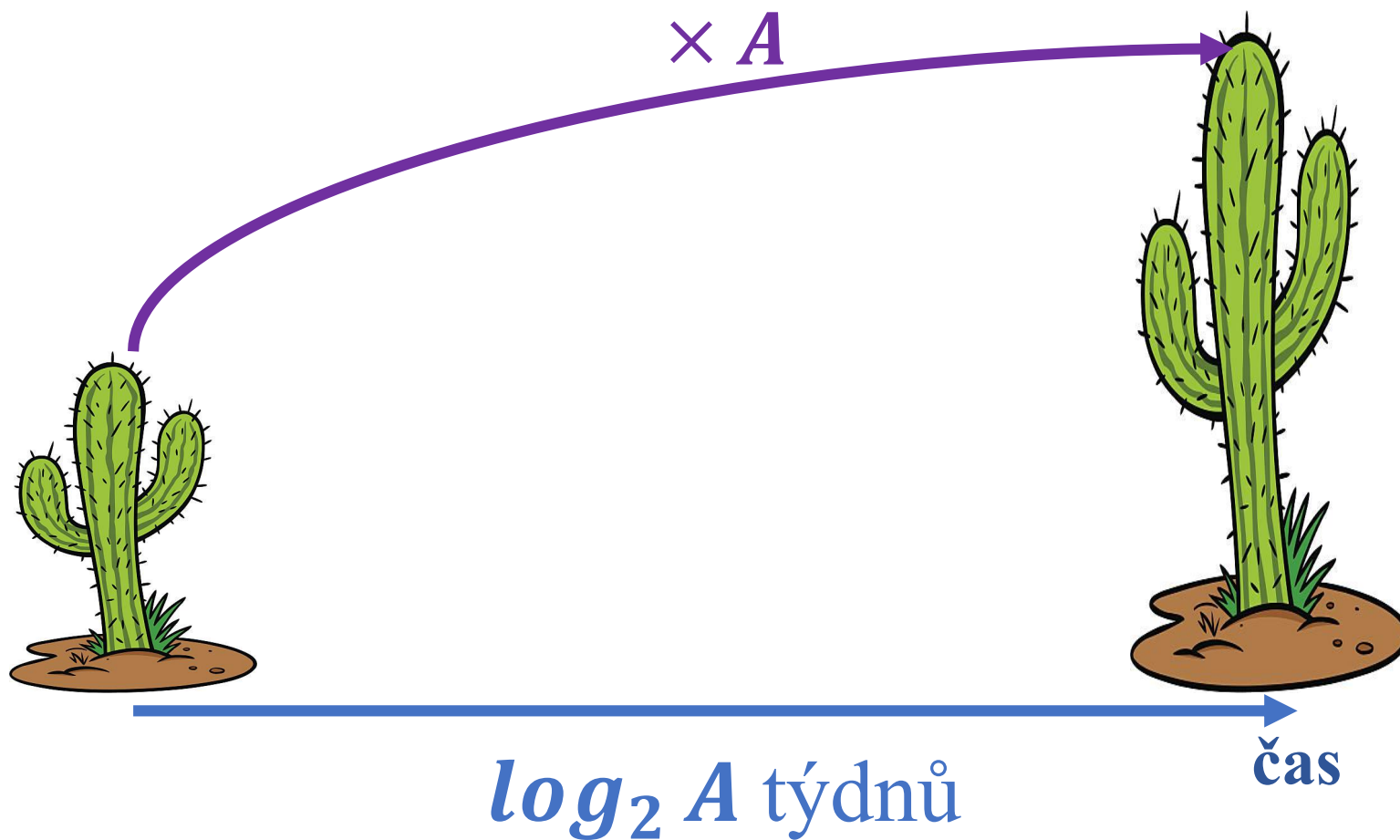
$\log_2 16$ je počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl **16násobku** své výšky.



$\log_2 25$ je počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 25násobku své výšky.

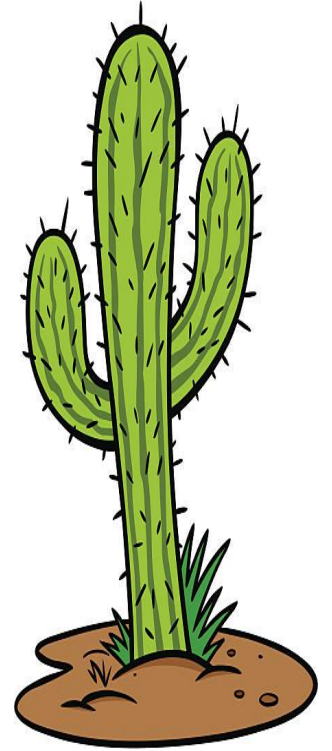


$\log_2 A$ vyjadřuje počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení A -násobku své výšky.

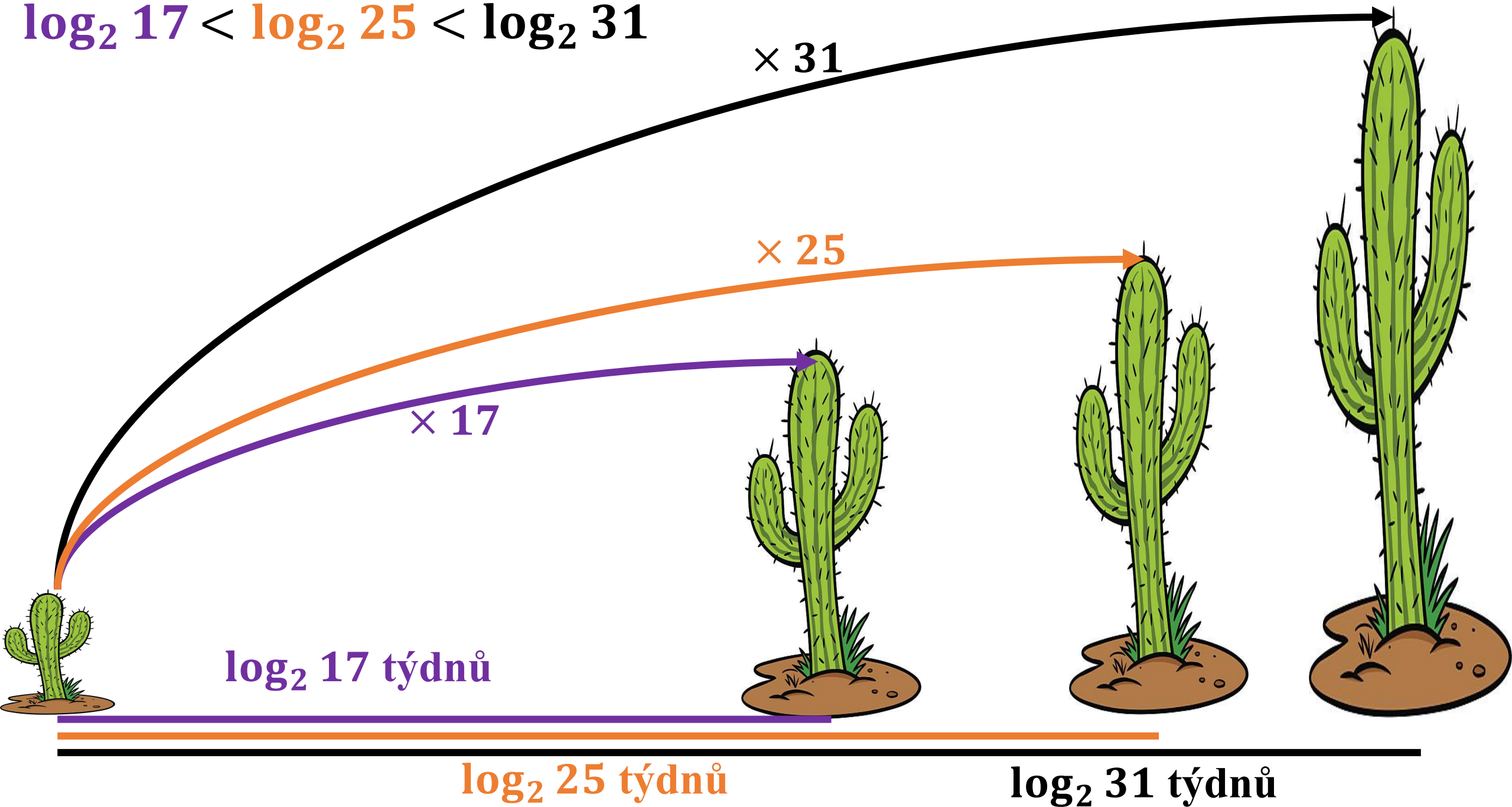


$$\log_2 17 < \log_2 25 < \log_2 31$$

$$4,0875 < 4,644 < 4,954$$

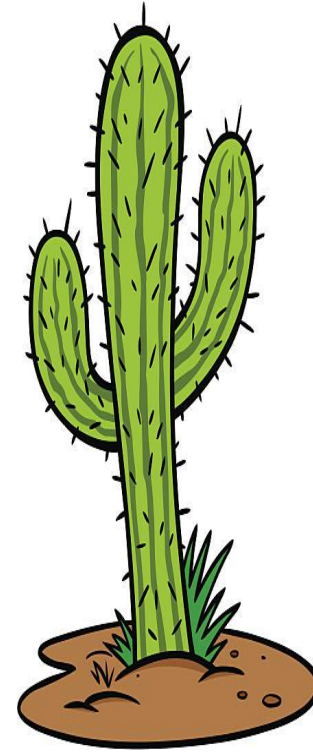


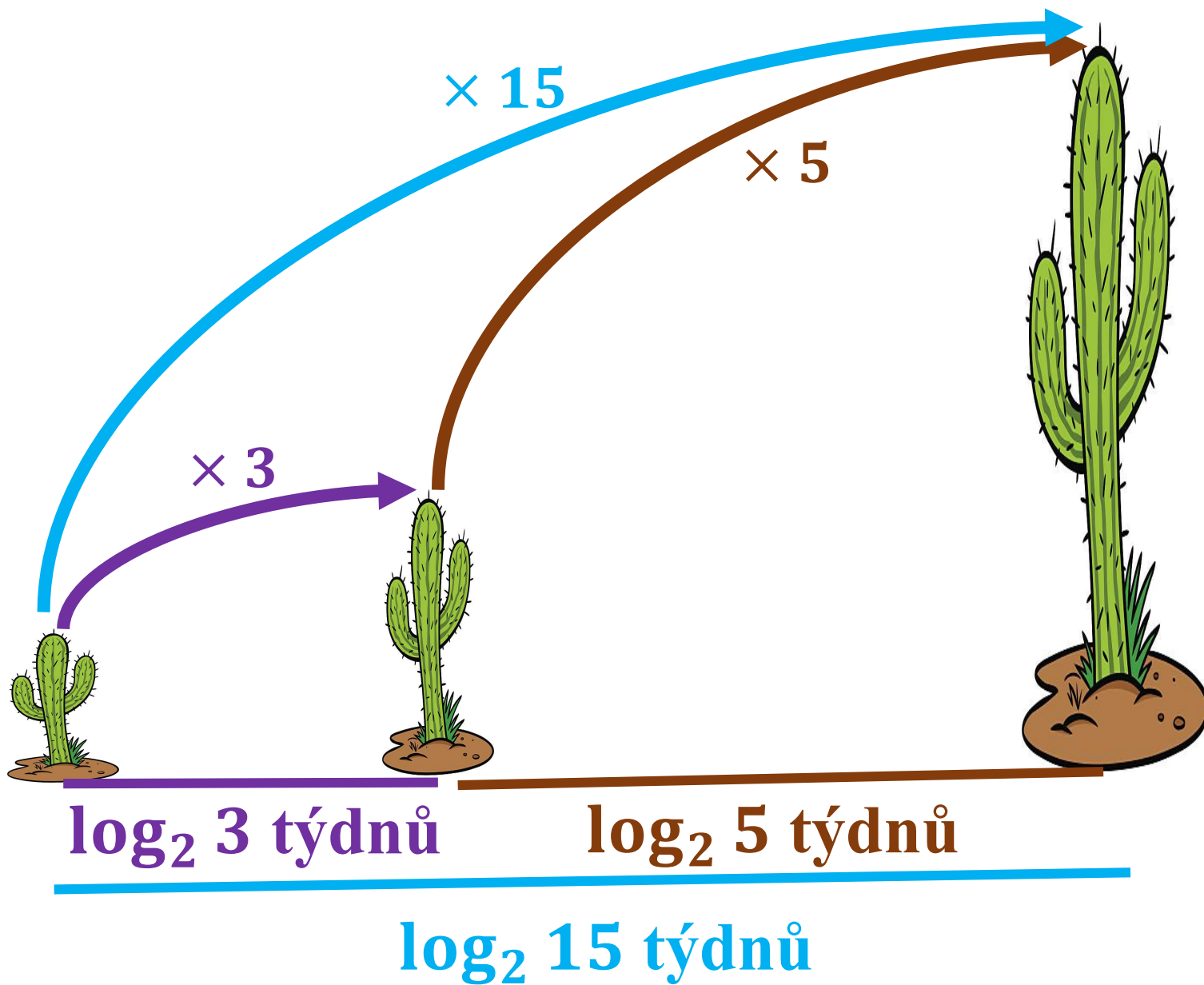
$$\log_2 17 < \log_2 25 < \log_2 31$$



$$\log_b X + \log_b Y = \log_b XY$$

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

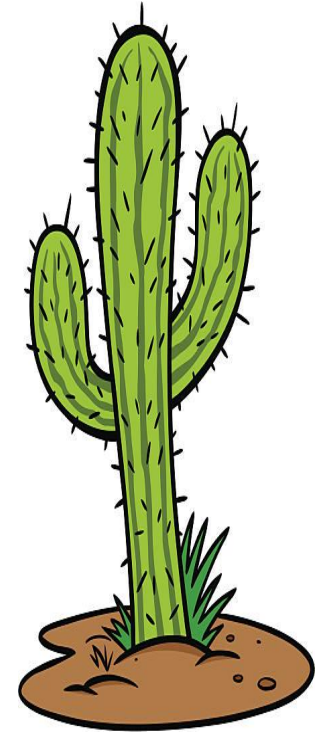




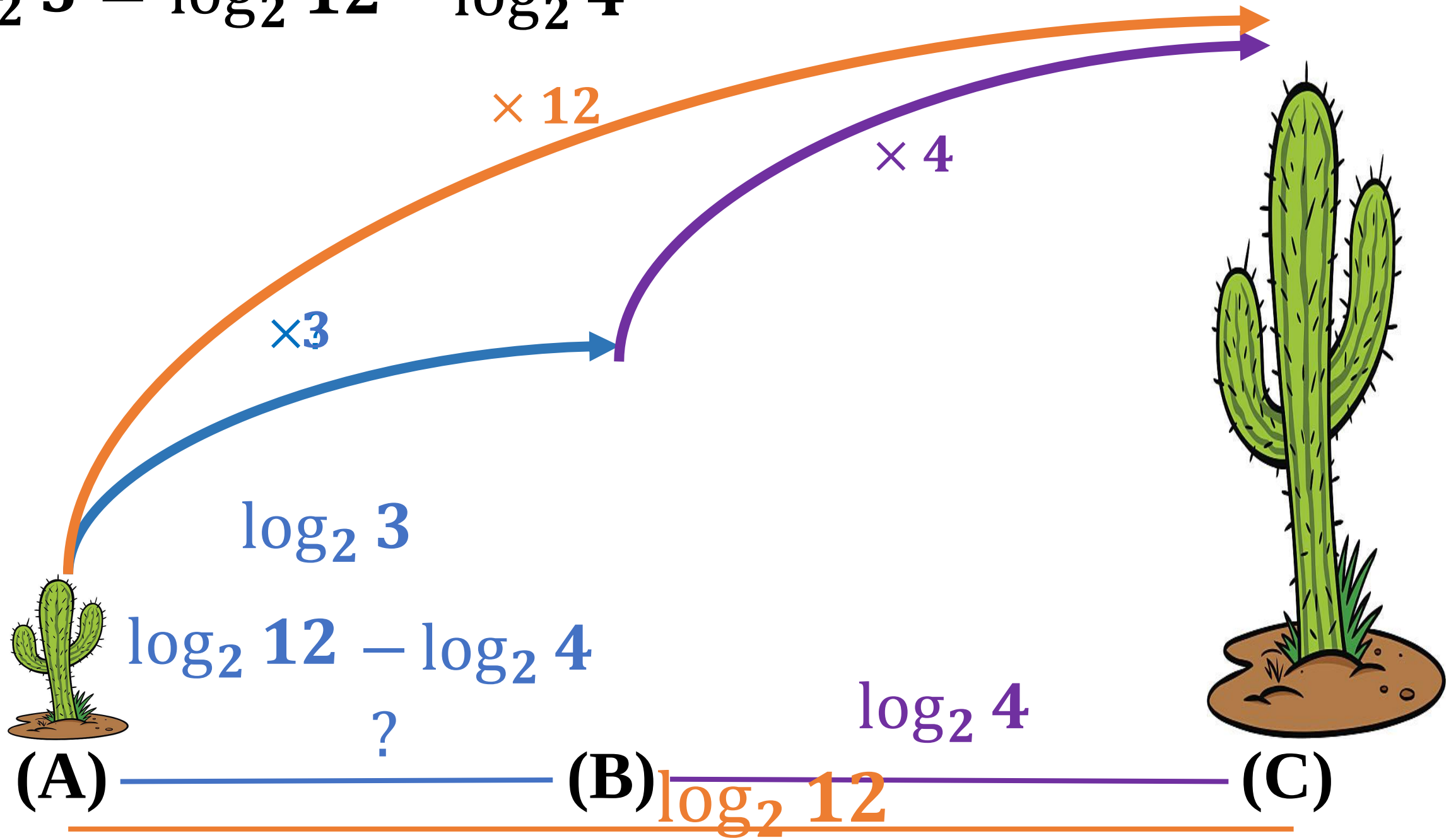
$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

$$\log_b X - \log_b Y = \log_b \frac{X}{Y}$$

$$\log_2 12 - \log_2 4 = \log_2 3$$

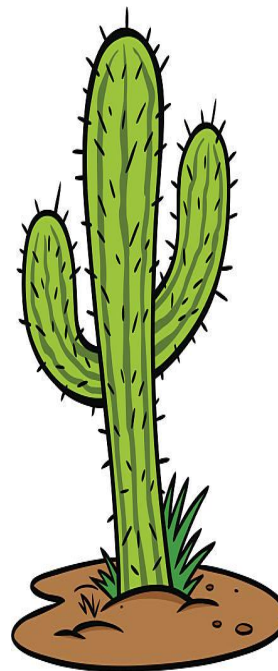


$$\log_2 3 = \log_2 12 - \log_2 4$$

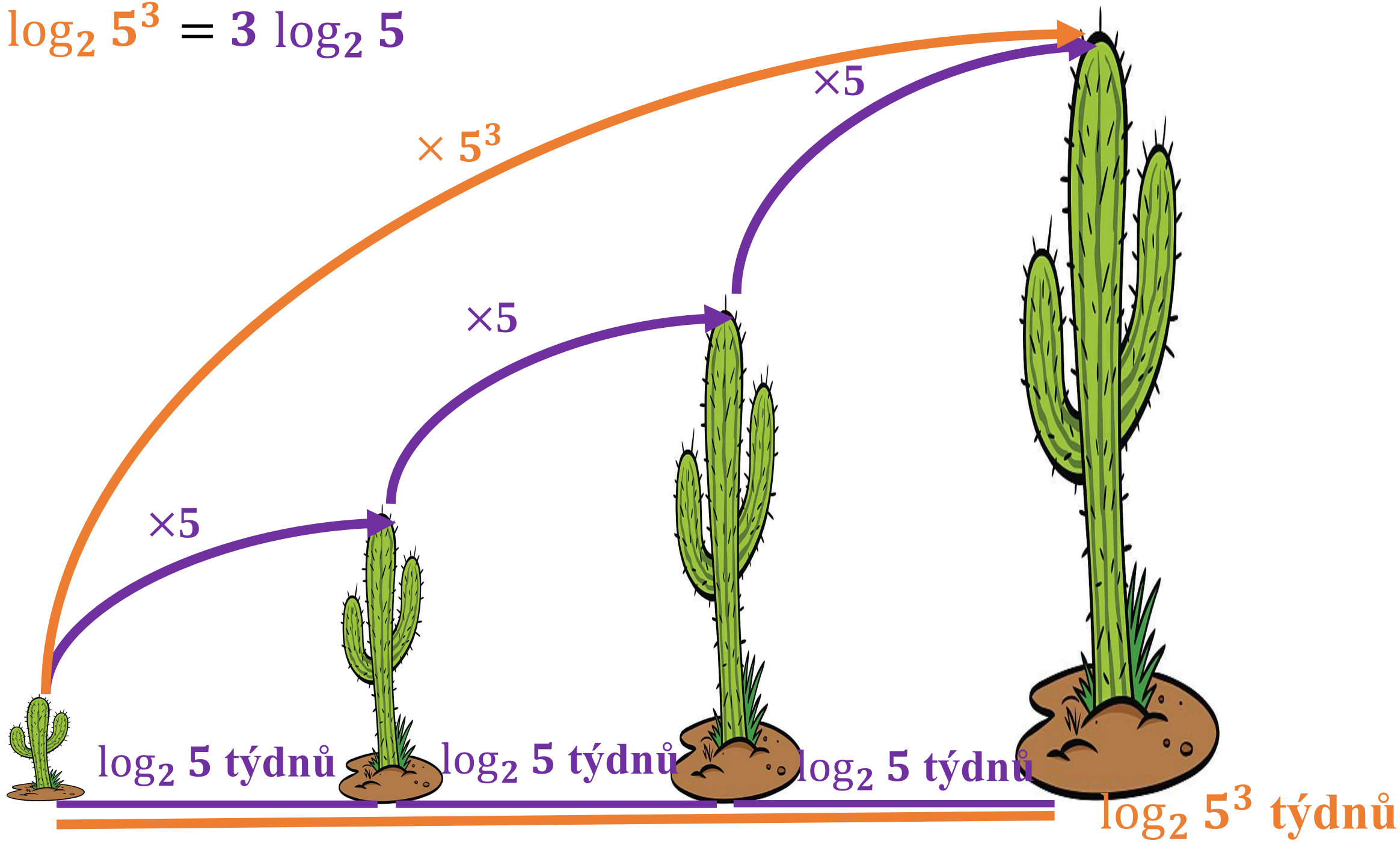


$$\log_b X^y = y \times \log_b X$$

$$\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$$



$$\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$$

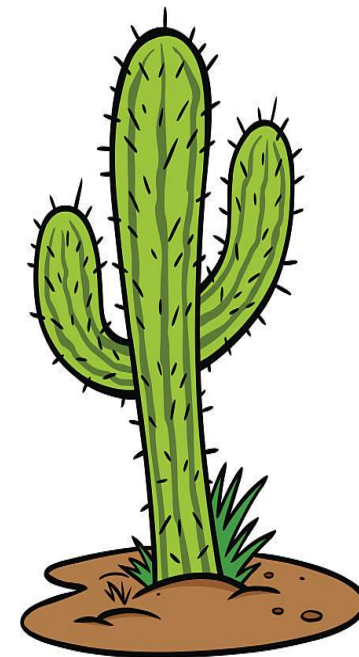


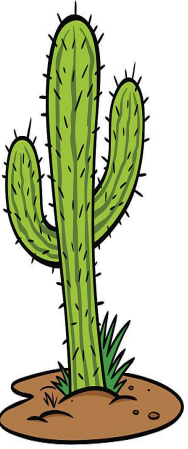
Další logaritmické věty můžeme interpretovat v příběhu o kaktusu.

$$\log_2 2^A = A$$

$$2^{\log_2 A} = A$$

$$\frac{\log_2 A}{\log_2 B} = \log_B A$$





Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte prázdná místa.

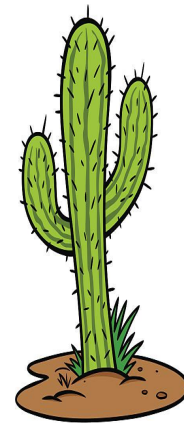
- a) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^3 -násobku své výšky je **.3..**
- b) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^4 -násobku své výšky je **...4.**
- c) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^{100} -násobku své výšky je **...100**
- d) Počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení 2^A -násobku své výšky je **...A.**
- e) Napište větu z části (d) jako logaritmickou rovnost.

$$\log_2 2^A = A$$

Máme kaktus, jehož výška se každý týden zdvojnásobí. Doplňte prázdná místa.

- a) $2^{\text{počet týdnů}}$, které kaktus potřebuje k dosažení 8 –*násobku* své výšky je ... **8**
- b) $2^{\text{počet týdnů}}$, které kaktus potřebuje k dosažení 9 –*násobku* své výšky je ... **9**
- c) $2^{\text{počet týdnů}}$, které kaktus potřebuje k dosažení 10 –*násobku* své výšky je ... **10**
- d) $2^{\text{počet týdnů}}$, které kaktus potřebuje k dosažení 100 –*násobku* své výšky je ... **100**
- e) $2^{\text{počet týdnů}}$, které kaktus potřebuje k dosažení A –*násobku* své výšky je ... **A**
- f) Napište větu z části (e) jako logaritmickou rovnost.

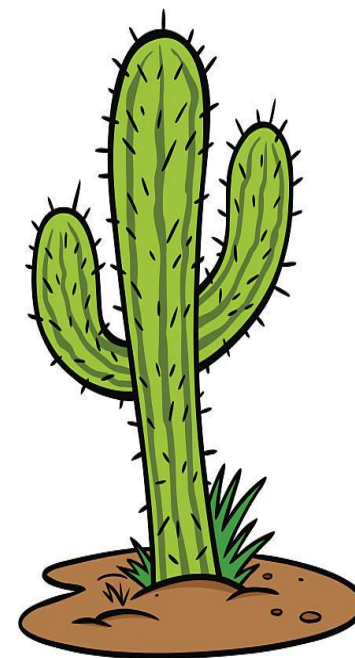
$$2^{\log_2 A} = A$$



Použijte příběh s kaktusem a vysvětlete, proč tato logaritmická věta platí.

$$\frac{\log_2 A}{\log_2 B} = \log_B A$$

$$\frac{\log_2 15}{\log_2 5} = \frac{\log_4 15}{\log_4 5} = \log_5 15$$



References

Borji, V., Surynková, P., Kuper, E., & Robová, J. (2024). Using contextual problems to develop preservice mathematics teachers' understanding of exponential and logarithmic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2309284>

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 211–230. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1>

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3), 135–164. <https://doi.org/10.1007/BF01273661>

Díaz-Berrios, T., & Martínez-Planell, R. (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, Article 100953. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953>

Euler, L. (1984). *Elements of algebra*. (J. Hewlet, Trans.). Springer. (Original work published 1770).

Kuper, E., & Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 57, Article 100740. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740>

Webb, D. C., van der Kooij, H., & Geist, M. R. (2011). Design research in the Netherlands: Introducing logarithms using realistic mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 2(1), 47–52. <https://doi.org/10.7916/jmetc.v2i1.708>

Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz