

Aktivita 1: Od předpokládaných vlastností k používání odmocnin při řešení kvadratických rovnic

1) V každém z následujících případů ověřte, že vzdálenost mezi danými čísly x a y je $|x - y|$.

- a)  A horizontal number line with tick marks at 3 and 8.
- b)  A horizontal number line with tick marks at -3 and 7.
- c)  A horizontal number line with tick marks at -12 and -8.

2) V tomto úkolu najdete všechny kořeny rovnice $|x - 3| = 1$ čtyřmi různými způsoby:

- Řešte numericky metoda odhadování.
- Řešte graficky pomocí číselné osy a interpretace $|x - 3|$ jako vzdálenosti mezi dvěma čísly.
- Řešte graficky pomocí grafu $y = |x - 3|$.
- Řešte symbolicky pomocí formální definice absolutní hodnoty.

3) V tomto úkolu vysvětlíte dvěma různými způsoby, proč pokud $b \geq 0$ a $|x| = b$, pak $x = b$ nebo $x = -b$.

- Vysvětlíte graficky pomocí číselné osy a interpretace $|x|$ jako vzdálenosti mezi dvěma čísly.
- Vysvětlíte pomocí grafu $y = |x|$.

4) a) Najděte několik různých hodnot x , které splňují rovnici $\sqrt{x^2} = x$.

b) Vysvětlíte, proč $x = -3$ není kořenem rovnice (nezapomeňte na definici $\sqrt{a}$).

c) Vysvětlíte, proč $\sqrt{x^2} = x$ obecně neplatí a proč $\sqrt{x^2} = |x|$ obecně platí.

d) Pomocí grafické technologie ukažte, že $\sqrt{x^2} = x$ obecně neplatí a $\sqrt{x^2} = |x|$ obecně platí.

5) Najděte všechny kořeny následujících rovnic.

a) $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$

b) $\sqrt{(2x+7)^2} = |2x+7|$

c) $\sqrt{(\log x)^2} = \log x$

d) $\sqrt{(\cos x)^2} = \cos x$

6) V předchozích cvičeních jsme si připomněli dvě základní věty:

A) pokud $b \geq 0$ a $|x| = b$, pak $x = b$ nebo $x = -b$

B) Pro každé reálné číslo x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

Řešte každou z následujících rovnic odmocněním obou stran, přičemž VÝSLOVNĚ používejte výše uvedené dvě věty.

a) $x^2 = 4$ Ověřte své řešení pomocí grafu $y = x^2$.

b) $(x - 1)^2 = 4$ Ověřte své řešení pomocí grafu $y = (x - 1)^2$.

c) $(2x + 7)^2 = 4$ Ověřte své řešení pomocí grafu $y = (2x + 4)^2$.

7) Všimněte si, že v $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ je koeficient u x roven $2a$ a absolutní člen je a^2 . Takže absolutní člen získáte tak, že vezmete polovinu koeficientu u x a umocníte ji. V každém z následujících výrazů přidejte konstantu a doplňte na čtverec. Ověřte rozkladem.

a) $x^2 + 6x$

b) $x^2 - 12x$

8) Řešte doplněním na čtverec a pomocí odmocnin $\sqrt{\quad}$. VÝSLOVNĚ používejte dvě věty uvedené v cvičení 6.

a) $x^2 + 6x = -1$

b) $x^2 - 12x = -20$

9) Všimněte si, že pokud polynom není normovaný („normovaný“ znamená, že koeficient u x^2 je 1), můžete stejně použít metodu doplnění na čtverec. Například pro řešení $ax^2 + bx = c$ můžete řešit ekvivalentní rovnici $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$, která je normovaná. Řešte následující dvě rovnice metodou doplnění na čtverec a pomocí odmocnin $\sqrt{\quad}$. VÝSLOVNĚ používejte dvě věty uvedené v cvičení 6.

a) $2x^2 + 12x = 8$

b) $3x^2 + 5x = 7$

c) $3x^2 - 12x + 3 = 0$

d) $9x^2 - 12x - 14 = 0$

Aktivita 2: Od odmocnin a doplnění na čtverec k metodě diskriminantu.

Připomeňme, že v předchozí aktivitě jsme si připomněli dvě základní věty.

A) pokud $b \geq 0$ a $|x| = b$, pak $x = b$ nebo $x = -b$

B) Pro každé reálné číslo x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

1) V tomto úkolu zkoumáme normované kvadratické rovnice (Normovaná kvadratická rovnice je rovnice ve tvaru $x^2 + bx + c = 0$, kde koeficient u x^2 je roven 1).

a) Řešte rovnici $x^2 + bx + c = 0$ doplněním na čtverec a pomocí odmocnin $\sqrt{\quad}$. Zdůvodněte VÝSLOVNÝM použitím dvou vět uvedených výše.

b) Použijte řešení z předchozí části k určení podmínek na b a c , které zaručují: žádný reálný kořen; právě jeden kořen; dva různé reálné kořeny. (Nápověda: zaměřte se na možnosti čísel pod odmocninou.)

c) Uveďte příklady normovaných kvadratických rovnic bez reálného kořene; s jedním kořenem; a se dvěma různými reálnými kořeny.

d) Jak podle vás budou vypadat grafy rovnic z předchozí části? Vysvětlete a ověřte pomocí grafické technologie.

e) Zapište příklady ve tvaru $x^2 + bx + c = 0$. Jaký myslíte, že je vztah mezi kořeny rovnic $x^2 + bx + c = 0$, které jste uvedli, a rozklad na kořenové činitele odpovídajících polynomů $p(x) = x^2 + bx + c$?

f) Rozložte (na součin) odpovídající polynomy (použijte komplexní čísla, je-li třeba) a ověřte vynásobením.

2) [Domácí úkol] V tomto úkolu zkoumáme obecnou kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty.

a) Řešte rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) doplněním na čtverec a pomocí odmocnin $\sqrt{\quad}$. Zdůvodněte jednotlivé kroky VÝSLOVNÝM použitím dvou vět z úvodu aktivity.

b) Řešení z předchozí části (které by mělo být stejné jako vaše řešení) se nazývá vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu. Použijte jej k určení podmínek na a , b a c , které zaručují: žádný reálný kořen; jeden kořen; dva různé reálné kořeny.

c) Vysvětlete, proč kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dané vzorcem odpovídají průsečíkům grafu $y = ax^2 + bx + c$ s osou x .

d) Vysvětlete, proč lze z vzorce usoudit, že x -ová souřadnice vrcholu paraboly $y = ax^2 + bx + c$ je $x = -\frac{b}{2a}$.

e) Použijte diferenciální počet (calculus) k důkazu, že x -ová souřadnice vrcholu paraboly $y = ax^2 + bx + c$ je $x = -\frac{b}{2a}$.

3) Sestavte příklady, které byste jako učitel použili k ukázání vztahů mezi vzorcem, povahou kořenů, grafy odpovídajících polynomů a jejich rozkladem na součin. Ukažte veškeré výpočty i práci, kterou by měli provádět žáci.

4) Zvažte rovnici $x^2 + 3x = 18$.

a) Využijte vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu k jejímu řešení.

b) Ověřte řešení rozkladem na součin.

c) Ověřte řešení graficky.

5) Všimněte si vztahu mezi následujícími rovnicemi a předchozím úkolem. Použijte předchozí řešení k vyřešení rovnic pro u :

a. $(2u + 1)^2 + 3(2u + 1) = 18$

b. $(2u + 1)^2 = 18 - 3(2u + 1)$

6) V kontextu fyzikálního problému narazíte na rovnici $y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$. Vyřešte rovnici pro t v závislosti na ostatních proměnných.