

Aktivita 2: Od odmocnin a doplnění na čtverec k metodě diskriminantu.

Připomeňme, že v předchozí aktivitě jsme si připomněli dvě základní věty.

A) pokud $b \geq 0$ a $|x| = b$, pak $x = b$ nebo $x = -b$

B) Pro každé reálné číslo x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

1) V tomto úkolu zkoumáme normované kvadratické rovnice (Normovaná kvadratická rovnice je rovnice ve tvaru $x^2 + bx + c = 0$, kde koeficient u x^2 je roven 1).

a) Řešte rovnici $x^2 + bx + c = 0$ doplněním na čtverec a pomocí odmocnin $\sqrt{\quad}$. Zdůvodněte VÝSLOVNÝM použitím dvou vět uvedených výše.

b) Použijte řešení z předchozí části k určení podmínek na b a c , které zaručují: žádný reálný kořen; právě jeden kořen; dva různé reálné kořeny. (Nápověda: zaměřte se na možnosti čísel pod odmocninou.)

c) Uveďte příklady normovaných kvadratických rovnic bez reálného kořene; s jedním kořenem; a se dvěma různými reálnými kořeny.

d) Jak podle vás budou vypadat grafy rovnic z předchozí části? Vysvětlete a ověřte pomocí grafické technologie.

e) Zapište příklady ve tvaru $x^2 + bx + c = 0$. Jaký myslíte, že je vztah mezi kořeny rovnic $x^2 + bx + c = 0$, které jste uvedli, a rozklad na kořenové činitele odpovídajících polynomů $p(x) = x^2 + bx + c$?

f) Rozložte (na součin) odpovídající polynomy (použijte komplexní čísla, je-li třeba) a ověřte vynásobením.

2) V tomto úkolu zkoumáme obecnou kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty.

a) Řešte rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) doplněním na čtverec a pomocí odmocnin $\sqrt{\quad}$. Zdůvodněte jednotlivé kroky VÝSLOVNÝM použitím dvou vět z úvodu aktivity.

b) Řešení z předchozí části (které by mělo být stejné jako vaše řešení) se nazývá vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu. Použijte jej k určení podmínek na a , b a c , které zaručují: žádný reálný kořen; jeden kořen; dva různé reálné kořeny.

c) Vysvětlete, proč kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dané vzorcem odpovídají průsečíkům grafu $y = ax^2 + bx + c$ s osou x .

d) Vysvětlete, proč lze z vzorce usoudit, že x -ová souřadnice vrcholu paraboly $y = ax^2 + bx + c$ je $x = -\frac{b}{2a}$.

e) Použijte diferenciální počet (calculus) k důkazu, že x -ová souřadnice vrcholu paraboly $y = ax^2 + bx + c$ je $x = -\frac{b}{2a}$.

- 3) Sestavte příklady, které byste jako učitel použili k ukázání vztahů mezi vzorcem, povahou kořenů, grafy odpovídajících polynomů a jejich rozkladem na součin. Ukažte veškeré výpočty i práci, kterou by měli provádět žáci.
- 4) Zvažte rovnici $x^2 + 3x = 18$.
- Využijte vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu k jejímu řešení.
 - Ověřte řešení rozkladem na součin.
 - Ověřte řešení graficky.
- 5) Všimněte si vztahu mezi následujícími rovnicemi a předchozím úkolem. Použijte předchozí řešení k vyřešení rovnic pro u :
- $(2u + 1)^2 + 3(2u + 1) = 18$
 - $(2u + 1)^2 = 18 - 3(2u + 1)$
- 6) V kontextu fyzikálního problému narazíte na rovnici $y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$. Vyřešte rovnici pro t v závislosti na ostatních proměnných.

Aktivita 3: Vztah mezi řešením rozkladem na součin, diskriminantním vzorcem a grafem

- 1) Zvažte rovnici $x(x + 6) = -8$.
- Řešte rozkladem na součin.
 - Ověřte pomocí vzorce (vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu).
 - Ověřte graficky porovnáním obou stran rovnice a určením průsečíků.
 - Dokážete odhadnout, jak bude vypadat graf odpovídajícího kvadratického polynomu? (Kvadratický polynom odpovídající rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ je $P(x) = ax^2 + bx + c$.) Ověřte pomocí grafické technologie.
- 2) Zvažte rovnici $x(x + 6) = -9$.
- Řešte rozkladem na součin.
 - Ověřte pomocí vzorce (vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu).
 - Dokážete odhadnout, jak bude vypadat graf odpovídajícího kvadratického polynomu? Ověřte pomocí grafické technologie.
- 3) Zvažte rovnici $x(x + 6) = -10$.
- Řešte rozkladem na součin.
 - Ověřte pomocí vzorce (vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu).
 - Dokážete odhadnout, jak bude vypadat graf odpovídajícího kvadratického polynomu? Ověřte pomocí grafické technologie.
- 4) Zvažte kvadratický polynom $P(x) = x(x + 6)$.
- Jak můžete použít jeho graf k nalezení kvadratických rovnic tvaru $x^2 + 6x + c = 0$, které mají dva různé kořeny, jeden kořen a žádný reálný kořen?
 - Najděte takové rovnice.
- 5) Řešte rovnici $x(x + 6) = x$. Jak byste žákům vysvětlili, že existují dva kořeny? Jakou chybu někteří žáci pravděpodobně udělají?
- 6) Zvažte rovnici $x^2 + 6x - 16 = 0$.
- Řešte ji rozkladem na součin.
 - Najděte průsečíky paraboly $y = x^2 + 6x - 16$ s osou x (bez grafování). Vysvětlete.

- c) Vysvětlete, proč lze souřadnici vrcholu paraboly $y = x^2 + 6x - 16$ nalézt prostým pohledem na kořeny rovnice $x^2 + 6x - 16 = 0$.
- d) Ověřte své výsledky grafem paraboly $y = x^2 + 6x - 16$.
- 7) **[Domácí úkol]** Najděte parabolu $y = ax^2 + bx + c$, která protíná osu x v bodech $x = 1 + \sqrt{2}$ a $x = 1 - \sqrt{2}$.
- a) Můžete najít souřadnici vrcholu bez kreslení grafu? Najděte ji.
- b) Jak můžete ověřit, že parabola je konvexní? Konkávní?
- c) Ověřte pomocí vzorce (vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu).
- d) Můžete najít takovou parabolu (procházející $x = 1 \pm \sqrt{2}$) s $a = 2$?
- 8) Řešte kvadratickou rovnici $x^2 - 6x + 1 = 0$ graficky (výsledek by měl být správný na dvě desetinná místa).
- a) Ověřte řešení pomocí vzorce (vzorec pro kořeny pomocí diskriminantu).
- b) Použijte kořeny z vzorce k rozložení výrazu $x^2 - 6x + 1$ na součin a ověřte vynásobením.
- c) Použijte graf odpovídajícího kvadratického polynomu $P(x) = x^2 - 6x + 1$ k vytvoření kvadratických rovnic s jedním kořenem, žádným kořenem a dvěma kořeny.
- 9) Je dán $P(x) = x^2 - 10x + 21$.
- a) Vyjádřete jej ve tvaru $P(x) = a(x - h)^2 + k$.
- b) Použijte předchozí řešení k slovnímu popisu $P(x) = x^2 - 10x + 21$ jako posloupnosti transformací (vodorovné či svislé posuny, otočení, roztažení, zúžení) základní paraboly $f(x) = x^2$.
- c) Použijte odmocninu k nalezení průsečíků grafu $P(x) = x^2 - 10x + 21$ s osou x .
- d) Ověřte graficky.
- 10) Je dán $P(x) = 4x^2 - 4x + 4$.
- a) Doplňte na čtverec ve tvaru $P(x) = a(x - h)^2 + k$.
- b) Slovně popište postup, jakými transformacemi ze základního předpisu/grafu $f(x) = x^2$ získáte polynom/předpis $P(x) = 4x^2 - 4x + 4$.
- c) Použijte odmocninu k nalezení průsečíků grafu $P(x) = 4x^2 - 4x + 4$ s osou x .
- d) Ověřte graficky.
- Ukažte, že graf libovolné kvadratické funkce $P(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola tím, že ji vyjádříte ve tvaru $P(x) = a(x - h)^2 + k$. Předpokládejte, že graf $f(x) = x^2$ je parabola.