



FACULTY
OF MATHEMATICS
AND PHYSICS
Charles University

Mathematická statistika 2

NMSA 332

Sbírka úloh

Arnošt Komárek, Marek Omelka, Daniel Hlubinka, Matúš Maciak, Stanislav Nagy

Poslední úprava dokumentu: 24. února 2026

Budeme velmi vděční za upozornění na případné chyby a překlepy.

Obsah

1	Podmíněné hustoty, podmíněné momenty	1
2	Raova-Cramérova mez	5
3	Zobecnění Raovy-Cramérový meze	9
4	Postačující statistiky	12
5	Postačující statistiky v teorii odhadu	17
6	Metoda maximální věrohodnosti (úvod)	21
7	Metoda max. věroh. - vektorový parametr	25
8	Neym.-Pears. věta a test poměrem věroh.	29
9	Metoda max. věroh. - testy (bez rušivých parametrů)	33
10	Metoda max. věroh. - testy s rušivými parametry	37
11	Další příklady na teorii max. věr.	42
12	Výsledky	43

1 Podmíněné hustoty, podmíněné momenty

Z teorie pravděpodobnosti (NMSA 333) víme, že podmíněná střední hodnota Y při daném X je definována jako

$$\mathbb{E}(Y | X) = \mathbb{E}(Y | \sigma(X)),$$

kde $\sigma(X)$ je σ -algebra generovaná náhodnou veličinou X . V následujícím uvažujeme speciální případ, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ má sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y)$ vůči dvourozměrné Lebesgueově míře.

Podmíněná hustota náhodné veličiny Y pro dané X se definuje pro $f_X(x) > 0$ jako

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)},$$

kde $f_X(x)$ je marginální hustota X .

Podmíněná střední hodnota:

$$\mathbb{E}(Y | X = x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x) dy.$$

Tak jako je $\mathbb{E}Y$ „nejlepší“ odhad Y (ve smyslu minimalizace kvadratické ztrátové funkce) při znalosti pouze marginálního rozdělení Y , tak $\mathbb{E}(Y | X)$ je „nejlepší“ odhad Y při znalosti X . Přesněji pokud $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, pak

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= \arg \min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(Y - c)^2 \\ \mathbb{E}(Y | X) &= \arg \min_{f \text{ měřit. funkce } X} \mathbb{E}(Y - f(X))^2. \end{aligned}$$

Pozor. Zatímco na $\mathbb{E}(Y | X = x)$ se díváme jako na **funkci** definovanou na nosiči veličiny X , tak $\mathbb{E}(Y | X)$ chápeme jako **náhodnou veličinu**, která je funkcí X .

Někdy si jde výpočty ulehčit využitím některých z následujících vlastností podmíněné střední hodnoty.

Vlastnosti podmíněné střední hodnoty: Nechť $h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí

- (i) $\mathbb{E}(a | X) = a$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X)) = \mathbb{E}Y$.
- (iii) $\mathbb{E}(Y | X) = \mathbb{E}Y$ pokud X a Y jsou nezávislé.
- (iv) $\mathbb{E}(a_1 h_1(X, Y) + a_2 h_2(X, Y) | X) = a_1 \mathbb{E}(h_1(X, Y) | X) + a_2 \mathbb{E}(h_2(X, Y) | X)$ pro libovolné $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
- (v) $\mathbb{E}(\psi(X)h_1(X, Y) | X) = \psi(X) \mathbb{E}(h_1(X, Y) | X)$.

Rozklad nepodmíněného rozptylu: Podmíněný rozptyl náhodné veličiny Y za podmínky X je definován jako

$$\text{var}(Y | X) = E((Y - E(Y | X))^2 | X) = E(Y^2 | X) - [E(Y | X)]^2.$$

Pro podmíněný rozptyl platí

$$\text{var}(Y) = E[\text{var}(Y | X)] + \text{var}(E(Y | X)).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \text{var}(Y) &= EY^2 - [EY]^2 = E[E(Y^2 | X)] - [EY]^2 \\ &= E[\text{var}(Y | X)] + E[E(Y | X)]^2 - [E\{E(Y | X)\}]^2 \\ &= E[\text{var}(Y | X)] + \text{var}(E(Y | X)). \end{aligned}$$

Příklad 1. $f(x, y) = x + y$

Nechť $(X, Y)^T$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = (x + y)\mathbb{I}_M(x, y), \quad M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

- (i) Určete $E(XY | X = x)$.
- (ii) Určete $E(XY | X)$.
- (iii) Určete $E(XY^2 | X)$.
- (iv) Určete $E(XY^2 | X^2)$.

Příklad 2. Podmíněně normální rozdělení

Uvažujme náhodný vektor $(Y, X)^T$. Nechť Y podmíněno X má normální rozdělení se střední hodnotou $2X^3$ a rozptylem $3X^2$. Dále nechť X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

- (i) Určete $E[\frac{Y}{X^2} | X]$.
- (ii) Určete $E\frac{Y}{X^2}$.
- (iii) Určete EY .
- (iv) Určete $\text{var}(Y)$.

Příklad 3. Podmíněná střední hodnota rozdělení na obdélníku

Nechť má náhodný vektor $(X, Y)^T$ rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{y}{x}\right), & 1 < x < 2, y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (i) Určete $E(Y | X = t)$ a $E(Y | X)$.

- (ii) Určete $E\left(Y \mid \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right) = t\right)$ a $E\left(Y \mid \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right)\right)$.
- (iii) Určete $E\left(\frac{Y}{X^6} \mid \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right)\right)$

Příklad 4. Podmíněná střední hodnota rozdělení na rovnoběžníku

Nechť má náhodný vektor $(X, Y)^\top$ rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = cy \mathbb{I}_M(x, y),$$

kde $M = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y + 1\}$ a $c > 0$ je vhodná konstanta.

- (i) Určete $E\left[911X - \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) \mid Y\right]$.
- (ii) Určete $E\left[\sin(X) \mid Y\right]$.

Příklad 5. Podmíněná střední hodnota

Nechť $(X, Y)^\top$ je náhodný vektor.

- (i) Určete $E(X + Y \mid X)$, jestliže X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny.
- (ii) Určete $E(X + Y \mid X)$, jestliže X a Y nejsou nutně nezávislé.
- (iii) Určete $E(X \mid X + Y)$, jestliže rozdělení $(X, Y)^\top$ je zaměnitelné, tj. náhodné vektory $(X, Y)^\top$ a $(Y, X)^\top$ mají stejné rozdělení.
- (iv) Určete $E(X_1 \mid \sum_{i=1}^n X_i)$ pro X_1, \dots, X_n náhodný výběr.

Poznámka. Výsledek se snažte vyjádřit co možná nejjednodušším způsobem při použití co možná nejmenšího počtu podmíněných středních hodnot.

Příklad 6. Podmíněně rovnoměrné rozdělení

Uvažujme náhodný vektor $(Y, X)^\top$. Nechť Y podmíněno X má rovnoměrné rozdělení $R(0, X^2 + 1)$. Dále nechť X má normální rozdělení $N(0, 1)$.

- (i) Určete $E[Y \mid \exp\{X\}]$.
- (ii) Určete EY .
- (iii) Určete $\text{var}(Y)$.

Příklad 7. Podmíněná střední hodnota s rovnoměrným rozdělením na trojúhelníku

Nechť má náhodný vektor $(X, Y)^\top$ rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \leq y\}$.

- (i) Určete $E[\log(X) \mid Y]$.

- (ii) Určete $E[X \mid \log(Y)]$.
- (iii) Určete $E[\log(X) \mid \log(Y)]$.

Příklad 8. Hustota $f(x, y) = \frac{3(x^2+y)}{5}$

Nechť $(X, Y)^T$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = \frac{3}{5}(x^2 + y)\mathbb{I}_M(x, y), \quad M = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

- (i) Určete $E(YX^2 \mid X = x)$, $E(YX^2 \mid X)$, $E(X \mid Y^2)$.
- (ii)* Určete $E(Y \mid X^2)$.
- (iii)* Určete $E(XY \mid X^2)$.
- (iv)* Určete $E(X \mid X^2)$.

Příklad 9. Podmiňování uspořádaným náhodným výběrem

Nechť X_1, X_2, \dots, X_n je náhodný výběr z absolutně spojitého rozdělení, a necht' $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ je příslušný uspořádaný náhodný výběr.

- (i) Určete $E(X_1 \mid X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- (ii) Určete $E(X_1 \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$.
- (iii) Pro $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ najděte $E(h_1(X_1) \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$.
- (iv) Pro $h_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ najděte $E(h_2(X_1, X_2) \mid X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$.
- (v) Zjednodušte výsledek předchozí části v případě, že funkce h_2 je symetrická, tj. $h_2(x, y) = h_2(y, x)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.

2 Raova-Cramérova mez a Fisherova míra informace

Fisherova míra informace

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ má hustotu $f(\mathbf{x}; \theta)$ vzhledem k nějaké σ -konečné míře μ , kde $\theta \in \Theta$ je neznámý (jednorozměrný) parametr. Za předpokladu, že systém hustot $\{f(\mathbf{x}; \theta) : \theta \in \Theta\}$ je regulární (viz přednáška) definujeme **Fisherovu míru informace** $J_n(\theta)$ o parametru θ obsaženou ve vektoru \mathbf{X} pomocí předpisu

$$J_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial \log f(\mathbf{X}; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 = \mathbb{E}_\theta \left[\frac{f'(\mathbf{X}; \theta)}{f(\mathbf{X}; \theta)} \right]^2. \quad (1)$$

Za určitých dalších předpokladů regularity (viz přednáška) lze Fisherovu míru informace počítat pomocí

$$J_n(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{X}; \theta)}{\partial \theta^2} \right], \quad (2)$$

což bývá zpravidla výpočetně jednodušší než (1).

Fisherova míra informace se nepoužívá pouze v níže uvedené Raově-Cramérově mezi, ale jak uvidíme později, tak je také klíčová v teorii maximální věrohodnosti.

Nechť \mathbf{X} je tvořen n nezávislými stejně rozdělenými náhodnými veličinami (vektory) X_1, \dots, X_n . Potom

$$J_n(\theta) = n J_1(\theta),$$

kde $J_1(\theta)$ je Fisherova míra informace o parametru θ obsažená v X_1 .

Nechť $J_n(\theta)$ je Fisherova míra informace o parametru θ a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitou a nenulovou derivaci v bodě θ . Potom pro Fisherovu míru informace \tilde{J}_n o parametru $g(\theta)$ platí

$$\tilde{J}_n(g(\theta)) = \frac{J_n(\theta)}{[g'(\theta)]^2}.$$

Raova-Cramérova nerovnost. Nechť $T_n = T_n(\mathbf{X})$ je nestranný odhad parametrické funkce $g(\theta)$. Potom

$$\text{var}_\theta(T_n) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{J_n(\theta)}, \quad \text{pro každé } \theta \in \Theta. \quad (3)$$

Pravá strana nerovnosti (3) se nazývá *Raova-Cramérova dolní mez*. Pokud (3) platí s rovností pro každé $\theta \in \Theta$, pak říkáme, že odhad T_n dosahuje Raovy-Cramérový dolní meze a je tudíž *nejlepší* (ve smyslu minimálního rozptylu) *nestranný odhad* parametrické funkce $g(\theta)$.

Eficiency odhadů. Eficiency nestranného (regulárního) odhadu T_n parametru θ se definuje jako

$$e = \frac{1}{J_n(\theta) \text{var}_\theta(T_n)}.$$

V případě, že $e = 1$, pak se odhad T_n nazývá *eficientní*.

Příklad 10. Fisherova míra informace a nezávislost

Mějme nezávislé stejně rozdělené vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ s dvourozměrným normálním rozdělením N_2 se střední hodnotou $(\theta, \theta)^\top$ a rozptylovou maticí $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, kde ρ je známé.

- (i) Určete $J(\theta)$, tj. Fisherovu míru informace o θ obsaženou v $(X_1, Y_1)^\top$.
- (ii) Označte \bar{X}_n výběrový průměr veličin X_1, \dots, X_n . Zjistěte zda odhad \bar{X}_n je nestranný odhad parametru θ a zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iii) Označte \bar{Y}_n výběrový průměr veličin Y_1, \dots, Y_n . Zjistěte, zda odhad $\frac{1}{2}(\bar{X}_n + \bar{Y}_n)$ je nestranný odhad parametru θ a zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.

Příklad 11. Poissonovo rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ .

- (i) Určete $J(\lambda)$ obsaženou v X_1 .
- (ii) Určete $J_n(\lambda)$ obsaženou v \mathbf{X} .
- (iii) Najděte nestranný odhad parametrické funkce $g(\lambda) = 2\lambda$ založený na $\sum_{i=1}^n X_i$. Zjistěte, zda je tento odhad eficientní (tj. zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze).
- (iv) Zjistěte, zda odhad $(1 - \frac{1}{n})^{\sum_{i=1}^n X_i}$ parametrické funkce $g(\lambda) = e^{-\lambda}$ dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (v) Ověřte, že systém hustot pro Poissonovo rozdělení je regulární.

Příklad 12. Paretovo rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Paretova rozdělení s hustotou

$$f(x; \alpha) = \frac{\alpha}{x^2} \mathbb{I}_{\{x > \alpha\}}, \quad \text{kde } \alpha > 0.$$

- (i) Spočítejte Fisherovu míru informace $J_n(\alpha)$.

Příklad 13. Parametr σ v normálním rozdělení

Bud' $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, kde parametr θ je známý.

- (i) Určete $J(\sigma)$.
- (ii) Určete $J(\sigma^2)$.
- (iii) Ověřte, že systém hustot, se kterým zde pracujete, je regulární.

Příklad 14. Nestranné odhady parametrů σ a σ^2 v normálním rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $N(0, \sigma^2)$.

- (i) Ověřte, že $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ je nestranný odhad parametru σ^2 . Zjistěte, zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (ii) Ověřte, že $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ je nestranný odhad parametru σ^2 . Zjistěte, zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iii) Ověřte, že $\hat{\sigma}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n |X_i|$ je nestranný odhad parametru σ . Zjistěte, zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iv) Uvažujte odhad $\tilde{\sigma}_n = c \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$. Najděte konstantu c tak, aby odhad $\tilde{\sigma}$ byl nestranný. Porovnejte eficiency odhadů $\hat{\sigma}_n$ a $\tilde{\sigma}_n$.

Příklad 15. Odhad parametru θ v rovnoměrném rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $R(0, \theta)$. Uvažujte odhady $\hat{\theta}_n = 2\bar{X}_n$, $\tilde{\theta}_n = \frac{n+1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ parametru θ .

- (i) Ověřte, že oba odhady $\hat{\theta}_n$, $\tilde{\theta}_n$ jsou nestrannými odhady parametru θ .
- (ii) Dosahuje některý z těchto odhadů dolní Raovy-Cramérový meze?

Příklad 16. Odhad parametru p v alternativním rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$P(X_1 = 1) = p, \quad P(X_1 = 0) = 1 - p.$$

- (i) Uvažujte $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ jako odhad parametru p . Zjistěte, zda je tento odhad nestranný a zda dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (ii) Ověřte, že systém hustot, se kterým pracujete, je regulární.

Příklad 17. Odhad λ^{-2} v exponenciálním rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x)$.

- (i) Najděte c takové, aby odhad $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ byl nestranným odhadem parametrické funkce $\frac{1}{\lambda^2}$.
- (ii) Dosahuje odhad z (i) dolní Raovy-Cramérový meze?
- (iii) Ověřte, že systém hustot je regulární.

Příklad 18. „Curved normal“ $N(\mu, \mu^2)$

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0.$$

Uvažujte, $T_1(\mathbf{X}) = \bar{X}_n$ a $T_2(\mathbf{X}) = a_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$, kde $a_n = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$.

- (i) Najděte α takové, které minimalizuje rozptyl odhadu $T_3(\mathbf{X}) = \alpha T_1(\mathbf{X}) + (1 - \alpha) T_2(\mathbf{X})$.
- (ii) Dosahuje odhad $T_3(\mathbf{X})$ dolní Raovy-Cramérovky meze?

3 Fisherova informační matice a zobecnění Raovy-Cramérový meze

Fisherova informační matice

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ má hustotu $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ -konečné míře μ , kde $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ je neznámý p -rozměrný parametr. Za předpokladu, že systém hustot $\{f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ je regulární (viz přednáška) definujeme **Fisherovu informační matici** $\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta})$

$$\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial \log f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \log f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right],$$

tj. matice $\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta})$ má prvky $\{J_{j,k,n}(\boldsymbol{\theta})\}_{j,k=1,\dots,p}$, kde

$$J_{j,k,n}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial \log f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \frac{\partial \log f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \right].$$

Pro výpočet však bývá zpravidla výhodnější využít toho, že za jistých podmínek regularity

$$J_{j,k,n}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right].$$

Podobně jako pro jednorozměrný parametr platí, že pokud \mathbf{X} je tvořen n -nezávislými stejně rozdělenými náhodnými veličinami (vektory) X_1, \dots, X_n , pak

$$\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta}) = n \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta}),$$

kde $\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice o parametru $\boldsymbol{\theta}$ obsažená v X_1 .

Zobecnění Raovy-Cramérový nerovnosti

Nechť funkce $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě parciální derivace v bodě $\boldsymbol{\theta}$. Nechť $T_n = T_n(\mathbf{X})$ je nestranný odhad parametrické funkce $g(\boldsymbol{\theta})$. Potom

$$\text{var}_{\boldsymbol{\theta}}(T_n) \geq \nabla g(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{J}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}) [\nabla g(\boldsymbol{\theta})]^\top,$$

kde $\nabla g(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p} \right)$ je gradient funkce g v bodě $\boldsymbol{\theta}$.

Příklad 19. Normální rozdělení (oba parametry neznámé)

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Najděte Fisherovu informační matici vektorového parametru $(\mu, \sigma^2)^\top$ obsaženou v náhodné veličině X_1 .
- (ii) Ověřte, zda odhad $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$ parametru μ nabývá dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iii) Ověřte, zda odhad $\hat{\sigma}_n^2 = S_n^2$ parametru σ^2 nabývá dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iv) Najděte nestranný odhad parametrické funkce $g(\mu, \sigma^2) = \mu + u_\alpha \sigma$, kde u_α je α -kvantil normovaného normálního rozdělení. Dosahuje tento odhad dolní Raovy-Cramérový meze?

Nápověda. Nestranný odhad parametru σ uvažujte ve tvaru $c_n \sqrt{S_n^2}$, kde konstantu c_n je zapotřebí dopočítat podobně jako příkladu 14(iv).

Příklad 20. Současný odhad obou parametrů v lognormálním rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (i) Najděte Fisherovu informační matici vektorového parametru $(\mu, \sigma)^T$.
- (ii) Najděte dolní Raovu-Cramérovu mez pro rozptyl nestranného odhadu parametrické funkce $g(\mu, \sigma) = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$.

Příklad 21. Zobecněné exponenciální rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} \mathbb{I}_{(\theta, \infty)}(x)$, kde $\lambda > 0$ a $\theta \in \mathbb{R}$.

- (i) Najděte Fisherovu informační matici $\mathbf{J}_n(\lambda, \theta)$ vektorového parametru $(\lambda, \theta)^T$ v náhodném výběru X_1, \dots, X_n .
- (ii) Předpokládejte, že θ je známá konstanta. Najděte Fisherovu míru informace $J_n(\lambda)$ v náhodném výběru X_1, \dots, X_n .

Příklad 22. Dvě binomická rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_{n_1} je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p_1 a Y_1, \dots, Y_{n_2} je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p_2 , přičemž oba dva výběry jsou na sobě nezávislé.

- (i) Najděte Fisherovu informační matici $\mathbf{J}_n(p_1, p_2)$ vektorového parametru $(p_1, p_2)^T$ na základě všech dat (tj. $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$).
- (ii) Označte \bar{X}_{n_1} výběrový průměr veličin X_1, \dots, X_{n_1} a \bar{Y}_{n_2} výběrový průměr veličin Y_1, \dots, Y_{n_2} . Zjistěte, zda odhad $\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}$ je nestranný odhad parametrické funkce $p_1 - p_2$ a zda tento odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérovu meze.
- (iii) Najděte dolní Raovu-Cramérovu mez pro odhad logaritmu poměru šancí, tj. pro

$$g(p_1, p_2) = \log \left(\frac{\frac{p_1}{1-p_1}}{\frac{p_2}{1-p_2}} \right).$$

- (iv) Dosahuje odhad $\hat{\theta}_n = \log \left(\frac{\frac{\bar{X}_{n_1}}{1-\bar{X}_{n_1}}}{\frac{\bar{Y}_{n_2}}{1-\bar{Y}_{n_2}}} \right)$ dolní Raovy-Cramérovu meze odvozené v (iii)?

Příklad 23. Dvě normální rozdělení se stejným rozptylem

Nechť X_1, \dots, X_{n_1} je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a Y_1, \dots, Y_{n_2} je náhodný výběr z $N(\mu_2, \sigma^2)$, přičemž oba dva výběry jsou na sobě nezávislé.

- (i) Najděte dolní Raovu-Cramérovu mez pro odhad parametru σ^2 .
- (ii) Zjistěte, zda odhad $S^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2} [(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2]$ dosahuje Raovy-Cramérový meze odvozené v (i).

Příklad 24. Lineární model přímky

Uvažujte, že pozorujete nezávislé náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_n . Náhodná veličina Y_i má rozdělení s hustotou

$$f_{Y_i}(y; \beta_0, \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{2} \right\},$$

kde x_1, \dots, x_n jsou známé konstanty.

- (i) Najděte Fisherovu informační matici $\mathbf{J}_n(\beta_0, \beta_1)$ o vektorovém parametru $(\beta_0, \beta_1)^\top$ obsaženou v náhodných veličinách Y_1, \dots, Y_n .
- (ii) Zjistěte, zda odhad

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i (x_i - \bar{x}_n)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}, \quad \text{kde } \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

je nestranný odhad parametru β_1 a zda dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.

4 Postačující (suficientní) statistiky

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ má hustotu $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ -konečné míře μ , kde $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ je neznámý parametr.

Definice 1. Řekneme, že statistika $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X})$ je **postačující** (suficientní) pro parametr $\boldsymbol{\theta}$, jestliže podmíněné rozdělení \mathbf{X} při daném \mathbf{S} nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.

Postačující statistika tedy obsahuje veškerou informaci o $\boldsymbol{\theta}$, která je v náhodném vektoru \mathbf{X} . Následující věta je užitečná při hledání postačujících statistik.

Věta 1 (Neymanovo faktorizační kritérium). *Statistika \mathbf{S} je postačující právě tehdy, existuje-li taková nezáporná měřitelná funkce $g(\mathbf{s}; \boldsymbol{\theta})$ a taková nezáporná měřitelná funkce $h(\mathbf{x})$, že platí*

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = g(\mathbf{S}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\theta}) h(\mathbf{x}).$$

V aplikacích hledáme postačující statistiky, které jsou v jistém smyslu co možná „nejmenší“. Toto se snaží matematicky popsat následující definice.

Definice 2. Řekneme, že postačující statistika $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ je **minimální**, jestliže pro jakoukoliv jinou postačující statistiku $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ existuje funkce \mathbf{g} taková, že $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{T}(\mathbf{X}))$ (skoro jistě).

Pro nalezení *minimální* postačující statistiky lze využít následující větu.

Věta 2 (Lehmannova-Scheffého věta o minimálních postačujících statistikách). *Nechť \mathbf{S} je postačující statistika a množina $M = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) > 0\}$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ položme*

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})}{f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})}.$$

*Nechť $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$, implikuje, že $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{y})$ (pro μ -skoro všechny \mathbf{x}, \mathbf{y}). Pak $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ je *minimální*.*

Někteří autoři formulují větu 2 bez předpokladu, že \mathbf{S} je postačující statistika. Potom je však třeba předpokládat, že existuje měřitelná selekce inverzního zobrazení (viz kapitola 7.4.3. knihy Anděl: Základy matematické statistiky, MATFYZPRESS, 2007).

Definice 3. Řekneme, že statistika \mathbf{S} je **úplná**, platí-li pro každou její měřitelnou funkci $w(\mathbf{S})$ implikace

$$\left\{ \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} w(\mathbf{S}) = 0 \text{ pro každé } \boldsymbol{\theta} \in \Theta \right\} \implies \left\{ w(\mathbf{S}) = 0 \text{ skoro jistě pro každé } \boldsymbol{\theta} \in \Theta \right\}.$$

Příklad 25. Geometrické rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení, tj.

$$P(X_i = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Označme $S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$.

(i) Z definice ověřte, že $S(\mathbf{X})$ je postačující (suficientní) statistika.

- (ii) Pomocí Neymanova faktorizačního kritéria ověřte, že $S(\mathbf{X})$ je postačující (suficientní) statistika.
- (iii) Ukažte, že $S(\mathbf{X})$ je minimální postačující statistika.
- (iv) Ukažte, že $(\sum_{i=1}^n X_i, \bar{X}_n)^\top$ je minimální postačující statistika.
- (v) Ukažte, že X_1 je úplná statistika.
- (vi) Ukažte, že $(X_1, X_2)^\top$ není úplná statistika.

Příklad 26. Poissonovo rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení, tj.

$$P(X_i = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Označme $S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (i) Z definice ověřte, že $S(\mathbf{X})$ je postačující (suficientní) statistika.
- (ii) Pomocí Neymanova faktorizačního kritéria ověřte, že $S(\mathbf{X})$ je postačující (suficientní) statistika.
- (iii) Dokažte, že $S(\mathbf{X})$ je minimální postačující statistika.
- (iv) Dokažte, že $X_1 + X_2$ je úplná statistika.
- (v) Dokažte, že $(X_1^2, X_2)^\top$ není úplná statistika.

Příklad 27. Rovnoměrné diskrétní rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z rovnoměrného diskrétního rozdělení, tj.

$$P(X_i = k) = \frac{1}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

kde $M \in \mathbb{N}$. Ověřte, že $S(\mathbf{X}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ je postačující (suficientní) statistika pro parametr M .

- (i) Pomocí definice postačující (suficientní) statistiky.
- (ii) Pomocí Neymanova faktorizačního kritéria.

Příklad 28. Normální rozdělení s nulovou střední hodnotou

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Ověřte, zda následující statistiky jsou postačující (suficientní) pro parametr σ^2 .

- (i) $T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, (ii) $T(\mathbf{X}) = (|X_1|, \dots, |X_n|)^\top$, (iii) $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$, (iv) $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n |X_i|$,
- (v) $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$, (vi) $T(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, (vii) $T(\mathbf{X}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2, X_n^2 \right)^\top$.

Příklad 29. Alternativní rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - p.$$

Definujme $S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (i) Dokažte, že $S(\mathbf{X})$ je postačující (suficientní) pro parametr p .
- (ii) Dokažte, že $S(\mathbf{X})$ je dokonce minimální postačující (suficientní) statistika pro parametr p .
- (iii) Z definice dokažte, že $T(\mathbf{X}) = X_1$ je úplná statistika pro parametr p . Je statistika $T(\mathbf{X})$ postačující?
- (iv) Z definice dokažte, že $S(\mathbf{X})$ je úplná statistika pro parametr p .

Příklad 30. Normální rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$.

- (i) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku pro $(\mu, \sigma^2)^\top$.

Příklad 31. Rovnoměrné rozdělení $R(0, \theta)$

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(0, \theta)$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta > 0$.

- (i) Ukažte, že statistika $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ je postačující a úplná.
- (ii) Ukažte, že statistika X_1 je úplná, ale není postačující.

Příklad 32. Rovnoměrné rozdělení $R(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 1, & \theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta \in \mathbb{R}$.

- (i) Ukažte, že $S(\mathbf{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})^\top$ je postačující (suficientní) statistika pro parametr θ .
- (ii) Ukažte, že $S(\mathbf{X})$ není úplná.

Příklad 33. Paretovo rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Paretova rozdělení s hustotou

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}_{\{x > \alpha\}}, \quad \text{kde } \beta > 0, \alpha > 0.$$

- (i) Najděte netriviální postačující statistiku pro parametr $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$.

Příklad 34. „Curved normal“ $N(\mu, \mu^2)$

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \mu^2)$, kde $\mu \in \mathbb{R}$.

- (i) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku.
- (ii) Je statistika z (i) úplná?

Příklad 35. Multinomické rozdělení

Modelujme počty dětí narozených během jednotlivých dnů v týdnu pomocí multinomického rozdělení $M(n, p_1, \dots, p_7)$, tj.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_7 = x_7) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_7!} p_1^{x_1} \cdots p_7^{x_7}, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^7 x_i = n, \quad \sum_{i=1}^7 p_i = 1.$$

- (i) Je $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_7)$ minimální postačující (suficientní) statistika pro vektorový parametr $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_7)^\top$? Pokud ano, dala by se snížit dimenze této statistiky, aby byla stále minimální postačující (suficientní)?
- (ii) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku (pro parametry modelu) za předpokladu, že $p_1 = p_2 = \dots = p_5$ a $p_6 = p_7$.
- (iii) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku za předpokladu, že dětí se rodí se stejnou pravděpodobností v každém dni v týdnu, tj. $p_1 = \dots = p_7$.

Příklad 36. Normální rozdělení s nulovou střední hodnotou

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Ukažte, že následující statistiky nejsou úplné.

- (i) $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$,
- (ii) $T(\mathbf{X}) = \sin(X_1) - 1$.

Příklad 37. Beta rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Beta rozdělení s parametry a, b s hustotou

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $a > 0, b > 0$ a $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ je beta funkce v bodech a, b .

- (i) Najděte minimální postačující (suficientní) statistiku pro parametr $(a, b)^\top$.

Příklad 38. Dva výběry z normálního rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a Y_1, \dots, Y_m je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$. Oba tyto výběry jsou na sobě nezávislé.

(i) Dokažte, že

$$S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^m Y_i, \sum_{i=1}^m Y_i^2 \right)^T$$

je postačující (suficientní) statistika.

(ii) Dokažte, že statistika $S(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ není úplná.

Příklad 39. Useknuté Poissonovo rozdělení

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z Poissonova rozdělení $\text{Po}(\lambda, K)$ useknutého zprava v neznámém bodě K , tj.

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x! C(K, \lambda)}, \quad x = 0, 1, \dots, K, \quad \text{kde} \quad C(K, \lambda) = \sum_{i=0}^K e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!},$$

kde $\lambda > 0$ a $K \in \mathbb{N}$ jsou neznámé parametry.

(i) Najděte postačující statistiku pro vektor neznámých parametrů $(\lambda, K)^T$.

Příklad 40.* Dvourozměrné normální rozdělení se společnou střední hodnotou

Mějme nezávislé stejně rozdělené vektory $(X_1, Y_1)^T, \dots, (X_n, Y_n)^T$ s dvourozměrným normálním rozdělením N_2 se střední hodnotou $(\theta, \theta)^T$ a rozptylovou maticí $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, kde parametry $\theta \in \mathbb{R}$ a $\rho \in (-1, 1)$ jsou neznámé.

- (i) Označte \bar{X}_n výběrový průměr veličin X_1, \dots, X_n . Zjistěte, zda odhad \bar{X}_n je nejlepší nestranný odhad parametru θ .
- (ii) Označte \bar{Y}_n výběrový průměr veličin Y_1, \dots, Y_n . Zjistěte, zda odhad $\frac{1}{2}(\bar{X}_n + \bar{Y}_n)$ je nejlepší nestranný odhad parametru θ .

5 Využití postačujících (suficientních) statistik v teorii odhadu

Nechť rozdělení našich dat (reprezentovaných náhodnými vektory $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$) závisí na parametru $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$, který náleží do parametrického prostoru Θ .

Definice 4. Řekneme, že odhad $T = T(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ je nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $a(\boldsymbol{\theta})$, jestliže pro každý jiný nestranný odhad $\tilde{T} = \tilde{T}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ platí, že

$$\text{var}_{\boldsymbol{\theta}}(T) \leq \text{var}_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{T}), \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\theta} \in \Theta.$$

Jak uvidíme níže, při hledání nejlepšího nestranného odhadu hrají důležitou úlohu úplné postačující statistiky. Ty se dají „snadno“ najít v tzv. exponenciálních systémech hustot.

Věta 3 (O exponenciálním systému). *Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s hustotou exponenciálního typu, tj. s hustotou (vůči nějaké σ -konečné míře μ) tvaru*

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = q(\boldsymbol{\theta}) h(\mathbf{x}) \exp \left\{ \sum_{j=1}^p b_j(\boldsymbol{\theta}) R_j(\mathbf{x}) \right\},$$

kde $h(\mathbf{x}) \geq 0$ a $q(\boldsymbol{\theta}) > 0$. Předpokládejme, že množina $\{(b_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, b_p(\boldsymbol{\theta}))^\top : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$ obsahuje nede-generovaný p -rozměrný interval. Dále nechť funkce $b_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, b_p(\boldsymbol{\theta})$ jsou affinně nezávislé. Položme

$$\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_p)^\top, \quad \text{kde} \quad S_j = \sum_{i=1}^n R_j(\mathbf{X}_i), \quad j = 1, \dots, p.$$

Potom \mathbf{S} je úplná postačující statistika pro parametr $\boldsymbol{\theta}$.

Následující věta nám říká, že odhad můžeme „zlepšit“, pokud jej podmíníme postačující statistikou.

Věta 4 (Raova-Blackwellova věta). *Nechť $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ je postačující statistika a nechť $a(\boldsymbol{\theta})$ je parametrická funkce, kterou chceme odhadnout. Nechť $T = T(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ je odhad takový, že $E_{\boldsymbol{\theta}} T^2 < \infty$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. Označme $U(\mathbf{S}) = E[T|\mathbf{S}]$. Potom platí*

$$EU(\mathbf{S}) = ET, \quad E[T - a(\boldsymbol{\theta})]^2 \geq E[U(\mathbf{S}) - a(\boldsymbol{\theta})]^2,$$

přičemž rovnost v poslední nerovnosti nastává právě tehdy, je-li $T = U(\mathbf{S})$ skoro jistě.

První Lehmannova-Scheffého věta nám pak říká, že pokud podmíníme nestranný odhad úplnou postačující statistikou, tak dostaneme nejlepší nestranný odhad.

Věta 5 (první Lehmannova-Scheffého věta). *Předpokládejme, že $T = T(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ je nestranný odhad parametrické funkce $a(\boldsymbol{\theta})$ takový, že $E_{\boldsymbol{\theta}} T^2 < \infty$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. Nechť \mathbf{S} je úplná postačující statistika pro parametr $\boldsymbol{\theta}$. Definujme $U(\mathbf{S}) = E[T|\mathbf{S}]$. Potom $U(\mathbf{S})$ je nejlepší nestranný odhad pro $a(\boldsymbol{\theta})$, a to jediný.*

Druhá Lehmannova-Scheffého věta nám zase říká, že pokud máme nestranný odhad, který je funkcí úplné postačující statistiky, pak se již jedná o nejlepší nestranný odhad.

Věta 6 (druhá Lehmannova-Scheffého věta). *Nechť \mathbf{S} je úplná postačující statistika pro parametr $\boldsymbol{\theta}$. Nechť g je funkce taková, že statistika $W = g(\mathbf{S})$ je nestranný odhad parametrické funkce $a(\boldsymbol{\theta})$. Dále nechť $E_{\boldsymbol{\theta}} W^2 < \infty$ pro všechna $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$. Potom W je nejlepší nestranný odhad pro $a(\boldsymbol{\theta})$, a to jediný.*

Příklad 41. Geometrické rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení, tj.

$$P(X_i = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

kde $p \in (0, 1)$.

- (i) Ukažte, že odhad $T(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 0\}$ je nestranný odhad parametru p .
- (ii) Pomocí postačující statistiky $S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ a Raovy-Blackwellovy věty „vylepšete“ odhad $T(\mathbf{X})$.
- (iii) Je odhad nalezený ve (ii) nejlepší nestranný odhad parametru p ?
- (iv) Obdobně jako výše najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $p(1-p)$.

Příklad 42. Speciální multinomické rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z následující verze multinomického rozdělení

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - 2p,$$

kde $p \in (0, \frac{1}{2})$.

- (i) Ukažte, že odhad $T(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i = 1\}$ je nestranný odhad parametru p .
- (ii) Ukažte, že $S(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \neq 0\}$ je postačující statistika pro parametr p .
- (iii) Pomocí $S(\mathbf{X})$ a Raovy-Blackwellovy věty „vylepšete“ odhad $T(\mathbf{X})$.
- (iv) Je odhad nalezený ve (iii) nejlepší nestranný odhad parametru p ?

Příklad 43. Alternativní rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - p.$$

- (i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru p .
- (ii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $p(1-p)$.

Příklad 44. Poissonovo rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z Poissonovo rozdělení s parametrem λ .

- (i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru λ .
- (ii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $e^{-\lambda}$.
- (iii) Dosahuje rozptyl některého z výše uvedených odhadů příslušné dolní Raovy-Cramérovky meze?

Příklad 45. Normální rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uvažujte odhad $\tilde{\sigma}_n = a_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$, kde $a_n = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$.

- (i) Ukažte, že S_n^2 je nejlepší nestranný odhad parametru σ^2 . Všimněte si, že tento odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze, viz Příklad 19.
- (ii) Ukažte, že $\tilde{\sigma}_n$ je nejlepší nestranný odhad σ .
- (iii) Je výběrový medián nejlepší nestranný odhad parametru μ ?
- (iv) Ukažte, že $\bar{X}_n + u_\alpha \tilde{\sigma}_n$ je nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $\mu + u_\alpha \sigma$.
- (v) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce μ^2 .

Příklad 46. „Curved normal“ $N(\mu, \mu^2)$

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z normálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\mu^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0.$$

Uvažujte, $T_1(\mathbf{X}) = \bar{X}_n$ a $T_2(\mathbf{X}) = a_n \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$, kde $a_n = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$.

- (i) Ukažte, že $T_1(\mathbf{X})$ i $T_2(\mathbf{X})$ jsou nestrannými odhady μ a oba jsou funkcí minimální postačující statistiky.
- (ii) Ukažte, že rozptyly odhadů $T_1(\mathbf{X})$ a $T_2(\mathbf{X})$ jsou různé.

Příklad 47. Odhad posunutí exponenciálního rozdělení

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení

$$f(x; \delta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\delta)}, & x \in (\delta, \infty), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$ je neznámý parametr a λ je **známé**.

- (i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru δ .
- (ii) Dosahuje odhad z (i) dolní Raovy-Cramérový meze?

Nápověda: Najděte úplnou postačující statistiku a spočítejte její střední hodnotu.

Příklad 48. Odhad λ v exponenciálním rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x)$.

- (i) Najděte nejlepší nestranný odhad parametru λ .
- (ii) Dosahuje odhad nalezený v (i) dolní Raovy-Cramérový meze?
- (iii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce λ^k .

Nápověda pro (i): Hledejte odhad jako vhodný násobek odhadu $\frac{1}{\bar{X}_n}$. Využijte toho, že $\sum_{i=1}^n X_i$ má Gama rozdělení s hustotou $f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x)$.

Příklad 49. Odhad θ v rovnoměrném rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(0, \theta)$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta > 0$.

- (i) Je odhad $\tilde{\theta}_n = 2\bar{X}_n$ nejlepší nestranný odhad parametru θ ?
- (ii) Pokud je odpověď v (i) záporná, tak najděte nejlepší nestranný odhad parametru θ .
- (iii) Dosahuje odhad z (ii) dolní Raovy-Cramérový meze?

Příklad 50. Obecné multinomické rozdělení

Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s multinomickým rozdělením $M(1; p_1, \dots, p_K)$, kde

$$P(\mathbf{X}_1 = (x_1, \dots, x_K)) = p_1^{x_1} \cdots p_K^{x_K},$$

kde

$$x_k \in \{0, 1\}, \quad 0 < p_k < 1, \quad k \in \{1, \dots, K\},$$

a

$$\sum_{k=1}^K x_k = 1, \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1.$$

- (i) Najděte úplnou postačující statistiku pro parametr $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K)^T$.
- (ii) Najděte nejlepší nestranný odhad parametrické funkce $a(\mathbf{p}) = p_1 p_2$.

6 Metoda maximální věrohodnosti - úvod

Nechť naše pozorování $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ mají sdruženou hustotu $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \boldsymbol{\theta})$ (vzhledem k nějaké σ -konečné míře μ), které závisí na neznámém p -rozměrném parametru $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$. Věrohodností pak rozumíme (náhodnou) funkci v parametru $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n; \boldsymbol{\theta}).$$

Maximálně věrohodný odhad definujeme jako

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}).$$

Zpravidla se odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ hledá jako argument maxima logaritmicke věrohodnosti $L_n(\boldsymbol{\theta}) = \log \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$. Pokud je hustota $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \boldsymbol{\theta})$ „dostatečně hladká“ v $\boldsymbol{\theta}$, pak odhad často hledáme jako řešení soustavy p věrohodnostních rovnic

$$\frac{\partial L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}_p.$$

V mnoha aplikacích předpokládáme, že $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s hustotou $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ -konečné míře μ . Potom

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\theta}) \quad \text{a} \quad L_n(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log f(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\theta}).$$

Jednorozměrný parametr - asymptotické rozdělení

Mějme nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ z rozdělení s hustotou $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ vůči nějaké σ -konečné míře μ . Za určitých předpokladů regularity je odhad metodou maximální věrohodnosti asymptoticky normální a splňuje

$$\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}(0, 1/J(\boldsymbol{\theta}_X)), \quad (4)$$

kde $J(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova míra informace o parametru $\boldsymbol{\theta}$ v (jednom) náhodném vektoru \mathbf{X}_1 .

Tedy dostáváme, že asymptotický rozptyl (tj. rozptyl asymptotického rozdělení) maximálně věrohodného odhadu za podmínek regularity splňuje

$$\text{avar}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \frac{1}{n J(\boldsymbol{\theta}_X)} = \frac{1}{J_n(\boldsymbol{\theta}_X)},$$

kde $J_n(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova míra informace v celém náhodném výběru $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$.

Případy, že **nejsou splněny podmínky regularity**, se zpravidla dají poznat tak, že nosič rozdělení závisí na neznámém parametru. V takovém případě **nelze** při hledání maximálně věrohodného odhadu postupovat „standardně“ (tj. hledat kořen derivace logaritmicke věrohodnosti, protože nelze derivovat podle neznámého parametru). Odhad se najde pak přímo vyšetřováním věrohodnosti, která je zpravidla monotónní v parametru.

Odhad transformovaného parametru. Někdy v aplikacích potřebujeme maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $g(\boldsymbol{\theta}_X)$. Nechť $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ je maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$. Potom dle Zehnaova principu invariance je $g(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ maximálně věrohodným odhadem parametrické funkce

$g(\theta_X)$. Navíc pokud $\hat{\theta}_n$ splňuje (4) a g je spojitě diferencovatelná, pak asymptotické rozdělení $g(\hat{\theta}_n)$ plyne z delta věty a platí

$$\sqrt{n} (g(\hat{\theta}_n) - g(\theta_X)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}(0, [g'(\theta_X)]^2 / J(\theta_X)).$$

Příklad 51. Alternativní rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - p.$$

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p a určete jeho asymptotické rozdělení.
- (ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $p(1-p)$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
- (iii) Porovnejte odhady z (i) a (ii) s nejlepšími nestrannými odhady z příkladu 43. Dále porovnejte asymptotické rozptyly maximálně věrohodných odhadů s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 52. Poissonovo rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z Poissonovo rozdělení s parametrem λ .

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru λ a určete jeho asymptotické rozdělení.
- (ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $e^{-\lambda}$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
- (iii) Porovnejte odhady z (i) a (ii) s nejlepšími nestrannými odhady z příkladu 44 a s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 53. Exponenciální rozdělení

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení

$$f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\lambda}_n$ parametru λ .
- (ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu odvozeného v (i).
- (iii) Porovnejte odhad $\hat{\lambda}_n$ s nejlepšími nestrannými odhady z Příkladu 48. Dále porovnejte asymptotický rozptyl odhadu $\hat{\lambda}_n$ s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 54. Geometrické rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z geometrického rozdělení, tj.

$$P(X_i = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $p \in (0, 1)$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p a určete jeho asymptotické rozdělení.
- (ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $p(1-p)$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
- (iii) Porovnejte tyto odhady s nejlepšími nestrannými odhady z příkladu 41.

Příklad 55. Rovnoměrné rozdělení $R(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 1, & \theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta \in \mathbb{R}$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ .
- (ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).

Příklad 56. Rovnoměrné diskrétní rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z rovnoměrného diskrétního rozdělení, tj.

$$P(X_i = k) = \frac{1}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

kde $M \in \mathbb{N}$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru M .
- (ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).

Příklad 57. Normální rozdělení s různými středními hodnotami

Nechť $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(\theta x_i, 1)$, kde θ je neznámý parametr a x_1, \dots, x_n jsou známé konstanty.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ .
- (ii) Vyšetřete nestrannost odhadu z (i).
- (iii) Dosahuje odhad dolní Raovy-Cramérovky meze?

Příklad 58. Podmíněné binomické rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z diskrétního rozdělení

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{1 - (1 - p)^m} \binom{m}{k} p^k (1 - p)^{m-k}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

kde $m \in \mathbb{N}$ je známé celé číslo a $p \in (0, 1)$ je neznámý parametr.

- (i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru p a odvoďte asymptotické rozdělení tohoto odhadu.

Příklad 59. Weibullovo rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Weibullova rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} e^{-x^\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta > 0$.

- (i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru θ a ukažte, že tato rovnice má právě jedno řešení.
- (ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 60. Logistické rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z logistického rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1 + e^{-(x-\theta)})^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\theta \in \mathbb{R}$.

- (i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru θ a ukažte, že tato rovnice má právě jedno řešení.
- (ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 61. „Curved normal“ $N(\theta, \theta^2)$

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\theta, \theta^2)$, kde $\theta > 0$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ .
- (ii) Vyšetřete konzistenci odhadu z (i).
- (iii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 62. Model jednoduché poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$, které splňují

$$P(Y_1 = k | X_1) = \frac{[\lambda(X_1)]^k e^{-\lambda(X_1)}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\lambda(x) = \exp\{\beta x\}$ a rozdělení X_1 nezávisí na neznámém parametru β .

- (i) Najděte věrohodnostní rovnici pro odhad parametru β a určete asymptotické rozdělení tohoto odhadu.

Příklad 63. Multinomické rozdělení (speciální případ)

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z následující verze multinomického rozdělení

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - 2p,$$

kde $p \in (0, \frac{1}{2})$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p .
- (ii) Určete asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 64. Dvojitě exponenciální rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z dvojitě exponenciálního (Laplaceova) rozdělení s hustotou $f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$, kde $\theta \in \mathbb{R}$ je neznámý parametr.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ .

7 Metoda maximální věrohodnosti - vektorový parametr

Mějme nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory (veličiny) $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ z rozdělení s hustotou $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ vůči nějaké σ -konečné míře μ , kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ je neznámý parametr, jehož skutečná hodnota je $\boldsymbol{\theta}_X$. Potom za určitých předpokladů regularity (viz přednáška) je odhad metodou maximální věrohodnosti $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\theta}_{n,1}, \dots, \hat{\theta}_{n,p})^\top$ asymptoticky normální a splňuje

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N_p(\mathbf{0}_p, \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_X)), \quad (5)$$

kde $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova matice informace o parametru $\boldsymbol{\theta}$ v (jednom) náhodném vektoru (veličině) \mathbf{X}_1 .

Odhad asymptotického rozptylu. Z asymptotické normality (5) vidíme, že asymptotický rozptyl maximálně věrohodného odhadu je v regulárních případech

$$\text{avar}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \frac{1}{n} \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_X) = \mathbf{J}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}_X),$$

kde $\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informační matice v celém náhodném výběru $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$.

K tomu abychom mohli konstruovat intervaly (resp. množiny) spolehlivosti, potřebujeme konzistentní odhad Fisherovy informační matice $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$. Za předpokladů regularity z přednášky lze ukázat, že takovým konzistentním odhadem může být $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ nebo také tzv. *empirická (napozorovaná) Fisherova informační matice* v bodě $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$, tj.

$$\hat{\mathbf{J}}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_n}. \quad (6)$$

Tento odhad je zajímavý zejména tenkrát, když nejsme schopni dopočítat (teoretickou) Fisherovu informační matici $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$.

Konfidenční množina pro $\boldsymbol{\theta}_X$. Nechť $\hat{\mathbf{J}}$ je nějaký konzistentní odhad $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}_X)$, tj.

$$\hat{\mathbf{J}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}_X). \quad (7)$$

Konfidenční množinu *Waldovského typu* pro $\boldsymbol{\theta}_X$ s asymptotickým pokrytím $1 - \alpha$ pak můžeme sestavit jako

$$\{\boldsymbol{\theta} \in \Theta : n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta})^\top \hat{\mathbf{J}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \leq \chi_p^2(1 - \alpha)\}, \quad (8)$$

kde $\chi_p^2(1 - \alpha)$ je $(1 - \alpha)$ -kvantil χ^2 -rozdělení o p stupních volnosti.

Interval spolehlivosti pro $\theta_{X,k}$ (k -tou složku parametru $\boldsymbol{\theta}_X$). Označme $\hat{\theta}_{n,k}$ k -tou složku maximálně věrohodného odhadu $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ a nechť $\hat{\mathbf{J}}^{k,k}$ je k -tý diagonální prvek matice $\hat{\mathbf{J}}^{-1}$ (tj. inverze odhadnuté Fisherovy informační matice). Za platnosti asymptotické normality max. věrohodného odhadu (5) a konzistence odhadu Fisherovy informační matice (7) má oboustranný intervalový odhad

$$\left(\hat{\theta}_{n,k} - \frac{u_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\mathbf{J}}^{k,k}}}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_{n,k} + \frac{u_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\mathbf{J}}^{k,k}}}{\sqrt{n}}, \right) \quad (9)$$

asymptotickou spolehlivost $1 - \alpha$. Analogicky můžeme sestavit dolní, resp. horní intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.

Příklad 65. Normální rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2)^\top$ vektorového parametru $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\top$.

- (ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).
- (iii) Na základě výsledků teorie maximální věrohodnosti sestavte oboustranný intervalový odhad pro parametr μ o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$. Porovnejte s přesným intervalem spolehlivosti, který využívá t -rozdělení.
- (iv) Odvoďte asymptotické rozdělení $\widehat{\mu}_n + u_\alpha \widehat{\sigma}_n$, což je odhad α -kvantilu rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Porovnejte asymptotický rozptyl odhadu $\widehat{\theta}_n$ s dolní Raovou-Cramérovou mezí.

Příklad 66. Lognormální rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)^\top$ vektorového parametru $\theta = (\mu, \sigma^2)^\top$.
- (ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).
- (iii) Sestavte asymptotickou konfidenční množinu pro parametr $\theta = (\mu, \sigma^2)^\top$.
- (iv) Sestavte dolní (levostranný) intervalový odhad pro parametr μ o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.

Příklad 67. Odhad posunutí a intenzity exponenciálního rozdělení

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou

$$f(x; \lambda, \delta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\delta)}, & x \in [\delta, \infty), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\lambda > 0$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(\delta, \lambda)^\top$.
- (ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).
- (iii) Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n(\widehat{\delta}_n - \delta) \leq x)$$

a pomocí tohoto výsledku určete limitní rozdělení odhadu $\widehat{\delta}_n$.

Příklad 68. Rovnoměrné rozdělení $R(a, b)$

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(a, b)$ s hustotou

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $a < b$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(a, b)^\top$.

- (ii) Vyšetřete (slabou) konzistenci odhadu z (i).
 (iii) Spočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n(\hat{b}_n - b) \leq x)$$

a pomocí tohoto výsledku určete limitní rozdělení odhadu \hat{b}_n .

Příklad 69. Multinomické rozdělení

Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s multinomickým rozdělením $M(1; p_1, \dots, p_K)$, kde

$$P(\mathbf{X}_1 = (x_1, \dots, x_K)) = p_1^{x_1} \dots p_K^{x_K},$$

kde

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad 0 < p_i < 1, \quad i = 1, \dots, K,$$

a

$$\sum_{i=1}^K x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^K p_i = 1.$$

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K)^\top$.
 (ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 70. Dvojčata

V roce 2012 bylo v ČR porozeno 1 987 dvojčat, z toho v 604 případech to byli dva chlapci a v 609 případech dvě dívky. Předpokládejte, že

$$P(\text{dva chlapci}) = p, \quad P(\text{dvě dívky}) = q,$$

$$P(\text{první chlapec, druhá dívka}) = P(\text{první dívka, druhý chlapec}).$$

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametrické funkce $\frac{2p}{1+p-q}$, která vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že se narodí dva chlapci, za předpokladu, že prvorozené dítě z dvojčat je chlapec.
 (ii) Sestavte intervalový odhad pro $\frac{2p}{1+p-q}$.

Příklad 71. $Y|N$ je binomické

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(Y_1, N_1)^\top, \dots, (Y_n, N_n)^\top$ z diskrétního rozdělení

$$P(Y_1 = i, N_1 = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots; i = 0, 1, \dots, j.$$

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(p, \lambda)^\top$.
 (ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).

Příklad 72. Normální lineární regresní model

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(\begin{smallmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{smallmatrix}), \dots, (\begin{smallmatrix} X_n \\ Y_n \end{smallmatrix})$. Nechť rozdělení Y_i podmíněno X_i je normální se střední hodnotou βX_i a rozptylem σ^2 (pro $i = 1, \dots, n$). Nechť dále rozdělení X_i již nezávisí na parametrech β, σ^2 a $E X_i^2 < \infty$ je konečná.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru $\theta = (\beta, \sigma^2)^\top$.
- (ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\theta}_n = (\hat{\beta}_n, \hat{\sigma}_n^2)^\top$ z (i).
- (iii) Z (ii) odvoďte asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\beta}_n$.
- (iv) Sestavte asymptotický intervalový odhad pro β o spolehlivosti $1 - \alpha$.

Příklad 73. Model logistické regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(\begin{smallmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{smallmatrix}), \dots, (\begin{smallmatrix} X_n \\ Y_n \end{smallmatrix})$, kde

$$P(Y_1 = 1 | \mathbf{X}_1) = \frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_1\}}{1 + \exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_1\}}, \quad P(Y_1 = 0 | \mathbf{X}_1) = \frac{1}{1 + \exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_1\}},$$

a rozdělení \mathbf{X}_1 nezávisí na neznámém vektorovém parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$. Dále necht' $E \frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_i\}}{(1 + \exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_i\})^2} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top$ je konečná regulární matice.

- (i) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu parametru $\boldsymbol{\beta}$.
- (ii) Sestavte oboustranný intervalový odhad pro parametr β_1 .

Příklad 74. $Y|X$ je exponenciální

Mějme nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ z rozdělení s hustotou

$$f(x, y; \theta, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{x\theta\eta} \exp\left\{-\frac{y}{x\theta} - \frac{x}{\eta}\right\}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta, \eta > 0$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad $(\hat{\theta}_n, \hat{\eta}_n)^\top$ vektorového parametru $(\theta, \eta)^\top$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
- (ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\theta}_n$.
- (iii) Sestavte (oboustranný) intervalový odhad pro parametr θ o (asymptotické) spolehlivosti $1 - \alpha$.
- (iv) Je odhad $\hat{\theta}_n$ nejlepším nestranným odhadem parametru θ ?

8 Neymanovo-Pearsonovo lemma a test poměrem věrohodnosti

Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ vzhledem k nějaké σ -konečné míře ν . Chceme testovat hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_1$, kde $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_0$. Položme

$$T_n = \frac{\prod_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\theta}_1)}{\prod_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\theta}_0)},$$

a uvažujme test tvaru

$$T_n \geq c, \tag{10}$$

kde c je taková konstanta, aby test měl hladinu α . Potom Neymanovo-Pearsonovo lemma (Lemma 8.1 [Anděl, 2011](#)) říká, že tento test má největší sílu (tj. nejmenší pravděpodobnost chyby 2. druhu) mezi všemi testy s hladinou α . Za povšimnutí stojí, že $T_n = \frac{\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}_1)}{\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta}_0)}$, kde $\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$ je věrohodnost v bodě $\boldsymbol{\theta}$.

V případě, že rozdělení je diskrétní, tak zpravidla nelze najít c takové, aby test s kritickým oborem (10) měl předepsanou hladinu α . Teoreticky lze tento problém vyřešit pomocí tzv. „znáhodněných testů“ (Lemma 8.1 [Anděl, 2011](#)). V praxi se však znáhodněné testy příliš nepoužívají. Spíše se v takovém případě hledá takové c , aby test s kritickým oborem (10) měl hladinu co nejbližší α , nicméně menší než (nebo rovnou) α .

Test poměrem věrohodnosti. Uvažujme nyní obecnější hypotézy

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_0, \quad H_1 : \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_1, \quad \text{kde } \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1.$$

Inspirováni Neymanovou-Pearsonovou větou uvažujme testovou statistiku ve tvaru

$$\frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} \prod_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \prod_{i=1}^n f(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\theta})} = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})}.$$

Jelikož proti nulové hypotéze budou svědčit hodnoty testové statistiky, které jsou dostatečně větší než jedna, tak se nabízí uvažovat následující testovou statistiku

$$\tilde{T}_n = \frac{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})} = \frac{\mathcal{L}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)}{\mathcal{L}_n(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)},$$

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$ je maximálně věrohodný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}_X$ (bez předpokladu o platnosti nulové hypotézy) a $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathcal{L}_n(\boldsymbol{\theta})$ je maximálně věrohodný odhad za předpokladu platnosti nulové hypotézy.

V praxi se pak zpravidla používá testová statistika

$$LR_n = 2 \log \tilde{T}_n = 2(L_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L_n(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)),$$

protože za jistých předpokladů regularity (viz přednáška) má tato statistika za platnosti nulové hypotézy asymptoticky χ^2 -rozdělení o $\dim(\Theta) - \dim(\Theta_0)$ stupních volnosti.

Jednorozměrný parametr. Uvažujme $\theta_X \in \mathbb{R}$ a test hypotézy

$$H_0 : \theta_X = \theta_0, \quad H_1 : \theta_X \neq \theta_0.$$

V tomto případě má testová statistika tvar

$$LR_n = 2(L_n(\hat{\theta}_n) - L_n(\theta_0)),$$

a za platnosti nulové hypotézy má asymptoticky χ^2 -rozdělení o jednom stupni volnosti.

Příklad 75. Poissonovo rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ .

- (i) Najděte nejsilnější test hypotézy

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda_X = \lambda_1,$$

kde $\lambda_1 > \lambda_0$. Závísí tento test na konkrétní hodnotě λ_1 ?

- (ii) Jak by se test z (i) změnil, pokud by platilo, že $\lambda_1 < \lambda_0$?
- (iii) Odhadněte λ metodou maximální věrohodnosti a na základě asymptotického rozdělení tohoto odhadu sestavte test hypotéz

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda_X \neq \lambda_0.$$

- (iv) Pro hypotézy v (iii) sestavte test poměrem věrohodnosti.

Příklad 76. Alternativní rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p .

- (i) Najděte nejsilnější test hypotézy

$$H_0 : p_X = p_0, \quad H_1 : p_X = p_1,$$

Kde $p_1 > p_0$. Závísí tento test na konkrétní hodnotě p_1 ?

- (ii) Jak by se test z (i) změnil, pokud by platilo, že $p_1 < p_0$?
- (iii) Odhadněte parametr p metodou maximální věrohodnosti, odvoďte jeho rozdělení a sestavte test hypotéz

$$H_0 : p_X = p_0, \quad H_1 : p_X \neq p_0.$$

- (iv) Pro hypotézy v (iii) sestavte test poměrem věrohodnosti.

Příklad 77. Exponenciální rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}\{x > 0\}$.

- (i) Najděte nejsilnější test hypotézy

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda_X = \lambda_1,$$

kde $\lambda_1 > \lambda_0$. Závísí tento test na konkrétní hodnotě λ_1 ?

- (ii) Jak by se test z (i) změnil, pokud by platilo, že $\lambda_1 < \lambda_0$?
- (iii) Odhadněte λ metodou maximální věrohodnosti, odvoďte jeho asymptotické rozdělení a sestavte test hypotéz

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda_X \neq \lambda_0.$$

- (iv) Pro hypotézy v (iii) sestavte test poměrem věrohodnosti.

Příklad 78. Normální rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

- (i) Sestavte test poměrem věrohodnosti pro hypotézy

$$H_0 : \mu_X = \mu_0, \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_0.$$

Porovnejte tento test s (přesným) jednovýběrovým t -testem.

- (ii) Sestavte test poměrem věrohodnosti pro hypotézy

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_0^2.$$

Porovnejte tento test s přesným testem založeným na statistice $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}$.

- (iii) Sestavte test poměrem věrohodnosti pro hypotézy

$$H_0 : (\mu_X, \sigma_X^2)^\top = (\mu_0, \sigma_0^2)^\top, \quad H_1 : (\mu_X, \sigma_X^2)^\top \neq (\mu_0, \sigma_0^2)^\top.$$

Příklad 79. Multinomické rozdělení

Níže uvedená tabulka zachycuje počet živě narozených dětí v ČR v roce 2008 dle čtvrtletí.

Čtvrtletí	1	2	3	4
Počet	28 737	30 871	31 915	28 047

- (i) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte je pro všechna čtvrtletí stejná?

Příklad 80. Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium

V nějaké populaci se určitý gen vyskytuje ve dvou variantách (alelách) A (např. tmavé oči) a a (např. světlé oči). Mezi všemi geny v celé populaci tvoří alela A podíl $\theta_X \in (0, 1)$ a alela a podíl $1 - \theta_X$. Každý jedinec má dva exempláře příslušného genu (jeden po otci, jeden po matce). Pokud se geny míchají nezávisle (platí tzv. Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium), pravděpodobnosti tří možných variant genotypu jedince jsou:

Genotyp	Pravděpodobnost
AA	θ_X^2
Aa	$2\theta_X(1 - \theta_X)$
aa	$(1 - \theta_X)^2$

Pozorujeme genotypy n nezávislých jedinců a označíme X_1, X_2, X_3 počty jedinců s genotypem (po řadě) AA, Aa, aa . Platí-li Hardyho-Weinbergovo ekvilibrium, pak vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$ má rozdělení $\text{Mult}_3(n, \mathbf{p}(\theta_X))$, kde $\mathbf{p}(\theta_X) = (\theta_X^2, 2\theta_X(1 - \theta_X), (1 - \theta_X)^2)^\top$. Na základě pozorování \mathbf{X} testujte, zdali se populace nachází v Hardyho-Weinbergově ekvilibriu.

Příklad 81. Model poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(\mathbf{X}_1^\top, Y_1)^\top, \dots, (\mathbf{X}_n^\top, Y_n)^\top$, kde \mathbf{X}_1 je q -rozměrný náhodný vektor. Nechť naše pozorování splňují model

$$P(Y_1 = k | \mathbf{X}_1) = \frac{[\lambda(\mathbf{X}_1)]^k e^{-\lambda(\mathbf{X}_1)}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\lambda(\mathbf{x}) = \exp\{\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}\}$ a rozdělení \mathbf{X}_1 nezávisí na neznámém parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_q)^\top$.

- (i) Sestavte test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}_q$ proti alternativě, že $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}_q$.
- (ii) Proveďte test pro následující data, kde Y_i je počet bakterií, X_{i1} je množství světla a X_{i2} teplota.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X_{1i}	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4
X_{2i}	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4
Y_i	1	0	1	0	2	1	1	4	3	4	4

Příklad 82. Pruská armáda a Poissonovo rozdělení

Následující tabulka udává počet úmrtí v důsledku kopnutí koně v deseti sborech pruské armády v rámci 20 let.

Počet úmrtí	0	1	2	3	4	5 a více
Pozorovaná četnost	109	65	22	3	1	0

Dá se počet úmrtí v důsledku kopnutí koně (v jednom sboru za jeden rok) považovat za náhodný výběr z Poissonova rozdělení?

Příklad 83. Barva očí

Následující tabulka udává barvu očí otců a synů, kde
 SM ... světle modrá,
 MZ nebo Š ... modrozelená nebo šedá
 TŠ nebo SH ... tmavě šedá nebo světle hněda
 TH ... tmavě hnědá

Syn	Otec			
	SM	MZ nebo Š	TŠ nebo SH	TH
SM	194	70	41	30
MZ nebo Š	83	124	41	36
TŠ nebo SH	25	34	55	23
TH	6	36	43	109

- (i) Otestujte, že barva očí u synů a otců je nezávislá.
- (ii) Otestujte hypotézu symetrie, tj. že pro pravděpodobnosti v tabulce platí $p_{ij} = p_{ji}$ pro všechna i, j .

9 Metoda maximální věrohodnosti - asymptotické testy (bez rušivých parametrů)

Asymptotické testy pro vektorový parametr

Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ je neznámý parametr. Nulovou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X = \boldsymbol{\theta}_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta}_X \neq \boldsymbol{\theta}_0$ můžeme testovat pomocí Waldova testu, Raova skórového testu nebo testu poměrem věrohodnosti.

Podobně jako dříve označme $L_n(\boldsymbol{\theta})$ logaritmicovou věrohodnost a $\mathbf{U}_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ derivaci logaritmicové věrohodnosti. Dále nechť $\hat{\mathbf{J}}$ je za nulové hypotézy konzistentní odhad $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}_0)$. Definujme následující testové statistiky

$$\begin{aligned} W_n &= n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0)^\top \hat{\mathbf{J}} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}_0) && \text{(Waldův test),} \\ R_n &= \frac{1}{n} [\mathbf{U}_n(\boldsymbol{\theta}_0)]^\top \hat{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{U}_n(\boldsymbol{\theta}_0) && \text{(Raův skórový test),} \\ LR_n &= 2(L_n(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L_n(\boldsymbol{\theta}_0)) && \text{(Test poměrem věrohodnosti).} \end{aligned}$$

Ve Waldově testu se jako odhad $\hat{\mathbf{J}}$ používá $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ nebo empirická Fisherova informační matice v bodě $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$, viz (6). Na druhou stranu v Raově skórovém testu se používá zpravidla $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}_0)$ nebo empirická Fisherova informační matice v bodě $\boldsymbol{\theta}_0$. Tato volba má výhodu v tom, že můžeme provést test, aniž bychom potřebovali spočítat $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$.

Test poměrem věrohodnosti nevyžaduje odhad (a ani výpočet) Fisherovy informační matice.

Pokud platí určité předpoklady regularity (viz např. kapitola 7.6.5 knihy [Anděl, 2011](#)), pak za platnosti nulové hypotézy mají všechny tři výše uvedené statistiky asymptoticky χ^2 -rozdělení o p stupních volnosti. Proti nulové hypotéze svědčí velké hodnoty testových statistik, tudíž zamítáme pokud příslušná testová statistika překročí $(1 - \alpha)$ -kvantil χ^2 -rozdělení o p stupních volnosti.

Jednorozměrný parametr θ

Pro test $H_0 : \theta_X = \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta_X \neq \theta_0$ můžeme tedy použít

$$\begin{aligned} W_n &= n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 \hat{J} && \text{(Waldův test),} \\ R_n &= \frac{[\mathbf{U}_n(\theta_0)]^2}{n \hat{J}} && \text{(Raův skórový test),} \\ LR_n &= 2(L_n(\hat{\theta}_n) - L_n(\theta_0)) && \text{(Test poměrem věrohodnosti).} \end{aligned}$$

Za platnosti nulové hypotézy pak mají všechny výše uvedené testové statistiky (za platnosti jistých předpokladů regularity) asymptoticky χ^2 -rozdělení o 1 stupni volnosti.

Jednostranné testy

Testujme nyní $H_0 : \theta_X \leq \theta_0$ proti alternativě $H_1 : \theta_X > \theta_0$. V tomto případě je nejjednodušší využít přirozenou modifikaci Waldova testu, která vede ke kritickému oboru

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \sqrt{\hat{J}} \geq u_{1-\alpha}.$$

Příklad 84. Alternativní rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z alternativního rozdělení, tj.

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1 - p.$$

- (i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $p = p_0$ proti oboustranné alternativě $p_X \neq p_0$.

Příklad 85. Poissonovo rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení, tj.

$$P(X_i = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\lambda_X = \lambda_0$ proti oboustranné alternativě $\lambda_X \neq \lambda_0$.

Příklad 86. Podmíněné Poissonovo rozdělení

Následující tabulka zachycuje počet úrazů v dané továrně během určitého období. Jelikož se do úrazové evidence dostali pouze ti, kteří měli alespoň jeden úraz, tak počet zaměstnanců, kteří neměli žádný úraz je neznámý.

Počet úrazů	1	2	3	4	5
Počet zaměstnanců	2039	312	35	3	1

Předpokládáme, že počet úrazů pro zaměstnance, který měl alespoň jeden úraz se řídí rozdělením

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- (i) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu parametru λ .
(ii) Najděte maximálně věrohodný odhad pravděpodobnosti, že daný zaměstnanec nemá žádný úraz a odvoďte asymptotické rozdělení tohoto odhadu.
(iii) V minulém období nemělo 75 % zaměstnanců během daného období žádný úraz. Můžeme říct, že i letošní data jsou v souladu s tímto tvrzením?
(iv) Jaký podíl zaměstnanců bez úrazu by byl v souladu s našimi daty?

Příklad 87. Exponenciální rozdělení

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$.

- (i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\lambda_X = \lambda_0$ proti oboustranné alternativě $\lambda_X \neq \lambda_0$.

Příklad 88. Geometrické rozdělení

Uvažujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny X_1, \dots, X_n z geometrického rozdělení tj.

$$P(X_i = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

kde $p \in (0, 1)$ je neznámý parametr.

- (i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $p_X = p_0$ proti oboustranné alternativě $p_X \neq p_0$.

Příklad 89. Regrese v exponenciálním rozdělení

Nechť $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory a podmíněné rozdělení Y při daném X je dáno hustotou

$$f_{Y|X}(y|x; \beta) = \beta x \exp\{-\beta x y\} \mathbb{I}\{y > 0\},$$

kde $\beta > 0$ je neznámý parametr. Dále předpokládejme, že hustota rozdělení X (vzhledem k nějaké σ -konečné míře μ) nezávisí na β .

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr β .
(ii) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro nulovou hypotézu, že $\beta_X = \beta_0$ proti oboustranné alternativě $\beta_X \neq \beta_0$.

Příklad 90. Model jednoduché poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$, které splňují

$$P(Y_1 = k | X_1) = \frac{[\lambda(X_1)]^k e^{-\lambda(X_1)}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\lambda(x) = \exp\{\beta x\}$ a rozdělení X_1 nezávisí na neznámém parametru β .

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad pro parametrickou funkci e^β .
(ii) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\beta_X = \beta_0$ proti oboustranné alternativě $\beta_X \neq \beta_0$.
(iii) Sestavte interval spolehlivosti pro β .
(iv) Sestavte interval spolehlivosti pro e^β .

Příklad 91. Logistické rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z logistického rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1 + e^{-(x-\theta)})^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{kde } \theta \in \mathbb{R}.$$

- (i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $\theta_X = \theta_0$ proti oboustranné alternativě $\theta_X \neq \theta_0$.

Příklad 92. Normální rozdělení

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$.

- (i) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $(\mu, \sigma^2)^\top = (0, 1)^\top$ proti $(\mu, \sigma^2)^\top \neq (0, 1)^\top$.

Příklad 93. Současný odhad obou parametrů v lognormálním rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2)^\top$ vektorového parametru $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\top$.
(ii) Odvoďte asymptotické rozdělení odhadu z (i).
(iii) Sestavte asymptotickou konfidenční množinu pro parametr $\boldsymbol{\theta}_X = (\mu_X, \sigma_X^2)^\top$.
(iv) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $(\mu_X, \sigma_X)^\top = (0, 1)^\top$ proti $(\mu_X, \sigma_X)^\top \neq (0, 1)^\top$.

Příklad 94. Model paraboly procházející počátkem

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ takové, že $Y_i | X_i$ má normální rozdělení $\mathbf{N}(\beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2, 1)$ a rozdělení X_i nezávisí na parametrech β_1, β_2 .

- (i) Najděte Raův skórový test nulové hypotézy $H_0 : (\beta_1, \beta_2)^\top = (0, 0)^\top$ proti alternativě, že $H_1 : (\beta_1, \beta_2)^\top \neq (0, 0)^\top$.

Příklad 95. $Y|N$ je binomické

Uvažujme nezávislé a stejně rozdělené náhodné vektory $(Y_1, N_1)^\top, \dots, (Y_n, N_n)^\top$ z diskrétního rozdělení

$$P(Y_1 = i, N_1 = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!},$$

pro $j = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, j$ a $\lambda > 0$.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru $(p, \lambda)^\top$.
(ii) Najděte asymptotické rozdělení odhadu z (i).
(iii) Sestavte Waldův test, Raův skórový test a test poměrem věrohodnosti pro test nulové hypotézy, že $(p_X, \lambda_X)^\top = (p_0, \lambda_0)^\top$ proti oboustranné alternativě $(p_X, \lambda_X)^\top \neq (p_0, \lambda_0)^\top$.

10 Metoda maximální věrohodnosti - asymptotické testy s rušivými parametry

Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$ (vzhledem k nějaké σ -konečné míře μ), kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ je neznámý parametr a $\boldsymbol{\theta}_X$ je jeho skutečná hodnota. Často je naším cílem testovat nulovou hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\theta}_X \in \Theta_0$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \setminus \Theta_0$, kde Θ_0 je podmnožina parametrického prostoru Θ . Test poměrem věrohodnosti pro tuto situaci lze psát ve tvaru

$$LR_n^* = 2 (L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) - L_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n)), \quad (11)$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ je maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy, tj.

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} L_n(\boldsymbol{\theta}).$$

Za platnosti nulové hypotézy a předpokladů regularity platí, že statistika LR_n^* má asymptoticky χ^2 -rozdělení o stupních volnosti $\dim(\Theta) - \dim(\Theta_0)$.

Za povšimnutí stojí také, že na rozdíl od testů uvedených dále, test poměrem věrohodnosti nevyžaduje odhad (a ani výpočet) Fisherovy informační matice.

V následujícím se zaměříme na speciální případ, kdy chceme testovat jenom q složek ($1 \leq q < p$) vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se jedná o prvních q složek vektoru $\boldsymbol{\theta}$ (jinak si složky můžeme přeuspořádat). Tyto složky si označíme jako $\boldsymbol{\tau}$. Zbýlých $p - q$ složek označíme jako $\boldsymbol{\psi}$ a budeme je označovat jako rušivé parametry. Tj. můžeme psát $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi})$ a testujeme

$$H_0 : \boldsymbol{\tau}_X = \boldsymbol{\tau}_0 \text{ proti alternativě } H_1 : \boldsymbol{\tau}_X \neq \boldsymbol{\tau}_0, \quad (12)$$

kde $\boldsymbol{\psi}$ může být libovolné.

Označme $\widehat{\boldsymbol{\tau}}_n$ prvních q složek maximálně věrohodného odhadu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ a uvědomme si, že v tomto případě lze maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ psát ve tvaru

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n = (\boldsymbol{\tau}_0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_n), \quad \text{kde } \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_n = \arg \max_{\boldsymbol{\psi}} L_n(\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\psi}).$$

Nechť $\mathbf{U}_{n,1}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial L_n(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ a $\widehat{\mathbf{J}}$ je odhad Fisherovy informační matice v jedné veličině \mathbf{X}_1 , který je konzistentní za nulové hypotézy.

Pro testování hypotéz (12) pak můžeme využít test poměrem věrohodnosti (11) nebo některý z následujících testů

$$W_n^* = n (\widehat{\boldsymbol{\tau}}_n - \boldsymbol{\tau}_0)^\top [\widehat{\mathbf{J}}^{11}]^{-1} (\widehat{\boldsymbol{\tau}}_n - \boldsymbol{\tau}_0), \quad (\text{Waldův test}),$$

$$R_n^* = \frac{1}{n} \mathbf{U}_{n,1}^\top(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) \widehat{\mathbf{J}}^{11} \mathbf{U}_{n,1}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n), \quad (\text{Raův skórový test}),$$

kde $\widehat{\mathbf{J}}^{11}$ je levý horní (q, q) -blok matice $\widehat{\mathbf{J}}^{-1}$ (tj. inverze odhadu Fisherovy informační matice). Všechny testové statistiky mají za platnosti nulové hypotézy asymptoticky χ^2 -rozdělení o q stupních volnosti.

Jednorozměrné τ_X (tj. $q = 1$). Často je parametr, který chceme testovat jednorozměrný. V tomto případě je pro Waldův test přirozené používat testovou statistiku $\frac{\sqrt{n}(\widehat{\tau}_n - \tau_0)}{\sqrt{\widehat{J}^{11}}}$, kde \widehat{J}^{11} je první

diagonální prvek matice $\widehat{\mathbf{J}}^{-1}$. Výhodou této testové statistiky je, že se dá snadno využít i pro testování jednostranných hypotéz.

Odhad Fisherovy informační matice. Jako $\widehat{\mathbf{J}}$ se ve Waldově testu nejčastěji používá

$$\widehat{\mathbf{J}} = \mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n) \quad \text{nebo} \quad \widehat{\mathbf{J}} = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}.$$

V Raově skórovém testu se pak nejčastěji používá

$$\widehat{\mathbf{J}} = \mathbf{J}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n) \quad \text{nebo} \quad \widehat{\mathbf{J}} = -\frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n}.$$

Příklad 96. Normální rozdělení

Uvažujme náhodný výběr $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde oba parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé. Příslušná hustota rozdělení má tvar

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ proti alternativě $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Příklad 97. Lognormální rozdělení

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z lognormálního rozdělení s hustotou

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ proti alternativě $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Příklad 98. $Y|N$ je binomické

Předpokládejme, že náhodný výběr $(Y_1, N_1)^\top, \dots, (Y_n, N_n)^\top$ je generován z diskrétního rozdělení

$$P(Y_1 = i, N_1 = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots; i = 0, 1, \dots, j.$$

- (i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : p = p_0$ proti alternativě $H_1 : p \neq p_0$.

Příklad 99. Multinomické rozdělení

Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory s multinomickým rozdělením $\text{Mult}_4(1; p_1, p_2, p_3, p_4)$, kde

$$P(\mathbf{X}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)) = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3} \cdot p_4^{x_4},$$

kde

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad 0 < p_i < 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

a platí, že

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

- (i) Sestavte test poměrem věrohodnosti a Waldův test hypotézy $H_0 : p_1 = \frac{1}{4}$ proti alternativě $H_1 : p_1 \neq \frac{1}{4}$.
- (ii) Jak by vypadal test poměrem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : p_1 = p_2$ proti alternativě $H_1 : p_1 \neq p_2$?
- (iii) Jak by vypadal test poměrem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : p_3 = 1.1 p_1$ proti alternativě $H_1 : p_3 \neq 1.1 p_1$?

Příklad 100. Multinomické rozdělení

Níže uvedená tabulka zachycuje počet živě narozených dětí v ČR v roce 2008 dle čtvrtletí.

Čtvrtletí	1	2	3	4
Počet	28 737	30 871	31 915	28 047

Na základě testů odvozených v příkladu 99 zodpovězte následující otázky.

- (i) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte v prvním čtvrtletí je $\frac{1}{4}$?
- (ii) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte v prvním čtvrtletí je stejná jako pravděpodobnost narození dítěte ve druhém čtvrtletí?
- (iii) Je udržitelné tvrzení, že pravděpodobnost narození dítěte ve třetím čtvrtletí je o 10 procent (tj. 1.1-krát) větší než pravděpodobnost narození dítěte v prvním čtvrtletí?

Příklad 101. Lineární model přímky

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ takové, že podmíněné rozdělení $Y_i | X_i$ je normální rozdělení $N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$ a X_i má rozdělení s hustotou $f_X(x)$, která nezávisí na neznámých parametrech β_0 , β_1 a σ^2 .

- (i) Najděte test poměrem věrohodnosti nulové hypotézy $H_0 : \beta_1 = 0$ proti alternativě, že $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

Příklad 102. Regrese v exponenciálním rozdělení

Nechť náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory. Y_1 za podmínky $X_1 = x$ má exponenciální rozdělení s hustotou

$$f_{Y|X}(y|x; \alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta, x) \exp\{-\lambda(\alpha, \beta, x)y\} \mathbb{I}\{y > 0\},$$

kde $\lambda(\alpha, \beta, x) = e^{\alpha + \beta x}$ a α, β jsou neznámé parametry. Dále předpokládejme, že rozdělení X_1 nezávisí na parametrech α a β .

- (i) Sestavte test poměrem věrohodnosti, Raův skórový test a Waldův test hypotézy nulové hypotézy $\beta = 0$ proti oboustranné alternativě $\beta \neq 0$.
- (ii) Sestavte dolní intervalový odhad pro parametr β .
- (iii) Sestavte intervalový odhad pro parametr $\theta = e^\beta$.

Y může v tomto případě například značit dobu do poruchy určité součástky a X maximální teplotu, které bylo dosaženo při výrobním procesu této součástky. Povšimněte si, že za nulové hypotézy jsou X a Y nezávislé.

Příklad 103. Test symetrie v tabulce 2x2

Nechť náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ jsou nezávislé náhodné vektory z následujícího dvou-rozměrného rozdělení

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0, Y_1 = 0) &= p_{00}, & P(X_1 = 1, Y_1 = 0) &= p_{10}, \\ P(X_1 = 0, Y_1 = 1) &= p_{01}, & P(X_1 = 1, Y_1 = 1) &= p_{11}, \end{aligned}$$

kde $p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11} = 1$ a $p_{ij} \in (0, 1)$ pro všechna $k, j \in \{0, 1\}$.

- (i) Sestavte test poměrem věrohodnosti nulové hypotézy $H_0 : p_{01} = p_{10}$ proti oboustranné alternativě $H_1 : p_{01} \neq p_{10}$.

Příklad 104. Model poissonovské regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(\mathbf{X}_1^\top, Y_1)^\top, \dots, (\mathbf{X}_n^\top, Y_n)^\top$, kde \mathbf{X}_1 je q -rozměrný náhodný vektor. Nechť naše pozorování splňují model

$$P(Y_1 = k | \mathbf{X}_1) = \frac{[\lambda(\mathbf{X}_1)]^k e^{-\lambda(\mathbf{X}_1)}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\lambda(\mathbf{x}) = \exp\{\alpha + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{x}\}$ a rozdělení \mathbf{X}_1 nezávisí na neznámém parametru $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_q)^\top$.

- (i) Sestavte Raův skórový test a Waldův test hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}_q$ proti alternativě, že $H_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}_q$.
- (ii) Proveďte test numericky pro data z (ii) z příkladu 81. Spočítejte také intervalový odhad o spolehlivosti 0.95 pro parametr β_1 .

Příklad 105. Model jednoduché logistické regrese

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$, kde

$$P(Y_1 = 1 | X_1) = \frac{\exp\{\alpha + \beta X_1\}}{1 + \exp\{\alpha + \beta X_1\}}, \quad P(Y_1 = 0 | X_1) = \frac{1}{1 + \exp\{\alpha + \beta X_1\}},$$

a rozdělení X_1 nezávisí na neznámých parametrech α a β .

- (i) Sestavte test nulové hypotézy $H_0 : \beta = 0$ proti alternativě, že $H_1 : \beta \neq 0$.
- (ii) Spočítejte p -hodnotu na základě dat v tabulce, kde X_i je hmotnost a Y_i je indikátor, zda dotyčný má vysoký tlak. Spočítejte také interval spolehlivosti pro parametr β .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	70	85	76	59	92	102	65	87	73	102
Y_i	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1

11 Další příklady na teorii maximální věrohodnosti

Příklad 106. Minimální životnost

Mějme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\lambda > 0$. Na základě znalosti pouze $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ najděte maximálně věrohodný odhad parametru λ . Je tento odhad konzistentní?

Příklad 107. Rovnoměrné rozdělení v \mathbb{R}^2

Uvažujte, že pozorujete nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ z nějakého rozdělení F .

- (i) Odhadněte parametr θ za předpokladu, že F je rovnoměrné rozdělení na kruhu se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem θ .
- (ii) Odhadněte parametr θ za předpokladu, že F je rovnoměrné rozdělení na čtverci $(-\theta, \theta)^2$.

Příklad 108. Odhad pravděpodobnosti narození chlapce

(A) Mějme následující informaci o počtu chlapců v rodinách s dvěma dětmi.

počet chlapců k	0	1	2
počet rodin $n_k^{(2)}$	42 860	89 213	47 819

Odhadněte pravděpodobnost narození chlapce v této populaci metodou maximální věrohodnosti za předpokladu, že rozdělení počtu chlapců v rodině se řídí binomickým rozdělením.

(B) Jak se odhad změní, máme-li k dispozici informaci o počtu chlapců v rodinách s dvěma, respektive s šesti, dětmi, a chceme využít informaci o všech dostupných datech. Předpokládejte opět, že rozdělení počtu chlapců se řídí binomickým rozdělením.

počet chlapců k	0	1	2	3	4	5	6
počet rodin $n_k^{(2)}$	42 860	89 213	47 819				
počet rodin $n_k^{(6)}$	1 096	6 233	15 700	22 221	17 332	7 908	1 579

Zformulujte model, sestavte věrohodnostní funkci a napište, jak byste ji řešili.

Pozn. Index $\{\dots\}^{(2)}$, resp. $\{\dots\}^{(6)}$, značí, zda se data týkají rodin se dvěma, resp. šesti, dětmi.

Reference

Anděl, J. (2011). *Základy matematické statistiky*. MatfyzPress.

12 Výsledky některých příkladů

Příklad 1

(i) $E(XY | X = x) = \frac{x(3x+2)}{3(2x+1)}$, pro $x \in (0, 1)$.

Příklad 2

- (i) $E\left[\frac{Y}{X^2} | X\right] = 2X$.
(ii) $E\frac{Y}{X^2} = 1$.
(iii) $EY = \frac{1}{4}$.
(iv) $\text{var}(Y) = \frac{37}{28}$.

Příklad 3

- (i) $E(Y | X = t) = t$ pro $t \in (1, 2)$ a $E(Y | X) = X$.
(ii) $E\left(Y \mid \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right) = t\right) = \frac{2\exp\{t\}+1}{\exp\{t\}+1}$ pro $t \in (-\infty, \infty)$ a $E\left(Y \mid \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right)\right) = X$.
(iii) $E\left[\frac{Y}{X^6} \mid \log\left(\frac{X-1}{2-X}\right)\right] = \frac{1}{X^5}$.

Příklad 4

(i) $E\left[911X - \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right) \mid Y\right] = 911\left(Y + \frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{Y}{1-Y}\right)$

Příklad 5

- (i) $E(X + Y | X) = X + EY$.
(ii) $E(X + Y | X) = X + E(Y | X)$.
(iii) $E(X | X + Y) = \frac{X+Y}{2}$.

Příklad 6

- (i) $E[Y | \exp\{X\}] = \frac{X^2+1}{2}$.
(ii) $EY = 1$.
(iii) $\text{var}(Y) = 1$.

Příklad 9

- (i) $E(X_1 | X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1$.
- (ii) $E(X_1 | X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- (iii) $E(h_1(X_1) | X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_1(X_{(i)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_1(X_i)$.
- (iv) $E(h_2(X_1, X_2) | X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum \sum_{i \neq j} h_2(X_i, X_j)$.
- (v) $E(h_2(X_1, X_2) | X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum \sum_{i < j} h_2(X_i, X_j)$.

Příklad 10

- (i) $J(\theta) = \frac{2}{1+\rho}$.

Příklad 11

- (i) $J(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.
- (ii) $J_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$.
- (iii) $\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ je nestranným odhadem parametrické funkce $g(\lambda) = 2\lambda$ a dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze (tj. je eficientní).
- (iv) Odhad $(1 - \frac{1}{n})^{\sum_{i=1}^n X_i}$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.

Příklad 13

- (i) $J(\sigma) = \frac{2}{\sigma^2}$.
- (ii) $J(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}$.

Příklad 14

- (i) Odhad S_n^2 nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze (dosahuje jí však asymptoticky).
- (ii) Odhad T_n dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iii) Odhad $\hat{\sigma}_n$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iv) $c = \frac{\sqrt{n} \Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\frac{n+1}{2})}$. Odhad $\tilde{\sigma}_n$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze (dosahuje jí však asymptoticky).

Příklad 15

- (iii) Systém hustot není regulární.

Příklad 16

Odhad \hat{p}_n je nestranný a dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.

Příklad 17

- (i) Odhad je nestranný pro $c = \frac{1}{2n}$.
- (ii) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.

Příklad 18

- (ii) Odhad $T_3(\mathbf{X})$ nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze. Ta je v tomto případě $\frac{\mu^2}{3n}$. Nicméně eficeince (tj. podíl Raovy-Cramérový meze a rozptylu odhadu $T_3(\mathbf{X})$) se blíží s rostoucím rozsahem výběru k jedné, viz následující tabulka:

n	10	50	100	200	300
Eficeince	0.918	0.983	0.992	0.996	0.997

Příklad 19

- (i) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$
- (ii) Odhad dosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iii) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.
- (iv) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.

Příklad 21

- (i) Systém hustot není regulární.

Příklad 23

- (i) Dolní Raova-Cramérová mez je $\frac{2\sigma^4}{n_1+n_2}$.
- (ii) Odhad nedosahuje dolní Raovy-Cramérový meze.

Příklad 40

- (i) Pro $\rho < 1$ není \bar{X}_n nejlepší nestranný odhad parametru θ .
- (ii) $\frac{1}{2}(\bar{X}_n + \bar{Y}_n)$ je nejlepší nestranný odhad parametru θ .

Příklad 28

- (i) \mathbf{X} je postačující.
- (ii) $(|X_1|, \dots, |X_n|)^\top$ je postačující.
- (iii) $\sum_{i=1}^n X_i$ není postačující.
- (iv) $\sum_{i=1}^n |X_i|$ není postačující.
- (v) $\sum_{i=1}^n X_i^2$ je postačující.
- (vi) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ je postačující.
- (vii) $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2, X_n^2)^\top$ je postačující.

Příklad 30

- (i) $S(\mathbf{X}) = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)^\top$

Příklad 34

- (i) $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)^\top$
- (ii) Statistika z (i) není úplná.

Příklad 37

- (i) $(\sum_{i=1}^n \log(X_i), \sum_{i=1}^n \log(1 - X_i))^\top$

Příklad 38

- (ii) Uvažte statistiku $S_X^2 - S_Y^2$.

Příklad 39

- (i) $(\sum_{i=1}^n X_i, X_{(n)})^\top$

Příklad 41

- (ii) $\frac{1 - \frac{1}{n}}{(\bar{X}_n + 1 - \frac{1}{n})}$
- (iii) Ano.
- (iv) $\frac{\bar{X}_n(1 - \frac{1}{n})}{(\bar{X}_n + 1 - \frac{1}{n})(\bar{X}_n + 1 - \frac{2}{n})}$

Příklad 43

- (i) \bar{X}_n .
- (ii) $\frac{n}{n-1} \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$.

Příklad 44

- (i) \bar{X}_n .
- (ii) $(1 - \frac{1}{n})^{\sum_{i=1}^n X_i}$.

Příklad 45

- (iii) Ne, protože není funkcí úplné postačující statistiky.
- (v) $(\bar{X}_n)^2 - \frac{S_n^2}{n}$.

Příklad 46

Viz Příklad 7.57 z knihy [Anděl \(2011\)](#).

Příklad 47

- (i) $\hat{\delta}_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i - \frac{1}{n\lambda}$

Příklad 48

(i) $\hat{\lambda}_n = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$

Příklad 49

- (i) Odhad $\tilde{\theta}_n = 2\bar{X}_n$ je sice nestranný, ale není nejlepší nestranný.
(ii) $\frac{n+1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.
(iii) Systém hustot není regulární.

Příklad 50

- (i) $\mathbf{T} = (\sum_{i=1}^n X_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^n X_{(K-1)i})^\top$
(ii) $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n X_{1i} \sum_{i=1}^n X_{2i}$

Příklad 51

- (i) $\hat{p}_n = \bar{X}_n$.
(ii) Dle Zehnaova principu invariance je maximálně věrohodným odhadem $\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$, $\sqrt{n}(\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) - p(1 - p)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}((0, (1 - 2p)^2 p(1 - p)))$
(iii) $\text{avar}(\hat{p}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$, $\text{avar}(\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)) = \frac{(1-2p)^2 p(1-p)}{n}$, což odpovídá příslušným Raovým-Cramérovým dolním mezím pro nejlepší nestranné odhady.
Za povšimnutí však stojí, že zatímco \hat{p}_n příslušné dolní meze dosahuje, protože je nestranný a jeho skutečný (nikoliv pouze asymptotický) rozptyl splňuje $\text{var}(\hat{p}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$, tak odhad $\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)$ není ani nestranný.

Příklad 52

- (i) \bar{X}_n .
(ii) Maximálně věrohodný odhad je $e^{-\bar{X}_n}$, přičemž platí

$$\sqrt{n}(e^{-\bar{X}_n} - e^{-\lambda}) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \lambda e^{-2\lambda}),$$

- (iii) Nejlepší nestranný odhady λ a $e^{-\lambda}$ jsou \bar{X}_n a $(1 - \frac{1}{n})^{\sum_{i=1}^n X_i}$. Dolní Raova-Cramérova mez odpovídá asymptotickému rozptylu odhadů.

Příklad 53

- (i) $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$
(ii) $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \lambda^2)$

Příklad 54

- (i) $\hat{p}_n = \frac{1}{1 + \bar{X}_n}$, $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}(0, p^2(1 - p))$
(ii) $\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) = \frac{\bar{X}_n}{(1 + \bar{X}_n)^2}$, $\sqrt{n}(\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n) - p(1 - p)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}(0, (1 - 2p)^2 p^2(1 - p))$

Příklad 55

(i) Maximálně věrohodným odhadem je kterákoliv hodnota z intervalu

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i - \frac{1}{2}, \min_{1 \leq i \leq n} X_i + \frac{1}{2} \right).$$

(ii) Odhad z (i) je konzistentní, neboť $\max_{1 \leq i \leq n} X_i \xrightarrow{P} \theta + \frac{1}{2}$ a $\min_{1 \leq i \leq n} X_i \xrightarrow{P} \theta - \frac{1}{2}$ pro $n \rightarrow \infty$.

Příklad 56

(i) $\widehat{M}_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(ii) Je třeba dokazovat z definice.

Příklad 57

(i) $\widehat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Příklad 59

(i) Viz Příklad 7.99 z knihy [Anděl \(2011\)](#).

(ii) $J(\theta) = \frac{1}{\theta^2} + \mathbb{E} X^\theta \log^2(X) = \frac{1}{\theta^2} (1 + \int_0^\infty y^2 \log^2(y) e^{-y} dy)$.

Příklad 60

(i) Viz Příklad 7.96 z knihy [Anděl \(2011\)](#).

(ii) $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, 3)$.

Příklad 61

(i)

$$\widehat{\theta}_n = -\frac{\overline{X}_n}{2} + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{\overline{X}_n^2}{4}}.$$

Příklad 62

(i) Maximálně věrohodný odhad je dán implicitně jako řešení rovnice $\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - e^{\widehat{\beta}_n X}) \stackrel{!}{=} 0$.

(ii) $J(\beta) = \mathbb{E} X^2 e^{\beta X}$.

Příklad 63

(i) $\widehat{p}_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \neq 0\}$

(ii) $\sqrt{n}(\widehat{p}_n - p_X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}(0, \frac{p}{2}(1 - 2p))$

Příklad 64

(i) Viz Příklad 7.57 z knihy [Anděl \(2011\)](#).

Příklad 65

(i) $\hat{\theta}_n = (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2)^\top = (\bar{X}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2)^\top$.

(ii)

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_n \\ \hat{\sigma}_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2, 0 \\ 0, 2\sigma^4 \end{pmatrix} \right)$$

(iii) Asymptotický interval spolehlivosti na základě obecné teorie maximálně věrohodných odhadů je $(\bar{X}_n \mp \frac{u_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}})$. Přesný interval spolehlivosti pak je $(\bar{X}_n \mp \frac{t_{n-1}(1-\alpha/2) S_n}{\sqrt{n}})$, kde $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_n^2$.

(iv)

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_n + u_\alpha \hat{\sigma}_n - (\mu + u_\alpha \sigma)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N} \left(0, \sigma^2 \left(1 + \frac{u_\alpha^2}{2} \right) \right),$$

přičemž asymptotický rozptyl $\sigma^2(1 + u_\alpha^2/2)$ představuje dolní Raovu-Cramérovu mez pro odhad parametrické funkce $g(\mu, \sigma^2) = \mu + u_\alpha \sigma$.

Příklad 66

Položme $Y_i = \log X_i$.

(i) $\hat{\theta}_n = (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2)^\top = (\bar{Y}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)^2)^\top$.

(ii)

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_n \\ \hat{\sigma}_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2, 0 \\ 0, 2\sigma^4 \end{pmatrix} \right)$$

(iii) Asymptotická konfidenční množina pro parametr $\theta = (\mu, \sigma^2)^\top$ je

$$\left\{ (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : \frac{n(\mu - \hat{\mu}_n)^2}{\hat{\sigma}_n^2} + \frac{n(\sigma^2 - \hat{\sigma}_n^2)^2}{2\hat{\sigma}_n^2} \leq \chi_2^2(1 - \alpha) \right\}$$

(iv) $(\bar{X}_n - \frac{u_{1-\alpha} \hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \infty)$

Příklad 67

(i) $(\hat{d}_n, \hat{\lambda}_n) = \left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i, \frac{1}{\bar{X}_n - \min_{1 \leq i \leq n} X_i} \right)$

(ii) Odhad je (slabě) konzistentní.

Příklad 68

(i) $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)^\top = (\min_{1 \leq i \leq n} X_i, \max_{1 \leq i \leq n} X_i)^\top$.

(ii) Odhad z (i) je konzistentní.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n(\hat{b}_n - b) \leq x) = \exp\{\frac{x}{b-a}\}$ pro $x < 0$. Pro $x \geq 0$ je tato pravděpodobnost 1. Tedy $n(\hat{b}_n - b) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} -Y$, kde Y má exponenciální rozdělení s parametrem $\frac{1}{b-a}$.

Příklad 69

- (i) $\hat{\mathbf{p}}_n = \overline{X}_n$. (Pozor, věrohodnost nelze maximalizovat standardně. Model je přeparametrizovaný, neboť $p_K = 1 - \sum_{k=1}^{K-1} p_k$.)
- (ii) Přímo z centrální limitní věty : $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_K(\mathbf{0}_K, \text{diag}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{p}^\top)$

Příklad 70

Na data můžeme nahlížet jako na realizaci náhodného vektoru s multinomickým rozdělením $\mathbf{X} = \text{Mult}_3(n; p, q, 1 - p - q)$, kde X_1 je počet dvojčat, kdy se narodili dva chlapci, ... Maximálně věrohodným odhadem parametrické funkce $\frac{2p}{1+p-q}$ je $\frac{2\hat{p}_n}{1+\hat{p}_n-\hat{q}_n}$, kde $\hat{p}_n = \frac{X_1}{n}$ a $\hat{q}_n = \frac{X_2}{n}$. Z centrální limitní věty máme

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{p}_n \\ \hat{q}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p(1-p), & -pq \\ -pq, & q(1-q) \end{pmatrix} \right)$$

Dále pak pomocí Δ -metody odvodíme asymptotické rozdělení náhodné veličiny

$$\sqrt{n} \left(\frac{2\hat{p}_n}{1+\hat{p}_n-\hat{q}_n} - \frac{2p}{1+p-q} \right)$$

a této znalosti využijeme pro konstrukci intervalu spolehlivosti pro $\frac{2p}{1+p-q}$.

Příklad 71

(i)

$$(\hat{p}_n, \hat{\lambda}_n)^\top = \left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n N_i}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i \right)^\top$$

Příklad 73

- (i) $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbf{N}_p(\mathbf{0}_p, [\mathbf{E} \frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_i\}}{(1 + \exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_i\})^2} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top]^{-1})$;
- (ii) $(\hat{\beta}_{n1} \mp u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{J}^{11}}{n}})$, kde \hat{J}^{11} je první diagonální prvek matice

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^\top \mathbf{X}_i\}}{(1 + \exp\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_n^\top \mathbf{X}_i\})^2} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top \right]^{-1}.$$

Všimněte si, že jako odhad Fisherovy informační matice $J(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{E} \frac{\exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_i\}}{(1 + \exp\{\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{X}_i\})^2} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top$ nemůžeme vzít $J(\hat{\boldsymbol{\beta}}_n)$, protože neznáme rozdělení \mathbf{X}_i a tudíž potřebnou střední hodnotu neumíme spočítat.

Příklad 74

- (i) $(\hat{\theta}_n, \hat{\eta}_n)^\top = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i}, \overline{X}_n \right)^\top$ a platí

$$\sqrt{n} \left[\begin{pmatrix} \hat{\theta}_n \\ \hat{\eta}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ \eta \end{pmatrix} \right] \xrightarrow{d} \mathbf{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \eta^2 \end{pmatrix} \right).$$

- (ii) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \theta^2)$.
- (iii) $(\hat{\theta}_n - \frac{u_{1-\alpha/2}\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{u_{1-\alpha/2}\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}})$.
- (iv) Ano (je nestranný a je funkcí úplné postačující statistiky).

Příklad 75

- (i) Test má kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \geq c$, kde jako c lze vzít $1 - \alpha$ kvantil rozdělení $\text{Po}(n\lambda_0)$. Test nezávisí na volbě λ_1 z čehož se dá vyvodit, že je to nejlepší test $H_0 : \lambda_X = \lambda_0$ proti $H_1 : \lambda_X > \lambda_0$.
- (ii) V tomto případě má test kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \leq c$.
- (iii) $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$ a test má kritický obor

$$\frac{\sqrt{n}|\hat{\lambda}_n - \lambda_0|}{\sqrt{\lambda_0}} \geq u_{1-\alpha/2}$$

- (iv) $2[-n(\bar{X}_n - \lambda_0) + \sum_{i=1}^n X_i \log(\frac{\bar{X}_n}{\lambda_0})] \geq \chi_1^2(1 - \alpha)$

Příklad 76

- (i) Test má kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \geq c$, kde jako c lze vzít $1 - \alpha$ kvantil rozdělení $\text{Bi}(n, p_0)$. Test nezávisí na volbě p_1 z čehož se dá vyvodit, že je to nejlepší test $H_0 : p_X = p_0$ proti $H_1 : p_X > p_0$.
- (ii) V tomto případě má test kritický obor $\sum_{i=1}^n X_i \leq c$.
- (iii) $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ a test má kritický obor

$$\frac{\sqrt{n}|\hat{p}_n - p_0|}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \geq u_{1-\alpha/2}$$

- (iv) $2[\sum_{i=1}^n X_i \log(\frac{\hat{p}_n}{p_0}) + (n - \sum_{i=1}^n X_i) \log(\frac{1-\hat{p}_n}{1-p_0})] \geq \chi_1^2(1 - \alpha)$.

Příklad 78

- (i) $n \log(\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}) \geq \chi_1^2(1 - \alpha)$, kde $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ a $\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$.
- (ii) $n \log(\frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_n^2}) + n(\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2} - 1) \geq \chi_1^2(1 - \alpha)$.
- (iii) $n[\log(\frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_n^2}) - 1] + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_2^2(1 - \alpha)$.

Příklad 80

Lze řešit pomocí χ^2 -testu dobré shody pro multinomické rozdělení s odhadnutými parametry (viz NMSA331), kde odhadnutý parametr odpovídá odhadu za nulové hypotézy.

Test poměrem věrohodnosti bude mít kritický obor

$$LR_n = 2 \sum_{k=1}^3 X_k \log\left(\frac{\hat{p}_k}{p_k(\hat{\theta}_n)}\right) \geq \chi_1^2(1 - \alpha),$$

kde pro $k \in \{1, \dots, 3\}$ je $\hat{p}_k = \frac{X_k}{n}$ maximálně věrohodný odhad (bez předpokladu platnosti H_0)
Dále

$$(p_1(\tilde{\theta}_n), p_2(\tilde{\theta}_n), p_3(\tilde{\theta}_n))^T = (\tilde{\theta}_n^2, 2\tilde{\theta}_n(1 - \tilde{\theta}_n), (1 - \tilde{\theta}_n)^2)^T,$$

kde $\tilde{\theta}_n = \frac{2X_1 + X_2}{2n}$, je odhad za předpokladu platnosti H_0 .

Příklad 81

(i) Test má kritický obor

$$LR_n = 2 \left\{ \sum_{i=1}^n [Y_i(\hat{\alpha}_n + \hat{\beta}_n^T X_i) - e^{\hat{\alpha}_n + \hat{\beta}_n^T X_i}] - \sum_{i=1}^n [Y_i \tilde{\alpha}_n - e^{\tilde{\alpha}_n}] \right\} \geq \chi_q^2(1 - \alpha),$$

kde $\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n \\ \hat{\beta}_n \end{pmatrix}$ je maximálně věrohodné odhad bez omezení a dostaneme jej jako numerické řešení soustavy $(q + 1)$ rovnic o $(q + 1)$ neznámých

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [Y_i - e^{\hat{\alpha}_n + \hat{\beta}_n^T X_i}] &= 0, \\ \sum_{i=1}^n [Y_i - e^{\hat{\alpha}_n + \hat{\beta}_n^T X_i}] X_i &= \mathbf{0}_q. \end{aligned}$$

Dále $\tilde{\alpha}_n = \log \bar{Y}_n$ je odhad za nulové hypotézy, který maximalizuje log-věrohodnost H_0 , tj. $\tilde{\ell}_n(\alpha) = \alpha \sum_{i=1}^n Y_i - n \exp\{\alpha\} + c$, kde c je člen, který nezávisí na α .

(ii) Hodnota testové statistiky a příslušná asymptotická p -hodnota:

	test. stat.	p-hodnota
LR_n^*	11.2101	0.0037

Příklad 82

Lze řešit pomocí χ^2 -testu dobré shody pro multinomické rozdělení s odhadnutými parametry (viz NMSA331), kde odhadnutý parametr odpovídá odhadu za nulové hypotézy.

Vzhledem k malým počtům si nejdříve sloučíme poslední tři sloupečky. Nechť X_k pro $k \in \{0, \dots, 3\}$ značí počet případů, že ve sboru v daném roce bylo právě k úmrtí (v případě $k = 3$ je to 3 nebo více) v důsledků kopnutí koně.

Test poměrem věrohodnosti bude mít kritický obor

$$LR_n = 2 \sum_{k=0}^3 X_k \log \left(\frac{\hat{p}_k}{p_k(\tilde{\lambda}_n)} \right) \geq \chi_2^2(1 - \alpha),$$

kde pro $k \in \{0, \dots, 3\}$ je $\hat{p}_k = \frac{X_k}{n}$ maximálně věrohodný odhad (bez předpokladu platnosti H_0). Odhad za nulové hypotézy pak má tvar

$$\left(p_0(\tilde{\lambda}_n), \dots, p_3(\tilde{\lambda}_n) \right)^T = \left(e^{-\tilde{\lambda}_n}, \frac{\tilde{\lambda}_n e^{-\tilde{\lambda}_n}}{1!}, \frac{\tilde{\lambda}_n^2 e^{-\tilde{\lambda}_n}}{2!}, \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_n^j e^{-\tilde{\lambda}_n}}{j!} \right),$$

kde $\tilde{\lambda}_n$ řeší rovnici

$$\sum_{k=0}^3 \frac{X_k}{p_k(\tilde{\lambda}_n)} \frac{\partial p_k(\tilde{\lambda}_n)}{\partial \lambda} = 0.$$

Příklad 83

Označme n_{jk} příslušnou četnost na (j, k) místě kontingenční tabulky a $N = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 n_{jk}$.

(i) Testová statistika testu poměrem věrohodnosti má tvar

$$LR_N = 2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 n_{jk} \log \left(\frac{\hat{p}_{jk}}{\tilde{p}_{jk}} \right),$$

kde $\hat{p}_{jk} = \frac{n_{jk}}{N}$ a $\tilde{p}_{jk} = \frac{n_{j+}n_{+k}}{N^2}$. Kritický obor pak je

$$LR_N \geq \chi_9^2(1 - \alpha).$$

Lze také řešit klasickým χ^2 testem nezávislosti.

(ii) Test poměrem věrohodnosti bude mít kritický obor

$$LR_N \geq \chi_6^2(1 - \alpha).$$

kde LR_N je jako výše, nicméně odhad za nulové hypotézy má tvar $\tilde{p}_{jk} = \frac{n_{jk} + n_{kj}}{2N}$.

Příklad 84

(i) Max. věr. odhad je $\hat{p}_n = \bar{X}_n$.

$$W_n = \frac{n(\hat{p}_n - p_0)^2}{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)} = \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_0)}{\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}} \right)^2,$$
$$R_n = \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_n - p_0)}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}} \right)^2,$$
$$LR_n = 2 \left[\sum_{i=1}^n X_i \log \frac{\hat{p}_n}{p_0} + \left(n - \sum_{i=1}^n X_i \right) \log \frac{1 - \hat{p}_n}{1 - p_0} \right].$$

Příklad 85

(i) Max. věr. odhad je $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$.

$$W_n = \frac{n(\hat{\lambda}_n - \lambda_0)^2}{\hat{\lambda}_n} = \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\sqrt{\hat{\lambda}_n}} \right)^2,$$
$$R_n = \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0}} \right)^2,$$
$$LR_n = 2 \left[\sum_{i=1}^n X_i \log \frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_0} - n(\hat{\lambda}_n - \lambda_0) \right].$$

Příklad 86

Model: X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z diskrétního rozdělení, pro které platí:

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(i) $\hat{\lambda}_n$ řeší rovnici $\bar{X}_n = \frac{\hat{\lambda}_n}{1 - e^{-\hat{\lambda}_n}}$ (tu je v praxi třeba řešit numericky). Tento odhad má asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \sigma^2)$, kde $\sigma^2(\lambda) = \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda})^2}{(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda})}$.

Příklad 87

(i) Max. věr. odhad je $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$.

$$W_n = \frac{n(\hat{\lambda}_n - \lambda_0)^2}{\hat{\lambda}_n^2} = \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\hat{\lambda}_n} \right)^2,$$
$$R_n = \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda_0)}{\lambda_0} \right)^2,$$
$$LR_n = 2 \left[n \log \frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda_0} - \sum_{i=1}^n X_i (\hat{\lambda}_n - \lambda_0) \right].$$

Nulovou hypotézu zamítáme, pokud daná testová statistika je větší (nebo rovna) než $\chi_1^2(1-\alpha)$.

Příklad 88

(i) Max. věr. odhad je $\hat{p}_n = \frac{1}{1+\bar{X}_n}$.

$$W_n = \frac{n(\hat{p}_n - p_0)^2}{\hat{p}_n^2(1 - \hat{p}_n)}$$
$$R_n = \left(\frac{n}{p_0} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{1-p_0} \right)^2 n p_0^2 (1 - p_0),$$
$$LR_n = 2 \left[n \log \frac{\hat{p}_n}{p_0} + \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{1-\hat{p}_n}{1-p_0} \right].$$

Příklad 89

(i) $\hat{\beta} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i X_i}$

(ii)

$$W_n = \frac{n(\hat{\beta}_n - \beta_0)^2}{\hat{\beta}_n^2}$$
$$R_n = \left(\frac{n}{\beta_0} - \sum_{i=1}^n X_i Y_i \right)^2 \beta_0^2$$
$$LR_n = 2 \left[n \log \frac{\hat{\beta}_n}{\beta_0} - \sum_{i=1}^n X_i Y_i (\hat{\beta}_n - \beta_0) \right].$$

Příklad 91

(i) Jednoznačnost a existence maximálně věrohodného odhadu, viz Příklad 7.96 z knihy [Anděl \(2011\)](#). $J(\theta) = \frac{1}{3}$.

$$W_n = \frac{n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2}{3}$$
$$R_n = \frac{\left(n - \sum_{i=1}^n \frac{2e^{\theta_0 - X_i}}{1+e^{\theta_0 - X_i}} \right)^2}{\frac{n}{3}}$$
$$LR_n = 2n(\hat{\theta}_n - \theta_0) - 4 \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{1+e^{\theta_0 - X_i}}{1+e^{\hat{\theta}_n - X_i}} \right)$$

Za povšimnutí stojí, že pro Raův skórový test nepotřebujeme spočítat $\hat{\theta}_n$ (který je dán implicitně jako řešení nelineární rovnice), tudíž jej zvládneme provést i bez numerického softwaru.

Příklad 92

(i) Maximálně věrohodné odhady jsou $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$ a $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.

$$W_n = \frac{n(\hat{\mu}_n - 0)^2}{\hat{\sigma}_n^2} + \frac{n(\hat{\sigma}_n^2 - 1)^2}{2\hat{\sigma}_n^4} \geq \chi_2^2(1 - \alpha),$$

$$R_n = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} + \frac{(\sum_{i=1}^n [X_i^2 - 1])^2}{2n} \geq \chi_2^2(1 - \alpha),$$

$$LR_n = -n \log \sigma_n^2 + \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 1) \geq \chi_2^2(1 - \alpha).$$

Příklad 96

$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ je maximálně věrohodný odhad σ^2 (bez omezení) a $\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$ je maximálně věrohodný odhad za H_0 .

(i) $LR_n^* = n \log \frac{\tilde{\sigma}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2}$, $W_n^* = \frac{n(\bar{X}_n - \mu_0)}{\tilde{\sigma}_n^2}$, $R_n^* = \frac{n(\bar{X}_n - \mu_0)}{\tilde{\sigma}_n^2}$.

Ve všech případech zamítáme, pokud je testová statistika $\geq \chi_1^2(1 - \alpha)$.

Příklad 97

(i) Jako v 96, pouze místo X_i je všude $\log X_i$.

Příklad 99

Označme $Y_k = \sum_{i=1}^n X_{ik}$ pro $k \in \{1, \dots, 4\}$. Potom maximálně věrohodný odhad (bez omezení) je

$$\hat{\mathbf{p}}_n = (\hat{p}_{n1}, \dots, \hat{p}_{n4})^\top = \left(\frac{Y_1}{n}, \dots, \frac{Y_4}{n}\right)^\top.$$

Asymptotické rozdělení získáme přímo pomocí centrální limitní věty (rozmyslete si, proč by nebylo vhodné používat obecný výsledek pro maximálně věrohodný odhad).

Test poměrem věrohodnosti má ve všech případech tvar

$$LR_n^* = 2 \sum_{k=1}^4 X_k \log \left(\frac{\hat{p}_{nk}}{\tilde{p}_{nk}}\right) \geq \chi_1^2(1 - \alpha).$$

(i) Odhad parametru \mathbf{p} za nulové hypotézy pro test poměrem věrohodnosti bude:

$$(\tilde{p}_{n1}, \dots, \tilde{p}_{n4})^\top = \left(\frac{1}{4}, \frac{3Y_2}{4 \sum_{k=2}^4 Y_k}, \frac{3Y_3}{4 \sum_{k=2}^4 Y_k}, \frac{3Y_4}{4 \sum_{k=2}^4 Y_k}\right)^\top.$$

Waldův test má kritický obor

$$\left| \frac{\sqrt{n}(\hat{p}_{1n} - \frac{1}{4})}{\sqrt{\hat{p}_{1n}(1 - \hat{p}_{1n})}} \right| \geq u_{1-\alpha/2}$$

(ii) Odhad parametru \mathbf{p} za nulové hypotézy pro test poměrem věrohodnosti bude:

$$(\tilde{p}_{n1}, \dots, \tilde{p}_{n4})^\top = \left(\frac{Y_1+Y_2}{2n}, \frac{Y_1+Y_2}{2n}, \hat{p}_{n3}, \hat{p}_{n4} \right)^\top.$$

Jiný asymptotický test by šel také sestavit pomocí metody představené v části „Odhady parametrů multinomického rozdělení“ v kurzu NMSA331.

(iii) Odhad parametru \mathbf{p} za nulové hypotézy pro test poměrem věrohodnosti bude:

$$(\tilde{p}_{n1}, \dots, \tilde{p}_{n4})^\top = \left(\frac{Y_1+Y_3}{2.1n}, \hat{p}_{n2}, \frac{1.1(Y_1+Y_3)}{2.1n}, \hat{p}_{n4} \right)^\top.$$

Jiný asymptotický test by šel také sestavit pomocí metody představené v části „Odhady parametrů multinomického rozdělení“ v kurzu NMSA331.

Příklad 101

Maximálně věrohodné odhady (bez omezení) jsou $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)(X_i - \bar{X}_n)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$, $\hat{\beta}_0 = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{X}_n$ a $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$.

Maximálně věrohodné odhady za nulové hypotézy pak jsou $\tilde{\beta}_0 = \bar{Y}_n$ a $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\beta}_0)^2$.

(i) $LR_n^* = n \log \frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \geq \chi_2^2(1 - \alpha)$,

Příklad 103

(i) Jedná se o speciální případ příkladu 83.

Příklad 104

Maximálně věrohodný odhad (bez omezení) $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ dostaneme jako numerické řešení soustavy $(q + 1)$ rovnic o $(q + 1)$ stejně jako v příkladu 81. Stejně tak odhad za nulové hypotézy $\tilde{\alpha}_n$. Dále k odhadu Fisherovu informační matice využijeme empirickou Fisherovu informační matici (neboť neznáme rozdělení \mathbf{X}_i)

$$\hat{\mathbf{J}}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\alpha + \beta^\top \mathbf{X}_i}, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^\top e^{\alpha + \beta^\top \mathbf{X}_i} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i e^{\alpha + \beta^\top \mathbf{X}_i}, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top e^{\alpha + \beta^\top \mathbf{X}_i} \end{pmatrix}$$

(i) $W_n^* = n (\hat{\beta}_n - \mathbf{0}_q)^\top [\hat{\mathbf{J}}^{22}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)]^{-1} (\hat{\beta}_n - \mathbf{0}_q) \geq \chi_q^2(1 - \alpha)$, kde $\hat{\mathbf{J}}^{22}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ je $(2, 2)$ blok inverze matice $\hat{\mathbf{J}}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$.

$R_n^* = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i (Y_i - e^{\tilde{\alpha}_n}))^\top [\hat{\mathbf{J}}^{22}(\tilde{\alpha}_n, \mathbf{0}_q)] (\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i (Y_i - e^{\tilde{\alpha}_n})) \geq \chi_q^2(1 - \alpha)$, kde $\hat{\mathbf{J}}^{22}(\tilde{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ je $(2, 2)$ blok inverze matice $\hat{\mathbf{J}}(\tilde{\alpha}_n, \mathbf{0}_q)$.

(ii) Hodnoty testových statistik a příslušná asymptotická p-hodnota:

	test. stat.	p-hodnota
W_n^*	8.9064	0.0028
R_n^*	10.9358	0.0009

Asymptotický intervalový odhad pro parametr β_1 je

$$\left(\hat{\beta}_{n1} - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2(\beta_1)}{n}}, \hat{\beta}_{n1} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2(\beta_1)}{n}} \right),$$

kde $\hat{\sigma}^2(\beta_1)$ je (2, 2)-prvek inverze matice $\mathbf{J}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$. Numericky to v daném příkladě pro $\alpha = 0.05$ vychází $(-0.752, 1.771)$.

Příklad 105

Maximálně věrohodný odhad $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ bez omezení dostaneme jako numerické řešení soustavy 2 rovnic o 2 neznámých

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[Y_i - \frac{\exp\{\alpha + \beta X_i\}}{1 + \exp\{\alpha + \beta X_i\}} \right] &= 0, \\ \sum_{i=1}^n X_i \left[Y_i - \frac{\exp\{\alpha + \beta X_i\}}{1 + \exp\{\alpha + \beta X_i\}} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Pro daná data vychází $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)^\top = (-3.599, 0.056)$

Dále $\tilde{\alpha}_n = \log\left(\frac{\bar{Y}_n}{1 - \bar{Y}_n}\right)$ je maximálně věrohodný odhad za nulové hypotézy (že $\beta = 0$).

Dále jelikož neznáme rozdělení \mathbf{X}_i , tak k odhadu Fisherovu informační matice využijeme empirickou Fisherovu informační matici

$$\hat{\mathbf{J}}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\exp\{\alpha + \beta X_i\}}{(1 + \exp\{\alpha + \beta X_i\})^2}, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i \exp\{\alpha + \beta X_i\}}{(1 + \exp\{\alpha + \beta X_i\})^2} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i \exp\{\alpha + \beta X_i\}}{(1 + \exp\{\alpha + \beta X_i\})^2}, & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2 \exp\{\alpha + \beta X_i\}}{(1 + \exp\{\alpha + \beta X_i\})^2} \end{pmatrix}$$

(i) $W_n^* = \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - 0)}{\sqrt{\hat{\mathbf{J}}^{22}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)}} \right)^2$, kde $\hat{\mathbf{J}}^{22}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ je (2, 2) prvek inverze matice $\hat{\mathbf{J}}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$.

$R_n^* = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \frac{e^{\tilde{\alpha}_n}}{1 + e^{\tilde{\alpha}_n}}) \right)^2 \hat{\mathbf{J}}^{22}(\tilde{\alpha}_n, 0)$, kde $\hat{\mathbf{J}}^{22}(\tilde{\alpha}_n, 0)$ je (2, 2)-prvek inverze matice $\hat{\mathbf{J}}(\tilde{\alpha}_n, 0)$.

	test. stat.	p-hodnota
LR_n^*	1.14	0.29
R_n^*	1.08	0.30
W_n^*	0.98	0.32

(ii) Asymptotický interval spolehlivosti pro β je

$$\left(\hat{\beta}_n - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{J}}^{22}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)}{n}}, \hat{\beta}_n + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{J}}^{22}(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)}{n}} \right).$$

Numericky to pro daná data pro $\alpha = 0.05$ pak vychází $(-0.055, 0.168)$.