

Domácí úloha č. 3

Základy numerické matematiky - NMNM201

(odevzdat do vašeho cvičení v 10./11. týdnu semestru)

balazsova@karlin.mff.cuni.cz, jan.papez@mff.cuni.cz,

blechta@karlin.mff.cuni.cz

Budeme chtít najít kořeny funkce

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

pomocí metod pevného bodu.

$$\varphi_1(x) = x^2 - 2,$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{x+2},$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \frac{2}{x},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}.$$

Domácí úloha 1. Popište, jak jsou jednotlivé metody $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ odvozeny. Tj., pro každou funkci φ_i , $i = 1, \dots, 4$, stačí například napsat posloupnost algebraických úprav vedoucích od zápisu $f(x) = 0$ k zápisu $x = \varphi_i(x)$.

[Hint: Jedna z metod je ekvivalentní Newtonově metodě] (max 1 bod)

Domácí úloha 2. Platí pro všechny metody $\varphi_1, \dots, \varphi_4$, že jsou oba kořeny f pevnými body? (max 1 bod)

Věta 1. Nechť $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$ a nechť $I, \bar{x} \in I$, je interval takový, že platí:

- $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$
- $|\varphi'(x)| < 1$ pro všechna $x \in I$,
- φ je zobrazení z I do I , tj. $\varphi(I) \subseteq I$.

Pokud $x_0 \in I$, pak iterace pevného bodu konverguje do \bar{x} .

Domácí úloha 3. Je možné pomocí Věty 1 ukázat, zda budou jednotlivé metody konvergovat pro danou volbu počátečního bodu? Pokud ano, ukažte.

Pro φ_1 použijte $x_0 = 3$,

pro φ_2 použijte $x_0 = -1.5$,

pro φ_3 použijte $x_0 = 3$,

pro φ_4 použijte $x_0 = 0$.

(max 2 body)

Domácí úloha 4. Nakreslete chování jednotlivých metod pevného bodu z Úlohy 3 podobně jako na Obrázku 4.11. Pokud metoda konverguje, přestože Věta 1 nešla použít, zdůvodněte proč. (max 2 body)

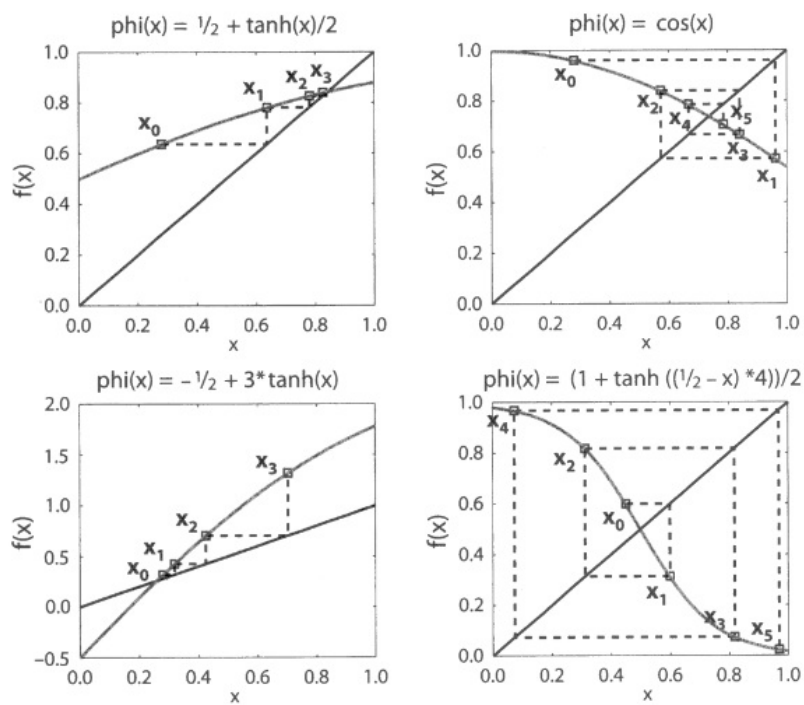


Figure 4.11. Fixed point iteration. The iteration may display monotonic convergence (*upper left*), oscillatory convergence (*upper right*), monotonic divergence (*lower left*), or oscillatory divergence (*lower right*).