

Domácí úloha č. 2

Základy numerické matematiky - NMNM201
(odevzdat do vašeho cvičení v 7. týdnu semestru)
balazsova@karlin.mff.cuni.cz, jan.papez@mff.cuni.cz,
blechta@karlin.mff.cuni.cz

Domácí úloha 1. Uvažujme neznámou funkci f , pro niž jsou nám známy její funkční hodnoty $f(x_i)$ v bodech x_i , $i = 1, \dots, n$. Tuto funkci se budeme snažit aproximovat polynomem p nejvýše k tého stupně tak, aby

$$p = \operatorname{argmin}_{\deg(q) \leq k} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - q(x_i))^2. \quad (1)$$

Formulujte (1) jako problém nejmenších čtverců

$$\min_x \|Ax - b\| \quad (2)$$

pro vhodnou matici A a vektory b a x . (max 2 body)

[Pozor: nestačí pouze napsat, jak sestavit matici A , vektor b a jak převést vektor x na polynom. Je také třeba ukázat, že řešení problému (2) je ekvivalentní řešení problému (1).]

Domácí úloha 2. Studenti si vybírají mezi úlohou a) v MATLABu nebo b) teoretickou.

- a) Použijte skript `du.m`. Pro zadané hodnoty x_i a $f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, a $k = 5$ vyřešte úlohu 1 v MATLABu (či Octave) a získaný polynom p vykreslete. Zvyšujte hodnotu k a pozorujte kvalitu numerického řešení. Svá pozorování sepište (a vysvětlete, pokud to svedete).

[Hinty: Pro vykreslení více dat (např. polynom a původní funkci) do jednoho grafu použijte `hold`. Pro přesnější vykreslení zadané funkce i výsledného polynomu použijte jemnější dělení intervalu, např. `linspace(0,5,500)`. Pro vyhodnocování polynomu zadaného koeficienty funkci `polyval`.]

- b) Problém nejmenších čtverců lze ekvivalentně zapsat jako

$$x^{LS} = \operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2.$$

Definujme $g(x) \equiv \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$ a nahlížejme nyní na problém nejmenších čtverců jako na hledání extrému funkce více proměnných (viz Matematická analýza 3). Ukažte, že $\nabla_x g(x) = A^T(Ax - b)$. Diskutujte vztah hledání minima funkce g a řešení normálních rovnic.

[Hint: Složky gradientu počítejte jako $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i)^2$. Pro diskusi pak využijte větu o nutné podmínce existence lokálního extrému.]

(max 4 body)