Cvičení 13 - zadání a řešení úloh

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 2. ledna 2025

---

1 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Řešíme obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \qquad x \in (a, b) \\ y(a) &= \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}^n$.
Základním příkladem (skalární) rovnice je

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda y(x), \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y(a) &= \alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

modelující exponenciální růst (pro $\lambda > 0$), nebo např. radioaktivní rozpad (pro $\lambda < 0$).

Úloha 1.
- *Vyřešte analyticky rovnici* (2)*. Uvažujte* $y > 0$*.*
- *Výsledné analytické řešení si pro* $\lambda > 0$ *načrtněte pro několik různých počátečních podmínek.*
- *Výsledné analytické řešení si pro* $\lambda < 0$ *načrtněte pro několik různých počátečních podmínek.*

[Nápověda: převeďte rovnici na tvar $\frac{y'}{y} = \lambda$ *a integrujte přes* x*. Integrační konstantu určete z počáteční podmínky.]*

Řešení. Integrací $\frac{y'(x)}{y(x)} = \lambda$ podle x dostaneme $\ln y(x) = \lambda x + C$. Z počáteční podmínky $y(a) = \alpha$ máme $\ln \alpha = \lambda a + C$, tedy $C = \ln \alpha - \lambda a$. Dosazením a exponenciálou dostaneme $y(x) = \alpha e^{\lambda(x-a)}$. □

1.1 Základní jednokrokové numerické metody

Interval $[a, b]$ rozdělíme ekvidistantně s krokem h: $x_0 = a, x_1 = a+h, \ldots, x_{\frac{b-a}{h}} = b$. Označíme $y_n \approx y(x_n)$ numerickou aproximaci řešení v x_n. Obecná jednokroková metoda má tvar: $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$
Definujeme jednokroková numerická schémata pro řešení ODR:

Explicitní Eulerovo metoda: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Implicitní Eulerovo metoda: $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$.

Midpoint metoda (explicitní): $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$.

Úloha 2. *Simulujte numerické řešení rovnice* (2) *na intervalu* $[0, 2]$ *pro* $\lambda = 1$ *a počáteční podmínku* $y(0) = 1$*. Použijte krok* $h = 1$ *a* $h = 0.5$*.*

- *Řešte nejprve pomocí explicitní Eulerovy metody, poté pomocí implicitní Eulerovy metody.*
- *Pokuste se spočtené řešení nakreslit tak, aby vynikl geometrický význam daného schématu, tj. pro každý bod numerického řešení do obrázku přikreslete odpovídající náčrtek schématu.*

Řešení. V případě naší diferenciální rovnice je $f(x, y) = y$. Předpis pro y_{n+1} pro explicitní Eulerovu metodu je tedy

$$y_{n+1} = y_n + hy_n = (1 + h)y_n.$$

Krok $h = 1$, $y_0 = y(0) = 1$, $y(1) \approx y_1 = 2$, $y(2) \approx y_2 = 4$.
Krok $h = 0.5$, $y_0 = y(0) = 1$, $y(0.5) \approx y_1 = \frac{3}{2}$, $y(1) \approx y_2 = 9/4 = 2.25$, $y(1.5) \approx y_3 = 27/8 = 3.3750$, $y(2) = 7.39 \approx y_4 = 81/16 = 5.0625$.

Předpis pro y_{n+1} pro implicitní Eulerovu metodu je

$$y_{n+1} = y_n + hy_{n+1} = \frac{1}{1-h} y_n.$$

Krok $h = 1$, $y_0 = y(0) = 1$: Pro $h = 1$ metoda selže – rovnice nemá řešení (Geometricky: Tečny v $x = 1$ všech trajektorií analytického řešení $y(x)$ neprochází $x = 0$ bodem $y(0) = 1$).

Krok $h = 0.5$, $y_0 = y(0) = 1$: $y(0.5) \approx y_1 = 2$, $y(1) \approx y_2 = 4$, $y(1.5) \approx y_3 = (8)$, $y(2) = 7.39 \approx y_4 = 16$.

Pozorujeme, že explicitní metoda pro tuto rovnici (pro $\lambda > 0$) podhodnocuje řešení, zatímco implicitní metoda řešení nadhodnocuje. □

1.2 Lokální diskretizační chyba, konzistence, řád metody a konvergence pro explicitní metody

Lokální dikretizační chybu $\tau(x, h)$ definujeme jako:

$$\tau(x,h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y, h) \tag{3}$$

kde všechna y mají význam řešení ODR splňující počáteční podmínku úlohy, tj. $y(a) = \alpha$.

Metoda je *konzistentní*, jestliže $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$.

Metoda je *řádu* p, jestliže pro všechny x platí, že $\tau(x, h) = O(h^p)$.

Je-li explicitní jednokroková metoda konzistentní, řádu p a Φ je Lipschitzovsky spojitá vzhledem k y, pak nám Věta z přednášky dává odhad na globální chybu

$$\max_{a \leq x_n \leq b} |y_n - y(x_n)| \leq Ch^p \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L}, \tag{4}$$

kde $L > 0$ je konstanta lipschitzskovskosti Φ v proměnné y a p je řád metody. Jednokroková metoda je *konvergentní*, pokud $\max_{a \leq x_n \leq b} |y_n - y(x_n)| \to 0$ pro $h \to 0$.

Úloha 3. *Ověřte konzistenci a řád 1 explicitní Eulerovy metody. Pro funkci $f(x, y)$ na pravé straně diferenciální rovnice (1) předpokládejte lipschitzovskost vzhledem k proměnné y a spojitost vzhledem k x.*

Řešení. Chceme vyšetřit obecné vlastnosti explicitní Eulerovy metody, pro libovolnou diferenciální rovnici s pravou stranou $f(x, y)$. Explicitní Eulerovo schéma je dáno

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Přírůstková funkce je tak rovna $\Phi(x, y, h) = f(x, y)$.

Nejprve vyšetříme řád metody tím, že pomocí Taylorova rozvoje rozvineme člen $y(x + h)$ v definici lokální diskretizační chyby $\tau(x, h)$.

$$\begin{aligned}
\tau(x,h) &= \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x,y,h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - f(x,y) \\
&= \frac{y(x) + hy'(x) + O(h^2) - y(x)}{h} - f(x,y) \\
&= \frac{y(x) + hf(x,y) + O(h^2) - y(x)}{h} - f(x,y) = O(h)
\end{aligned}$$

Explicitní Eulerova metoda je tedy řádu 1.

Pro vyšetření konzistence je třeba ověřit, zda pro $h \to 0$ jde $\Phi \to f$. Jelikož pro explicitní Eulerovu metodu je přírůstková funkce $\Phi(x, y, h) = f(x, y)$, je metoda jistě konzistentní. □

1.3 Metoda polovičního kroku

Podobně jako pro kvadratury, i v případě ODR lze zavést metodu polovičního kroku. Princip je stejný. Místo kroku h použijeme krok velikosti $\frac{h}{2}$. Tato metoda nám znovu pomůže získat aposteriorní odhad v případě, kdy přesné řešení $y(x)$ není známé.

Z předchozího víme, že platí odhad:

$$y_n^{(h)} - y\left(x_n^{(h)}\right) \approx Ch^p,$$
$$y_{2n}^{(h/2)} - y\left(x_{2n}^{(h/2)}\right) \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^p.$$

Stejně jako v případě kvadratury, budeme předpokládat, že konstanta C je v obou případech stejná. Odečtením předchozích dvou rovnic získáme:

$$y_{2n}^{(h/2)} - y_n^{(h)} \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^p (1 - 2^p).$$

Úloha 4. *Odvoďte aposteriorní odhad* $|y_{2n}^{(h/2)} - y\left(x_{2n}^{(h/2)}\right)|$ *metodou polovičního kroku pro obecnou jednokrokovou metodu řádu* p*.*

Řešení. Z předchozího dostaneme aposteriorní odhad pro chybu

$$|y_{2n}^{(h/2)} - y\left(x_{2n}^{(h/2)}\right)| \approx \frac{|y_{2n}^{(h/2)} - y_n^{(h)}|}{2^p - 1}.$$

□

1.4 Vícekrokové metody

Zvolme $x_n = a + nh$, $n = 0, 1, \ldots$, $f_n = f(x_n, y_n)$, pak *vícekrokovou metodou* rozumíme předpis

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{m} \beta_i f_{n+i}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

kde $\alpha_m \neq 0$ a $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$. Hodnotu y_{n+m} tedy spočteme pomocí y_{n+m-1}, y_{n+m-2},..., y_n.

Jak získáme prvních m prvků?

Řešení.
- $y_1, \ldots, y_{m-1}$ určíme nějakou jednokrokovou metodou.
- y_1 určíme jednokrokovou metodou, y_2 dvoukrokovou metodou, y_3 trojkrokovou, atd.

□

Vícekrokové metody nejsou vhodné pro adaptivní délku kroku. Pro $\beta_m = 0$ jde o explicitní metody, pro $\beta_m \neq 0$ jde o implicitní metody.

Lokální diskretizační chyba je dána vztahem

$$\tau(x, y, h) := \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i y(x + ih) - \sum_{i=0}^{m} \beta_i f(x + ih, y(x + ih)).$$

Věta z přednášky nám dává podmínky na volbu koeficientů vícekrokové metody tak, aby její lokální diskretizační chyba měla *řád* $O(h^p)$:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{m} i^j \alpha_i = j \sum_{i=0}^{m} i^{j-1} \beta_i,\ j = 1, \ldots, p. \tag{6}$$

Metoda je *konzistentní*, má-li řád alespoň 1.

Vícekroková metoda je $0-$*stabilní*, jestliže pro všechny kořeny ξ jejího charakteristického polynomu $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^{n+i}$ platí $|\xi| \leq 1$ a zároveň pokud je pro nějaký kořen $|\xi| = 1$, potom je jeho násobnost rovna 1.

Vícekroková metoda je *konvergentní* právě tehdy, když je $0-$stabilní a konzistentní.

Úloha 5. *Mějme metody*

a) $3y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 2hf_{n+2}$,

b) $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 4hf_{n+1} + 2hf_n$.

Pro každou z metod určete, zda je $0-$stabilní, konzistentní a jaký má řád. Dále spočtěte předpis pro y_k, pro úlohu

$$y' = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 1 + \varepsilon.$$

[Nápověda: Z přednášky víme, že $y_n = \sum_{l=1}^{m} c_l \xi_l^n$, kde pro každé $l \in \{1, \dots, m\}$ je ξ_l jednoduchý kořen charakteristického polynomu, řeší (5) s $f = 0$. My chceme takové řešení, které splňuje počáteční podmínky pro y_0 a y_1.]

Řešení. a) Metoda má charakteristický polynom $3(x-1)(x-1/3)$ a je tedy stabilní. Dosazením do formulek pro řád (6) dostaneme, že metoda je řádu 2 a tedy je konzistentní.

$s = 0 : \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 0$
$s = 1 : \sum_{i=0}^{2} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{2} \beta_i$
$s = 2 : \sum_{i=0}^{2} i^2\alpha_i = 2\sum_{i=0}^{2} i\beta_i$
$s = 3 : \sum_{i=0}^{2} i^3\alpha_i \neq 3\sum_{i=0}^{2} i^2\beta_i$

Z odvození charakteristického polynomu víme, že

$$y_n = c_1(\frac{1}{3})^n + c_2 1^n.$$

Dosazením y_0, y_1 do této rovnice dostaneme lineární soustavu pro 2 neznáme. Vyřešením dostaneme vztah

$$y_n = -\frac{3}{2}\varepsilon(\frac{1}{3})^n + (1 + \frac{3}{2}\varepsilon).$$

b) Metoda má charakteristický polynom $(x-1)(x+5)$ a je tedy nestabilní. Dosazením do formulek pro řád (6) dostaneme, že metoda je řádu 3. Z charakteristického polynomu víme, že

$$y_n = c_1(-5)^n + c_2 1^n$$

a výpočtem pomocí y_0, y_1 dostaneme

$$y_n = -\frac{1}{6}\varepsilon(-5)^n + (1 + \frac{1}{6}\varepsilon).$$

Numerické řešení tedy bude oscilovat a vliv zaokrouhlovacích chyb se bude exponenciálně zvětšovat.

□