Cvičení 12 - zadání pro studenty

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 18. prosince 2023

1 Numerická kvadratura

Kvadratura V původním významu slova (ve starověkém Řecku) šlo o nalezení Euklidovské konstrukce[1] čtverce o stejném obsahu jako daný geometrický objekt.

Geometrický význam určitého integrálu Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce.

Numerická integrace pomocí kvadratur Na intervalu $[a, b]$ uvažujeme uzly $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $x_i \in [a, b]$, dále uvažujeme váhy $\omega_0, \ldots, \omega_n$, kde $\omega_i \in \mathbb{R}$.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx Q(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i).$$

Chybu budeme značit $E(f) = I(f) - Q(f)$.

1.1 Newton-Cotesovy kvadraturní formule

Jde o kvadraturu na ekvidistantním dělení intervalu $[a, b]$, tedy s volbou uzlů $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, kde $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$, jež vzniká *přesnou* integrací Lagrangeova interpolačního polynomu $L_n(x)$ k funkci $f(x)$; $L_n \approx f$.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx}_{\omega_i} = Q(f)$$

Z vyjádření chyby Lagrangeovy interpolace plyne vyjádření chyby kvadraturní formule

$$E(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)\,dx.$$

Obdélníkové pravidlo: $n = 0$, volíme $x_0 = \frac{a+b}{2}$.
Obecný tvar kvadratury; odhad chyby (je-li $f \in C^1([a, b])$):

$$Q(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a); \qquad E(f) = \frac{1}{2} f'(\xi)(b - a)^2 \text{ pro } \xi \in [a, b].$$

Řád kvadratury je 1.

Lichoběžníkové pravidlo: $n = 1$, volíme $x_0 = a,\ x_1 = b$.
Obecný tvar kvadratury; odhad chyby (je-li $f \in C^2([a, b])$):

$$Q(f) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b - a); \qquad E(f) = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3 \text{ pro } \xi \in [a, b].$$

Řád kvadratury je 1.

[1]Euklidovská konstrukce: Konstrukce pomocí kružítka a pravítka (s jednou hranou, bez značek pro měření).

Simpsonovo pravidlo: $n = 2$, volíme $x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b$.
Obecný tvar kvadratury; odhad chyby (je-li $f \in C^4([a, b])$):

$$Q(f) = \frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)(b-a);$$
$$E(f) = \frac{1}{2880} f^{(4)}(\xi)\,(b-a)^5 \ \text{ pro } \xi \in [a, b].$$

Řád kvadratury je 3.

Úloha 1. *Aproximujte integrál* $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx = 0.882081\ldots$ *pomocí obdélníkového, lichoběžníkového a Simpsonova pravidla.*

[Hint: Potřebujete-li, zaokrouhlete $e^{-1} \approx 0.37,\ e^{-2} \approx 0.14,\ e^{-3} \approx 0.05,\ e^{-4} \approx 0.02$.*]*

Úloha 2. *Libovolná Newton-Cotesova kvadratura na intervalu* $[a, b]$ *integruje přesně konstantní funkce. Využijte této vlastnosti k odvození vztahu pro součet vah.*

Úloha 3. *Ukažte, že váhy libovolné Newton-Cotes kvadratury* $\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$ *jsou "symetrické", tedy že*

$$\omega_i = \omega_{n-i}.$$

[Hint: Začněte se svými úvahami na intervalu $[-1, 1]$*. Pro* $n = 2, 3$ *si nakreslete lagrangeovské bázové funkce. Uvažujte nad vzájemnou symetrií bázových funkcí. Zobecněte vaše úvahy pro libovolné* n *a na libovolný interval* $[a, b]$*.]*

Úloha 4. *Odvoďte Newton-Cotesovu formuli pro výpočet integrálu* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *pro čtyři ekvidistantní uzly.*

[Hint: Za použití výsledků Úloh 2 a 3 si zkuste co nejvíce zjednodušit výpočty. Mělo by vám stačit vypočítat jeden integrál.]

Úloha 5 (Navíc)**.** *Nalezněte kvadraturní formuli tvaru*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \omega_0 f(0) + \omega_1 f(1),$$

která je přesná pro všechny funkce tvaru $\alpha e^x + \beta\cos(\pi x/2)$*.*

1.2 Gaussova kvadratura

Fakt, že pro některá rovnoměrná rozložení uzlů dostáváme přesnost o stupeň vyšší napovídá, že pro vhodně umístěné uzly může mít kvadratura vyšší algebraický stupeň. V Gaussově kvadratuře jsou uzly a váhy zvoleny tak, aby řád kvadratury byl maximální: pro $n + 1$ uzlů $x_0, \ldots, x_n$ získáme maximální řád přesnosti $2n + 1$ (tj. pro prostor dimenze $2n + 2$).

Shrnutí myšlenky Gaussovy kvadratury: Nechť $f \in P_{2n+1}$, L_{n+1} je polynom stupně $n+1$ kolmý na P_n. Pak existují polynomy $q,\ r \in P_n$ tak, že platí $f(x) = L_{n+1}(x)q(x) + r(x)$ (dělení polynomu f polynomem L_{n+1} se zbytkem r).

Uvažujeme kvadraturu s uzly $x_0 \ldots x_n$ odpovídajícími kořenům polynomu L_{n+1}. Víme, že kvadratura s $n + 1$ uzly a vahami odpovídajícími integrálům lagrangeovým bázovým funkcím bude přesná alespoň pro P_n. Nyní rozepíšeme integrál a kvadraturu polynomu f:

$$I(f) = \overbrace{\int L_{n+1}(x)q(x)}^{0 \text{ protože } L_{n+1} \perp P_n} + \int r(x) = \overbrace{I(r) = Q(r)}^{\text{přesná pro } P_n},$$
$$Q(f) = Q(L_{n+1}q) + Q(r) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \big(\underbrace{L_{n+1}(x_i)}_{0}\, q(x_i) + r(x_i)\big) = Q(r).$$

Uzly $x_0, \dots, x_n$ už tedy nebudou ekvidistantní. Jak lze získat váhy kvadraturní formule?

Úloha 6. *Odvoďte dvoubodovou Gaussovu kvadraturní formuli pro* $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. *Tedy najděte* x_0, x_1, ω_0 *a* ω_1 *tak, aby kvadraturní formule* $Q(f) = \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$ *byla přesná pro polynomy stupně nejvýše 3.*

Pro numerický výpočet zadaného integrálů na intervalu (a, b) musíme pomocí lineární substituce buď převést zadaný integrál na integrál na intervalu $(-1, 1)$, nebo, což je v praxi obvyklejší postup, přeškálovat kvadraturní uzly a váhy.

Úloha 7. *Pomocí přeškálování uzlů a vah z Úlohy 6 odvoďte dvoubodovou Gaussovu kvadraturní formuli pro* $\int_{2}^{8} f(x)\,dx$.

[Hint: Najděte předpis lineární funkce, která bod -1 *zobrazí do* 2 *a bod* 1 *zobrazí do* 8.*]*

[Hint: Využijte vlastnost, že součet všech vah je roven $b - a$.*]*

Úloha 8 (Navíc)**.** *Dokážete napsat obecný vzorec pro přeškálování uzlů a vah z intervalu* $(-1, 1)$ *na interval* (a, b)*?*

Úloha 9. *Uvažujme kvadraturní formuli tvaru*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha).$$

a) *Pro jaké hodnoty* α *bude tato kvadraturní formule přesná pro všechny polynomy stupně nejvýše 1?*

b) *Pro jaké hodnoty* α *bude tato kvadraturní formule přesná pro všechny polynomy stupně nejvýše 3?*

c) *Pro jaké hodnoty* α *bude tato kvadraturní formule přesná pro všechny polynomy tvaru* $a + bx + cx^2 + dx^4$*, kde* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*?*

Úloha 10 (Navíc)**.** *Dokažte, že nelze najít kvadraturu o* $n+1$ *uzlech, která by byla algebraického řádu* $2n + 2$.

[Hint: Pro obecnou kvadraturu s danými $n + 1$ *uzly a vahami najděte polynom stupně* $2n + 2$*, pro který tato kvadratura nemůže být přesná.]*

[Hint: Zkuste najít polynom, kterému sice kvadratura přiřadí nulu, ale jeho integrál bude nenulový.]

Úloha 11 (Navíc)**.** *Ukažte, že váhy Gaussovy kvadratury jsou vždy kladné.*

[Hint: Integrujte vhodně zvolený polynom stupně $2n$*, kde* $n + 1$ *je počet uzlů kvadratury.]*

1.3 Metoda polovičního kroku

Nevýhodou apriorního odhadu chyby $E(f)$ výše je, že může být velmi nadsazený, nebo nemusíme mít k dispozici odhad derivace funkce f. Proto hledáme metodu aposteriorního odhadu chyby. Touto metodou je metoda polovičního kroku z přednášky.

Nejen že nám metoda polovičního kroku pomůže s aposteriorním odhadem chyby, ale zároveň nám dá přesnější výsledek každým rozpůlením intervalů.

Úloha 12. *Určete, kolik nových funkčních hodnot* $f(x_k)$ *je potřeba spočítat, pokud jsme původně měli jen jeden interval délky* h *a nyní z něj vytvoříme dva intervaly délky* $\frac{h}{2}$ *a používáme*

a) *čtyřbodovou Newton-Cotesovu metodu,*

b) *čtyřbodovou Gaussovu metodu.*