Cvičení 11 - zadání a řešení úloh

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 18. prosince 2024

1 Interpolace funkcí

1.1 Obecná interpolace a Vandermondova matice

Mějme funkci f zadanou v bodech x_0 až x_n. Chceme tuto funkci interpolovat v bodech x_i pomocí funkcí z nějakého prostoru X (například polynomů stupně nejvýše n, tj. $X = P_n$). To znamená nalézt funkci F v X, která se s f shoduje v bodech.

Aby úloha měla jednoznačné řešení, dimenze X se musí rovnat počtu bodů interpolace.

Jak postupujeme? Zvolíme nějakou bázi prostoru X, bázové funkce označíme p_0 až p_n. Nyní $F = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i$.

Sestavíme soustavu rovnic pro neznámé koeficienty α_i. Dostáváme *zobecněnou Vandermondovu matici*

$$\begin{pmatrix} p_0(x_0) & p_1(x_0) & p_2(x_0) & \dots & p_n(x_0) \\ p_0(x_1) & p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_n) & p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vyřešením této soustavy získáme žádanou funkci F.

Pro $X = P_n$ a bázi $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ dostáváme známou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Její číslo podmíněnosti prudce roste se zvětšujícím se n.

Zřejmě báze $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ není vhodná. Dovedli bychom sestavit vhodnější bázi? Co musí funkce p_i splňovat, aby Vandermondova matice byla co nejjednodušší možná?

1.2 Lagrangeova interpolace

Budeme nyní pro interpolaci používat lagrangeovské bázové funkce l_i. Jde o polynomy stupně nejvýše n, splňující vztah

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \tag{3}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerova delta. Potom Lagrangeův interpolační polynom je dán vztahem

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

Úloha 1. *Vymyslete, jak sestavit Lagrangeovy bázové funkce l_i pro body $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$.*

[Hint: Jednotlivé bázové funkce l_i si nejprve nakreslete. Jaký je stupeň těchto polynomů?]

[Hint: Polynomy je možné samozřejmě určit řešením soustavy 3 rovnic, ale vyhněte se tomu.]

Řešení. Polynomy l_i získáme tak, že vezmeme polynom se správnými kořeny, který vydělíme jeho funkční hodnotou v bodě, kde má být hodnota $l_i(x_i) = 1$.

Postupně tak získáme jednotlivé $l_i(x)$:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2-4x+3), \\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}(x^2-3x), \\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2-x).
\end{aligned}$$

□

Úloha 2. *S využitím výsledku předchozí úlohy sestavte Lagrangeův interpolační polynom L_2 pro funkci f, která je daná tabulkou svých hodnot a vypočtěte přibližnou hodnotu funkce f v bodě 2, tj. $L_2(2) \approx f(2)$.*

i	0	1	2
x_i	0	1	3
$f(x_i)$	1	2	2

Řešení. Lagrangeův interpolační polynom je dán vztahem

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \quad \text{kde} \quad l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$L_2(x) = \frac{1}{3}(x^2-4x+3) - \frac{2}{2}(x^2-3x) + \frac{2}{6}(x^2-x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

a $L_2(2) = \frac{7}{3}$. □

1.2.1 Chyba Lagrangeovy interpolace

Jak velký může být rozdíl mezi $L_n(x)$ a $f(x)$ v obecném bodě $x \in [a,b]$, mimo interpolačních uzlů? Odpověď dává věta z přednášky:

Věta 1. *Nechť $f \in C^{n+1}([a,b])$ a $x_i \in [a,b]$, $i = 0,\dots,n$. Nechť L_n je interpolační polynom, tj. $L_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\dots,n$. Pak pro každý $x \in [a,b]$ platí*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{n} (x-x_i), \quad \textit{pro nějaké} \quad \xi_x \in [a,b]. \tag{4}$$

Větu lze prakticky používat jen v tom případě, známe-li horní odhad $f^{(n+1)}$ na celém intervalu $[a,b]$.

Úloha 3. *Spočtěte Lagrangeovu interpolaci funkce $f(x) = \cos^2(x)$ v bodech $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$.*
Odhadněte chybu interpolace použitím formulky z předchozí věty. V jakém bodě na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je tento odhad nejvyšší?
Určete odhad a skutečnou chybu interpolace v bodě $\frac{\pi}{4}$.
[Hint: $f''(x) = -2\cos(2x)$.]

Řešení. Lagrangeova interpolace má tvar

$$L_1(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) = f(0)\,\frac{x-\frac{\pi}{2}}{0-\frac{\pi}{2}} + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{x-0}{\frac{\pi}{2}-0} = -\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

Odhadneme druhou derivaci: $|f''(x)| = |-2\cos(2x)| \leq 2$ pro $x \in [0, \pi/2]$.
Dosazením do (4) dostaneme

$$|f(x) - L(x)| \leq \frac{1}{2!} 2 \left|(x-0)(x-\frac{\pi}{2})\right| = \left|(x-0)(x-\frac{\pi}{2})\right|.$$

Na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ nabývá odhad maximální hodnotu pro $x = \frac{\pi}{4}$. Platí:

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.6169.$$

Skutečná chyba v bodě $x = \frac{\pi}{4}$ je

$$\left|\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - L_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 0.$$

□

1.3 Chebyshevovy body

V případě Lagrangeovy interpolace na ekvidistantních uzlech může docházet k velkým oscilacím na kraji uvažovaného intervalu. Tomuto nepříznivému jevu můžeme zabránit použitím tzv. *Chebyshevových bodů*, které jsou na intervalu $[-1, 1]$ definované jako

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\,\pi}{2n+2}\right), \quad j = 0, \ldots, n,$$

tj. jako kořeny Chebyshevova polynomu T_{n+1}.
Chebyshevovy body jsou více soustředěny ke kraji intervalu $[-1, 1]$. Pokud chceme pracovat na obecném intervalu $[a, b]$, stačí použitím lineární transformace uzly x_j, $j = 0, \ldots, n$ přetransformovat, jak jsme si ukázali na minulém cvičení.

1.4 Kubický interpolační spline

Jiný přístup k interpolaci je po částech polynomiální interpolace. Funkci f budeme interpolovat pomocí kubických polynomů tak, aby pro výslednou interpolaci S platilo:

- $f(x_i) = S(x_i)$,
- S je třídy C^2,
- S je "přirozený", tedy $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

1.5 Porovnání metod na interpolaci funkcí

Budeme používat připravený skript `interpolace.m`. Skripty používají funkci `lagrangebary.m`[1] na hledání Lagrangeových polynomů a Matlabovskou funkci `spline` na výpočet interpolace pomocí kubického splinu.
Výstupem jsou čtyři grafy. V prvním grafu nalezneme Lagrangeovu intepolaci na ekvidistantních uzlech, ve druhém Lagrangeovu intepolaci na Chebyshevových bodech a ve třetím interpolaci pomocí kubického splinu. Černá přerušovaná čára reprezentuje přesné řešení. Poslední graf zobrazuje chybu interpolace se skutečným řešením ve všech třech případech.
Ve skriptech lze volit interpolovanou funkci (funkce z Úlohy 4 jsou připraveny) a počet uzlů k.

[1]Funkce `lagrangebary.m` používá pokročilejší techniku vyhodnocování Lagrangeových interpolantů, tedy *druhou barycentrickou formuli.* Ta má totiž lepší numerickou stabilitu oproti naivnímu vyhodnocení. Není to ale pro nás podstatné, pouze funkci používáme ze skriptu `interpolace.m`.

Úloha 4. *Porovnejte Lagrangeovu interpolaci na ekvidistantních uzlech, Lagrangeovu interpolaci pomocí Chebyshevových bodů a interpolaci kubickým splinem v závislosti na počtu uzlů postupně pro tři různé funkce*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(3x), \\ g(x) &= |x|, \\ h(x) &= \operatorname{sign}(x), \end{aligned}$$

na intervalu $[-1, 1]$.

(i) *Začněme s funkcí f. Zkuste si vykreslit interpolaci s* 5, 10, 25, 30 *a* 40 *uzly. Porovnávejte velikost chyby jednotlivých interpolací. Lze říci, že se zvyšujícím se počtem uzlů dostáváme přesnější interpolaci?*

(ii) *Dále zkoumejme funkci g. Napřed použijme* 5 *a* 6 *uzlů. Jak se liší aproximace na okolí bodu* 0 *na základě parity počtu uzlů? Jak se bude interpolace chovat, pokud zvolíme více uzlů, například* 10, 15, 20 *a nebo* 40 *uzlů?*

(iii) *Nakonec budeme interpolovat nespojitou funkci h. Opět použijme* 5 *a* 6 *uzlů. Liší se aproximace na okolí bodu* 0 *na základě parity počtu uzlů? Pokud ano, tak pro kterou interpolaci a čím to je způsobeno? Zkuste i nyní použít více uzlů, například* 10, 15 *a* 20*. Dojde někdy k dostatečnému zpřesnění řešení?*

Řešení.

(i) Interpolace v Chebyshevových uzlech netrpí Rungeho jevem, lze jít do tisíců bodů. Na druhou stranu interpolace v ekvidistantních uzlech začíná zlobit mezi 40 a 50 uzly; zaokrouhlovací chyby se kumulují.

(ii) Parita ovlivňuje aproximaci vrcholu a toho, zda aproximujeme přímo bod 0. Interpolace v ekvidistatních bodech začíná mezi 10 a 15 trpět Rungeho jevem; interpolant je u hranice naprosto nepoužitelný. Chebyshevovy uzly fungují výtečně.

(iii) Parita se projeví pouze u Lagrangeovy interpolace pomocí Chebyshevových bodů. Pokud je počet uzlů lichý, nevyjde vlivem zaokrouhlovaní prostřední Chebyshevův bod přesně 0, takže hodnotu h v tomto bodě (okolo nespojitosti!) nelze předvídat. Intepolace v ekvidistatních bodech trpí Rungeho jevem u hranice. Chebyshevovy body (a poněkud méně spline) trpí Gibbsovým jevem, tedy oscilací okolo nespojitosti h v $x = 0$. □