Cvičení 10 - zadání pro studenty

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 3. prosince 2023

1 Optimalizace

Na přednášce zaznělo několik metod, jak najít

$$\bar{x} = \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x),$$

kde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subset \mathbb{R}^n$. Na cvičení z nich probereme jen jednu a to metodu zlatého řezu.

1.1 Metoda zlatého řezu

Metoda zlatého řezu funguje na principu bisekce. Na intervalu, na kterém chceme najít minimum, zvolíme dva body. Pomocí jejich funkčních hodnot zvolíme menší interval, na kterém budeme minimum funkce hledat.

Algorithm 1 Metoda zlatého řezu

```
Require: f, a_0, b_0
  a = a_0, b = b_0
  ρ = (3 − √5)/2
  for k = 1, ... do
    u = a + ρ(b − a)
    v = b − ρ(b − a)
    if f(u) < f(v) then
      b = v
    else
      a = u
    end if
  end for
```

Úloha 1. *Pomocí Algoritmu 1 napište funkci v MATLABu na hledání minima metodou zlatého řezu.*
(Navíc) *Metoda zlatého řezu byla navržena tak, aby bylo možné použít výsledky z předchozích iterací. Zkuste funkci naprogramovat tak, aby bylo potřeba vyhodnocovat co nejméně funkčních hodnot.*

Úloha 2. *Pomocí funkce z Úlohy 1 zkoumejte nalezení minima následujících funkcí s daným počátečním intervalem:*

a) $f(x) = x^2$, $a = -1$, $b = 1$,

b) $f(x) = \sin(x)$, $a = -3$, $b = 6$,

c) $f(x) = \sin(x)$, $a = -3$, $b = 10$,

d) $f(x) = 1.2 + x^2 - x - e^{-x}$, $a = -3$, $b = 3$.

Na každou úlohu použijte 50 iterací. Pozorujte volbu bodů u a v. Bylo nalezeno skutečně minimum funkce?

2 Ortogonální polynomy

Ortogonální polynomy jsou důležité funkce v numerické matematice. Aplikaci nalezneme v mnoha metodách. Důležité nejsou pouze samotné funkce, ale i jejich kořeny.

2.1 Legendrovy polynomy

Nejznámější ortogonální polynomy jsou tzv. *Legendrovy polynomy* na $[-1, 1]$ odpovídající skalárnímu součinu $(f, g) = \int_{-1}^{1} fg\,dx$. Získat je můžeme pomocí Gram-Schmidtovy ortogonalizace polynomů $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$. Lze je také vyjádřit rekurentním vztahem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= 1, \\
\mathcal{L}_1(x) &= x, \\
\mathcal{L}_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1}\, x\, \mathcal{L}_n(x) - \frac{n}{n+1}\, \mathcal{L}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Úloha 3. *Spočtěte $\mathcal{L}_2$ jak pomocí Gram-Schmidtovy ortogonalizace, tak pomocí 3-členné rekurence. Liší se polynomy? Liší se jejich kořeny?*

Pro numerický výpočet zadaného integrálů na intervalu (a, b) musíme buď spočíst Gram-Schmidtovu ortogonalizaci na intervalu (a, b), nebo, což je v praxi obvyklejší postup, přeškálovat Legendrovy polynomy na zadaný interval.

Úloha 4. *Pomocí přeškálování $\mathcal{L}_2$ (odvozeného rekurentně) z Úlohy 3 odvoďte Legendrovo polynom na intervalu $[2, 8]$. Normu zachovat nepotřebujeme.*

[Hint: Najděte předpis lineární funkce, která bod -1 zobrazí do 2 a bod 1 zobrazí do 8.]

Úloha 5 (Navíc)**.** *Dokážete napsat rekurentní vzorec pro Legendrovo polynom na intervalu $[a, b]$?*

2.2 Chebyshevovy polynomy

Dalšími používanými ortogonálními polynomy jsou tzv. *Chebyshevovy polynomy* na $[-1, 1]$ odpovídající skalárnímu součinu

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{fg}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Vyjádřit je můžeme ve tvaru:

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Úloha 6. *Ukažte, že funkce T_n je opravdu polynom stupně n.*

[Hint: Zkuste odvodit rekurentní vztah pro výpočet Chebyshevova polynomu T_{n+1}.]

[Hint: S použitím součtových vzorců vyjádřete $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ a vhodně dosaďte za α a β.]

V Úloze 6 jsme odvodili rekurentní vztah pro vyjádření Chebyshevových polynomů:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, \\
T_1(x) &= x, \\
T_{n+1}(x) &= 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

V případě ortogonálních polynomů nás často zajímají jejich kořeny a body extrému. Chebyshevovy polynomy mají pro obojí vzorec, jak dané body spočíst.

Úloha 7. *Ukažte, že pro T_n jsou:*

a) jeho kořeny ve tvaru

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

b) jeho extrémy ve tvaru

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n.$$