Cvičení 10 - zadání a řešení úloh

Základy numerické matematiky - NMNM201   Verze z 4. prosince 2024

1 Optimalizace

Na přednášce zaznělo několik metod, jak najít

$$\bar{x} = \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x),$$

kde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subset \mathbb{R}^n$. Na cvičení se budeme věnovat jen jedné, a to metodě zlatého řezu.

1.1 Metoda zlatého řezu

Metoda zlatého řezu funguje na principu bisekce. Na intervalu, na kterém hledáme minimum, zvolíme dva body. Pomocí jejich funkčních hodnot určíme menší interval, na kterém budeme minimum funkce hledat.

Algoritmus 1 Metoda zlatého řezu

Vstup: f, a_0, b_0
  $a = a_0$, $b = b_0$
  $\rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
  for $k = 1, \ldots$ **do**
    $u = a + \rho(b - a)$
    $v = b - \rho(b - a)$
    if $f(u) < f(v)$ **then**
      $b = v$
    else
      $a = u$
    end if
  end for

Úloha 1. *Podle Algoritmu 1 napište funkci v MATLABu na hledání minima metodou zlatého řezu. Metoda zlatého řezu je zkonstruována tak, aby bylo znovu použito vyhodnocení f z předchozích iterací. Naprogramujte funkci tak, abyste v každé iteraci (kromě první) vyhodnocovali f pouze v jednom bodě.*

Řešení.

```
function [x,fx] = zlaty_rez(f,a,b,max_it)
  rho = (3-sqrt(5))/2;
  u = a+rho*(b-a); v = b-rho*(b-a);
  fa = f(a); fb = f(b); fu = f(u); fv = f(v);
  for k = 1:max_it
    if fu<fv
      b = v; fb = fv;
      v = u; fv = fu;
      u = a+rho*(b-a); fu = f(u);
    else
      a = u; fa = fu;
      u = v; fu = fv;
      v = b-rho*(b-a); fv = f(v);
    end
  end
  points = [a,b,u,v];
  [fx,i] = min([fa, fb, fu, fv]);
  x = points(i);
end
```

□

Úloha 2. *Pomocí funkce z Úlohy 1 zkoumejte nalezení minima následujících funkcí s daným počátečním intervalem:*

(a) $f(x) = x^2$, $a = -1$, $b = 1$,

(b) $f(x) = \sin(x)$, $a = -3$, $b = 6$,

(c) $f(x) = \sin(x)$, $a = -3$, $b = 10$,

(d) $f(x) = 1.2 + x^2 - x - e^{-x}$, $a = -3$, $b = 3$.

Na každou úlohu použijte 15 iterací. Pozorujte volbu bodů u a v. Bylo nalezeno skutečně minimum funkce?

Řešení. Úlohy (a)–(c) naleznou minimum. V úloze (d) konvergujeme k lokálnímu minimu, ale nejedná se o globální minimum na intervalu $[-3,\ 3]$. Úlohy (b) a (c) pokaždé konvergují k jinému minimu. □

2 Ortogonální polynomy

Ortogonální polynomy jsou důležité funkce v numerické matematice. Aplikaci nalezneme v mnoha metodách. Důležité nejsou pouze samotné funkce, ale i jejich kořeny.

2.1 Legendrovy polynomy

Nejznámější ortogonální polynomy jsou tzv. *Legendrovy polynomy* na $[-1,1]$ odpovídající skalárnímu součinu $(f,g) = \int_{-1}^{1} fg\,dx$. Získat je můžeme pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace polynomů $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$. Lze je také vyjádřit rekurentním vztahem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= 1,\\
\mathcal{L}_1(x) &= x,\\
\mathcal{L}_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1}\, x\, \mathcal{L}_n(x) - \frac{n}{n+1}\, \mathcal{L}_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Úloha 3. *Spočtěte $\mathcal{L}_2$ jak pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, tak pomocí 3-členné rekurence. Liší se polynomy? Liší se jejich kořeny?*

Řešení. Legendrovy polynomy pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace:

$$\begin{aligned}
q_0(x) &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
q_1(x) &= \frac{x - (x, q_0)\, q_0}{\|\dots\|} = \frac{x - 0}{\|x\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}\, x, \\
q_2(x) &= \frac{x^2 - (x^2, q_0)\, q_0 - (x^2, q_1)\, q_1}{\|\dots\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3} - 0}{\|x^2 - \frac{1}{3}\|} = \frac{\sqrt{40}}{8} \left(3x^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Legendrovy polynomy pomocí rekurence:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= 1, \\
\mathcal{L}_1(x) &= x, \\
\mathcal{L}_2(x) &= \frac{3}{2} x\, \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2} \mathcal{L}_0 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(3x^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Polynomy spočítané Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací a rekurencí se liší pouze o násobek skalárem. Kořeny mají stejné. □

Úloha 4. *Pomocí přeškálování $\mathcal{L}_2$ (odvozeného rekurentně) z Úlohy 3 odvoďte Legendrův polynom na intervalu $[2, 8]$. Normu zachovat nepotřebujeme.*

Nápověda. *Najděte předpis afinní funkce, která bod -1 zobrazí do 2 a bod 1 zobrazí do 8.*

Řešení. Hledáme tedy afinní funkci $f(x) = ax + b$, která správně zobrazí krajní body intervalu. Dostáváme:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x} &= 3(x + 1) + 2 = 3x + 5, && x \in [-1, 1], \\
x &= \frac{\widetilde{x} - 5}{3}, && \widetilde{x} \in [2, 8].
\end{aligned}$$

Tedy

$$\widetilde{\mathcal{L}_2}(\widetilde{x}) = \mathcal{L}_2\left(\frac{\widetilde{x} - 5}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{\widetilde{x} - 5}{3}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{6}\left((\widetilde{x} - 5)^2 - 3\right) = \frac{1}{6}\left(\widetilde{x}^2 - 10\widetilde{x} + 22\right). \qquad \square$$

Úloha 5 (Navíc)**.** *Dokážete napsat rekurentní vzorec pro Legendrovy polynomy na intervalu $[a, b]$?*

Řešení. Obecný vzorce pro přeškálování z intervalu $[-1, 1]$ na interval $[a, b]$ lze zapsat takto:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x} &= \frac{b - a}{2}(x + 1) + a \\
x &= \frac{\widetilde{x} - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} = \frac{2\widetilde{x} - (b + a)}{b - a}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}_0}(\widetilde{x}) &= 1, \\
\widetilde{\mathcal{L}_1}(\widetilde{x}) &= \frac{2\widetilde{x} - (b + a)}{b - a}, \\
\widetilde{\mathcal{L}_{n+1}}(\widetilde{x}) &= \frac{2n + 1}{n + 1}\, \frac{2\widetilde{x} - (b + a)}{b - a}\, \widetilde{\mathcal{L}_n}(\widetilde{x}) - \frac{n}{n + 1}\, \widetilde{\mathcal{L}_{n-1}}(\widetilde{x}), \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \qquad \square$$

2.2 Chebyshevovy polynomy

Dalšími používanými ortogonálními polynomy jsou *Chebyshevovy polynomy* na $[-1,1]$ odpovídající skalárnímu součinu

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \frac{fg}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Vyjádřit je můžeme ve tvaru

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right), \quad n = 0,1,\dots \tag{1}$$

Úloha 6. *Ukažte, že funkce T_n je opravdu polynomem stupně právě n.*

Nápověda. *Zkuste odvodit rekurentní vztah pro výpočet Chebyshevova polynomu T_{n+1}.*

Nápověda. *S použitím součtových vzorců vyjádřete $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ a vhodně dosaďte za α a β.*

Řešení. Napřed si uvědomíme, že

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \cos(0) = 1, \\ T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x. \end{aligned}$$

První dva členy jsou tedy polynomy stupně 0 a 1.
Budeme chtít upravovat výraz $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ pomocí součtových vzorců:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] + [\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)] \\ &= 2\cos(\alpha)\cos(\beta). \end{aligned}$$

Budeme substituovat $\alpha = n\arccos(x)$ a $\beta = \arccos(x)$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) &= 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\ T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2x\, T_n(x) \\ T_{n+1}(x) &= 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak rekurentní zápis pro výpočet dalších funkcí. Důkaz, že se jedná o polynom stupně n provedeme indukcí. První dva členy jsme již ověřili. Nechť T_{n-1} a T_n jsou polynomy stupně $n-1$, respektive n. Potom nutně $2x\,T_n(x)$ je polynom stupně $n+1$. Odečtením polynomu stupně $n-1$ ale stále musí být výsledný polynom stupně $n+1$. Tím jsme ukázali, že T_{n+1} je polynom stupně $n+1$. □

V Úloze 6 jsme odvodili rekurentní vztah pro vyjádření Chebyshevových polynomů:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\dots \end{aligned}$$

V případě ortogonálních polynomů nás často zajímají jejich kořeny a body extrému. Pro Chebyshevovy polynomy máme vzorce, jak tyto body spočíst.

Úloha 7. *Ukažte, že pro T_n platí následující.*

(a) Všechny kořeny T_n na $\mathbb{R}$ leží v $(-1,1)$ a splňují

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\,\pi}{2n}\right), \quad k = 1,\dots,n. \tag{2}$$

(b) Všechny extrémy T_n na $[-1,1]$ splňují

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0,\dots,n. \tag{3}$$

Řešení.

(a) Dosazením (2) do (1) okamžitě zjišťujeme, že $T_n(x_k) = 0$. Protože T_n je polynom stupně právě n, který má právě n kořenů (opakovaných dle násobnosti), a tedy (2) reprezentuje všechny kořeny na $\mathbb{R}$. Zároveň vidíme, že všechny leží v $(-1, 1)$.

(b) Dosazením (3) do (1) okamžitě zjišťujeme, že $T_n(x_k) = (-1)^k$. Zároveň vidíme, že z definice T_n plyne, že $-1 \leq T_n \leq 1$ na $[-1, 1]$. Takže (3) jsou určitě globální extrémy T_n na $[-1, 1]$.

To, že (3) představuje všechny extrémy na $[-1, 1]$ lze nahlédnout různě. Třeba lze explicitně vyřešit rovnici $|T_n(x)| = 1$. Nebo lze uvážit, že $x_0 = 1$ a $x_n = -1$ jsou extrémy na hranici $[-1, 1]$ zatímco pro vnitřní extrémy musí platit, že T_n' mění znaménko přechodem přes x_k, $k = 1, \ldots, n-1$. Takže T_n', polynom stupně $n-1$, má $n-1$ kořenů x_k, $k = 1, \ldots, n-1$, a žádné další. $\square$