Cvičení 9 - zadání a řešení úloh

Základy numerické matematiky - NMNM201   Verze z 27. listopadu 2023

1 Nelineární algebraické rovnice

Budeme se zabývat hledáním kořene x_* dané funkce f v situaci, kdy nejsme schopni jej analyticky spočítat. Existují dva typy metod:

- "intervalové": Začneme s intervalem $[a, b]$, ve kterém je umístěn kořen, a pak jej postupně zkracujeme. Metody: bisekce, regula falsi, ...
- "bodové": začneme v bodě x_0 (nebo více) a postupně konstruujeme další aproximace kořenu, například pomocí derivací: Newtonova metoda a její modifikace, metoda sečen, fixed-point

V tomto cvičení se budeme věnovat pouze bisekci a Newtonově metodě jako zástupcům intervalových a bodových metod. (Metodě fixed-point se budeme věnovat v domácím úkolu.)

1.1 Funkční proměnné v MATLABu

Abychom mohli uchopit funkci jako proměnnou, budeme využívat následující syntaxi:

```
f = @(x) x.^2 - 4*x + 1;     g = @(x) sin(pi*x);
```

kde $f = x^2 - 4x + 1$ a $g = \sin(\pi x)$.

Potom můžeme tyto funkce použít jako vstupní parametr jiné funkce, například:

```
[x,iter]=bisection(f,a,b,tol,sol)
[x,iter]=newton(f,fd,x0,tol,sol)
[x,iter]=newton_convergence(f,fd,x0,tol)
```

kde `f` je zadaná funkce, `fd` její derivace a `sol` je hledaný kořen zadané funkce. Tolerance je určená proměnnou `tol`.

Je možné také rovnou psát funkce `f = @(x) ...` do argumentu, např.:

```
[x,iter]=bisection(@(x) x.^4 - 1,0,10,1e-8,1)
```

1.2 Metoda bisekce a Newtonova metoda

V celé této kapitole budeme pracovat s těmito funkcemi:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x - 6, \\ g(x) &= x^3, \\ h(x) &= 1.2 + 2x^2 - x - e^{-x}. \end{aligned}$$

Naším úkolem je spočítat všechny kořeny pomocí bisekce a Newtonovy metody

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{1}$$

Úloha 1. *Dříve, než začneme příklady počítat pomocí bisekce nebo Newtonovy metody, je dobré si rozmyslet, jak budeme pro jednotlivé funkce volit počáteční body a intervaly.*

Může vést u funkcí f, g, h různá volba intervalů nebo počátečních bodů k různým výsledkům?

Řešení. U funkce f Newtonova metoda nezkonverguje pro $x_0 = -1/2$. Pokud $x_0 > -1/2$, pak Newtonova metoda konverguje ke kořenu 2, pokud $x_0 < -1/2$, tak metoda konverguje ke kořenu -3.

Vadí nám nutně u funkce g, že je derivace v kořeni rovna nule? Zkusme napsat Newtonovu formuli. Vyjde: $x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k$. Bude metoda konvergovat dobře?

U funkce h záleží na volbě počátečního bodu. Řešení může být ovlivněno lokálním minimem v bodě $x = 0$. □

Úloha 2. *Porovnejme rychlost konvergence bisekce a Newtonovy metody na všech třech příkladech.*

Využijte funkce `bisection` *a* `newton`*. Toleranci zvolte* 1e $-$ 8*. Pokud vás zajímá průběh a jednotlivé aproximace řešení Newtonovou metodou, použijte funkci* `newton_convergence`

Řešení. Pro f a h platí, že pokud začneme ve vhodných bodech, Newtonova metoda konverguje výrazně rychleji než bisekce. Pro g Newtonova metoda konverguje pomaleji, navíc zastavuje daleko od kořene.

Brzké zastavení lze odstranit volbou nižší tolerance (problém je v tom, že je testujeme funkční hodnotu v x_k a funkce g má v okolí kořene malé funkční hodnoty). □

1.3 Asymptotický řád konvergence

Definice 1. *Nechť posloupnost bodů $\{x_n\}$ získaná iterační metodou konverguje k x. Pak řekneme, že konverguje s řádem p, pokud pro nějaká $p \in \mathbb{R}$ a $C \in (0, \infty)$ platí*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x - x_{k+1}|}{|x - x_k|^p} = C.$$

Pro $p = 1$ požadujeme navíc $C \in (0, 1)$ a poté řekneme, že metoda konverguje lineárně.

Pokud $p = 2$, pak metoda konverguje kvadraticky.

Můžete si rozmyslet, že každá metoda může konvergovat jen s jedním řádem p a navíc $p \geq 1$.

Linearita metody bisekce O metodě bisekce víme, že kořen x_* spojité funkce $f(x)$ se nachází někde v intervalu $[a, b]$. Největší možná chyba v k-tém kroku je proto $e_k = \frac{1}{2}|b_k - a_k|$. Také je okamžitě vidět, že $e_{k+1} = \frac{1}{2}e_k$. Metoda bisekce tedy konverguje lineárně s konstantou $C = \frac{1}{2}$.
Rozdíl mezi lineární a kvadratickou konvergencí ilustruje následující úloha:

Úloha 3. *Kolik potřebujeme iterací bisekce na to, abychom odhad chyby e_k zmenšili alespoň o řád? A o 7 řádů?*
Newtonova metoda za určitých předpokladů konverguje kvadraticky. Pokud by platilo, že

$$|x - x_{k+1}| = |x - x_k|^2$$

a chyba $|x - x_0| = 0.1$, kolik potřebujeme iterací na to, abychom chybu zmenšili o řád? A o 7 řádů?

Řešení. Bisekce: $\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 10^{-n}$, $\lceil \log_2 10^n \rceil = k$, pro 1 řád potřebujeme $\lceil \log_2 10 \rceil = 4$ iterace, pro 7 řádů $\lceil \log_2 10^7 \rceil = 24$ iterací, tj. přibližně 7krát více.
Newtonova metoda: chyba $|x - x_0| = 0.1$, $|x - x_1| = 0.01$, $|x - x_2| = 0.0001$, $|x - x_3| = 10^{-8}$. Tedy pro jeden řád potřebujeme jednu iteraci, pro 7 řádů 3 iterace. □

1.4 Podrobněji k Newtonově metodě

Nyní si odvodíme i nějaké postačující podmínky pro konvergenci Newtonovy metody.

Úloha 4. *Ukažte, zda bude Newtonova metoda konvergovat v následujících případech:*

a) *Nechť* $f \in \mathcal{C}^\infty$ *je ryze konvexní rostoucí spojitě diferencovatelná funkce, nechť má nějaký kořen* x_*.

b) *Co by se změnilo pro* $f \in \mathcal{C}^\infty$ *rostoucí a ryze konkávní, klesající a ryze konvexní, klesající a ryze konkávní.*

c) *Co by se v jednotlivých případech změnilo, kdyby* $f \in \mathcal{C}^\infty$ *byla rostoucí či klesající a konvexní či konkávní místo na* $\mathbb{R}$ *jen na intervalu* $[x_*, x_0]$ *(resp.*$[x_0, x_*]$*)?*

Řešení. Vše stačí ukázat pomocí náčrtku dané situace a nebo použít Fourierovu větu z přednášky:

a) Konverguje.

b) Opět konverguje pro všechny kombinace.

c) Pokud by x_1 bylo na opačné straně od x_* (tj. $f(x_0)f''(x_0) < 0$), nevíme, jak bude posloupnost pokračovat.

□

Úloha 5 (Navíc)**.** *Umíte zdůvodnit, proč někdy a za jakých podmínek konverguje Newtonova metoda pomaleji než kvadraticky?*
[Hint: Vraťte se k případu funkce g.]

Řešení. Kvadratická konvergence nastává pro $f'(x_*) \neq 0$. Pokud $f'(x_*) = 0$ a $f''(x_*) \neq 0$, pišme $f(x) = c(x - x_*)^2 + O((x - x_*)^3)$, pak $x_{k+1} = x_k - \frac{c(x_k - x_*)^2 + O((x_k - x_*)^3)}{2c(x_k - x_*) + O((x_k - x_*)^2)} = \frac{1}{2}(x_k + x_*) + O((x_k - x_*)^2)$. Další potíže s konvergencí mohou nastat, když f není hladká. □

Úloha 6. *Newtonova metoda občas selhává. Odhalte problémy, které nastanou, zvolíme-li* $x_0 = 1$ *pro funkce definované následujícími předpisy*

a) $f(x) = 2x - x^2$,

b) $f(x) = \begin{cases} -(-x)^{1/2} & x < 0, \\ x^{1/2} & x \geq 0. \end{cases}$

Řešení. a) $f'(1) = 0$, x_1 nelze definovat/numericky může vyjít řádově $x_1 \approx \frac{1}{\varepsilon}$
b) střídají se hodnoty ± 1. □