Cvičení 8 - zadání a řešení úloh

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 21. listopadu 2023

---

1 Lokalizace vlastních čísel pomocí Gerschgorinovy věty

Věta 1. *Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a r_i značí součet mimodiagonálních prvků v i-tém řádku*

$$r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Pak všechna vlastní čísla matice A leží ve sjednocení Gerschgorinovych kruhů $\cup_{i=1}^{n} D_i$, kde

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}.$$

Pokud m kruhů tvoří souvislou oblast, která je disjunktní od ostatních, pak právě m vlastních čísel matice A leží v této souvislé oblasti.

Úloha 1. *Pomocí Gerschgorinovy věty lokalizujte vlastní čísla matice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Gerschgorinovy kruhy odpovídající řádkům jsou:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 2\}, \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}, \\ D_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 2\}. \end{aligned}$$

Na základě věty jedno vlastní číslo leží v kruhu D_3 a dvě vlastní čísla leží v $D_1 \cup D_2$.

Gerschgorinovy kruhy odpovídající sloupcům jsou:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 3\}, \\ E_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}, \\ E_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Kombinací těchto výsledků zjistíme, ze jedno vlastní číslo leží v kruhu E_3 a dvě vlastní čísla v $D_1 \cup D_2$.

□

Úloha 2. *(navíc) Občas jednoduchou podobnostní transformací můžeme matici A převést na $D^{-1}AD$, jejíž Gerschgorinovy kruhy nám o vlastních číslech původní matice prozradí víc. Uvažujte*

$$D = diag(1, 2, 4)$$

pro matici A z předchozí úlohy a znovu lokalizujte její vlastní čísla.

Řešení. Transformovaná matice má tvar

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Gerschgorinovy kruhy odpovídající řádkům matice $D^{-1}AD$ jsou:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 6\}, \\
D_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 1\}, \\
D_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z+4| \leq 3/4\}.
\end{aligned}
$$

Nakreslením těchto kruhů vidíme, ze $D_1 \cup D_2$ nyní pokrývá vetší oblast než v předchozí úloze, tudíž nám poskytuje méně informací o lokaci dvou vlastních čísel ležících v této oblasti. Na druhou stranu kruh D_3 je mnohem menší než v předchozí úloze, tudíž nám dává přesnější informaci o vlastním čísle.

□

2 Stacionární iterační metody

Přímé metody (jako například LU rozklad) pro řešení soustav lineárních rovnic $Ax = b$ s regulární maticí, po nějaké době výpočtu, vydají jedno numerické řešení. Myšlenka iteračních metod je principálně odlišná, spočívá v konstrukci *posloupnosti* aproximací (přibližných řešení) $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$, jež by se měla přibližovat skutečnému řešení x. Výhodou iteračních metod je, že (nějakou) aproximaci získáváme v každé iteraci, tj. kdykoli zastavíme výpočet.

2.1 Klasické iterační metody

Klasické iterační metody jsou založeny na štěpení matice soustavy $A = M - N$, kde matice M je regulární a snadno invertovatelná. Dosazením do vztahu $Ax = b$ postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
(M-N)x &= b \\
Mx &= Nx + b \\
x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b.
\end{aligned}
$$

Je-li dána počáteční aproximace řešení x_0, můžeme definovat iterační proces

$$x_k = M^{-1}Nx_{k-1} + M^{-1}b.$$

Pro analýzu stacionárních iteračních metod je důležitý následující vztah mezi chybami dvou následujících přibližných řešení x_{k-1} a x_k:

$$x - x_k = M^{-1}N\left(x - x_{k-1}\right) = \left(I - M^{-1}A\right)\left(x - x_{k-1}\right).$$

2.2 Příklady klasických iteračních metod

Klasické iterační metody jsou založeny na štěpení ve tvaru $A = D - L - U$, kde D je hlavní diagonála, $-L$ je striktně dolní trojúhelník matice A a $-U$ je striktně horní trojúhelník matice A. Jednotlivé metody pak lze odvodit z rovnice

$$(D - L - U)x = b.$$

- Jacobiho metoda je definována iterací

$$Dx_k = Lx_{k-1} + Ux_{k-1} + b,$$

- Gauss–Seidelova metoda je zas definována jako

$$Dx_k = Lx_k + Ux_{k-1} + b.$$

2.3 Asymptotická konvergence

Z přednášky víme, že metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(M^{-1}N) < 1$. Tím myslíme, že pro libovolný počáteční vektor chyba $x - x_k$ konverguje k nulovému vektoru.

Úloha 3. *Pro matici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{případně (navíc)} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

odvoďte matici $M^{-1}N$ z Jacobiho a Gauss–Seidelovy metody a rozhodněte, zda metody budou konvergentní, nebo ne. Pro výpočty inverzí matice a vlastních čísel můžete využít MATLAB.

Řešení.

$$(M^{-1}N)_{\text{Jacobi}} = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{sp}((M^{-1}N)_{\text{Jacobi}}) = \{-1, 1/2, 1/2\},$$

takže Jacobiho metoda konvergentní není, zatímco Gauss–Seidel ano, protože

$$(M^{-1}N)_{\text{GS}} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & 3/8 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{sp}((M^{-1}N)_{\text{GS}}) = \{0, 1/16 \cdot (5 \pm i\sqrt{7})\}.$$

□

2.4 Přechodový jev

Zatímco vlastnost $\rho(M^{-1}N) < 1$ zaručuje, že chyba $x - x_k$ konverguje k nulovému vektoru, což také zaručuje $\|x - x_k\|_* \to^{k\to\infty} 0$ pro libovolnou vektorovou normu, pro popis $\|x - x_k\|_*$ v úvodních iteracích (pro malé k) nemusí být $\rho(M^{-1}N)$ vypovídající.

Situaci, kdy chyba $\|x - x_k\|_*$ roste před tím, než dosáhne asymptotického chování odpovídajícímu $\left(\rho(M^{-1}N)\right)^k$, říkáme *přechodový jev*.

Úloha 4. *Naprogramujte Jacobiho a Gauss-Seidelovu metodu (doplňte předpřipravené skripty) a vyzkoušejte na skriptu* `iteracni_metody_jac_gs.m`.

[Hint: Nastudujte si v nápovědě MATLABu funkce `diag` *(z matice „vyzobne“ diagonálu jako vektor, z vektoru vytvoří diagonální matici),* `tril` *a* `triu`*.]*

I na základě pozorování odpovězte na následující otázky, případně odkažte na konkrétní úlohu ze skriptu `iteracni_metody_jac_gs.m`*:*

- *Konverguje-li metoda například v Euklidovské normě, musí konvergovat i v jiných vektorových normách?*
- *Kdy máme zaručenu monotonní konvergenci (například v Euklidovské normě)?*
- *Souvisí přítomnost přechodového jevu (tj. jevu, kdy chyba na začátku výpočtu nejprve roste) s velikostí maticových norem či spektrálního poloměru iterační matice?*
- *Lze v plné obecnosti vzájemně porovnat Jacobiho a Gauss-Seidelovu metodu? (Porovnáním máme na mysli výpovědi typu: Gauss-Seidelova metoda má vždy/nikdy rychlejší konvergenci než Jacobiho metoda. Jacobiho metoda konverguje pouze když/právě když Gauss-Seidelova metoda, atp.)*

Úloha 5 (navíc)**.** *Naprogramujte Jacobiho a Gauss-Seidelovu metodu s výpočtem nové aproximace po složkách.*

[Poznámka: tento způsob implementace bude v MATLABu pravděpodobně pomalejší, protože MATLAB je optimalizovaný pro práci s maticemi a vektory.]