Cvičení 6 - zadání pro studenty

Základy numerické matematiky - NMNM201   Verze z 6. listopadu 2023

1 Rayleighův podíl (Rayleigh quotient)

Pro hermitovskou matici $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ definujeme Rayleighův podíl

$$R(M,x) = \frac{x^*Mx}{x^*x}.$$

Úloha 1. *Nechť $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je hermitovská. Ukažte následující vlastnosti:*

(i) $R(\alpha M, \beta x) = \alpha R(M,x)$ *pro každé* α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$.

(ii) $R(M - \alpha I, x) = R(M,x) - \alpha$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) Nechť $Mv = \lambda v$ *pro nějaký nenulový* $v \in \mathbb{C}^n$. *Potom* $R(M,v) = \lambda$.

(iv) Nechť $\lambda_{\min}$ *a* $\lambda_{\max}$ *jsou nejmenší, respektive největší vlastní číslo matice* M. *Ukažte, že*

$$R(M,x) \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Proč požadujeme, aby matice M byla hermitovská (a nestačí například diagonalizovatelná)?

(v) (navíc) Nechť jsou vlastní čísla M seřazena sestupně a největší je jednonásobné, tedy

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Nechť v_1 je vlastní vektor příslušný λ_1. Ukažte, že

$$R(M,x) \in [\lambda_n, \lambda_2] \qquad \forall x \in v_1^{\perp}.$$

(vi) (navíc) $R(M,x) = \arg\min_{\mu\in\mathbb{R}} \|(M-\mu I)x\|^2$.

2 Mocninná metoda

Ne vždy je potřeba (a někdy to není ani technicky možné) nalézt celé spektrum dané matice. Cílem mocninné metody je nalezení jednoho vlastního páru (vlastního čísla a vlastního vektoru) matice.

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná matice (tj. má n lineárně nezávislých vlastních vektorů, které tvoří bázi prostoru $\mathbb{C}^n$),

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

kde pro $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ jsou vlastní čísla seřazena sestupně, tj.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,$$

a matice $S = [s_1, \ldots, s_n]$ je tvořena příslušnými normalizovanými vlastními vektory.

Pro jednoduchost předpokládejme, že $|\lambda_1|$ je dominantní vlastní číslo, tj. $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Nechť v je nenulový startovací vektor. Mocninnou metodu pak můžeme zapsat následujícím algoritmem:

Algoritmus 1 Mocninná metoda

Input: A, v

$v_0 = v/\|v\|$
for $k = 1, \ldots$ **do**
  $w = Av_{k-1}$
  $v_k = w/\|w\|$
  $\mu_k = v_k^* A v_k$
end for

Úloha 2. *Naprogramujte mocninnou metodu na základě Algoritmu 1 do předpřipraveného skriptu* `power_method.m`*. Poté spusťte* `power_method_test.m` *pro různé vstupní matice a počáteční vektory (připravené v komentáři ve skriptu, nebo vlastní). K čemu a jak rychle mocninná metoda konverguje? Všímejte si konvergence aproximace vlastního čísla i vektoru.*

Návodné otázky:

- *Dostali jsme vlastní číslo a vlastní vektor který jsme měli?*
- *Jak je rychlost konvergence ovlivněna volbou vlastních čísel?*
- *Jak je rychlost konvergence ovlivněna volbou počátečního vektoru? Co znamená a co se stane, když je v počátečním vektoru 0?*
- *Co se děje, je-li nějaké vlastní číslo záporné? Konverguje metoda i pro záporné dominantní vlastní číslo?*
- *Co se děje, je-li více čísel dominantních, tj. např.* $|\lambda_1| = |\lambda_2|$*?*

Úloha 3. *Dovedete nastavit vstupy tak, aby metoda nejdříve směřovala k* (λ_2, q_2)*, a až po delší době zkonvergovala k* (λ_1, q_1)*? Dovedete ukázat bizarnější nebo zajímavější příklad průběhu konvergence?*

Úloha 4. *Změní se odpověď na některou z otázek v Úloze 2, když budeme uvažovat skutečný praktický výpočet v konečné aritmetice (tj. když nebudeme vše počítat vzhledem k bázi vlastních vektorů a matice* `A` *nebude diagonální)?*

Úloha 5. *Co se změní, když matice* Λ *není diagonální? (Když původní matice* A *není diagonalizovatelná.) Všímejte si konvergence aproximace vektoru i vlastního čísla.*

3 Inverzní iterace

Úloha 6. *Nechť* A *je matice s vlastními čísly* λ_j *a odpovídajícími vlastními vektory* v_j*.*

1. *Nechť* $\mu \in \mathbb{C}$ *a* $(A - \mu I)$ *je regulární. Ukažte, že vlastní čísla a vlastní vektory matice* $(A - \mu I)^{-1}$ *jsou rovny* $(\lambda_j - \mu)^{-1}$ *a* v_j*.*
2. *Odvoďte takzvanou inverzní iteraci (*inverse iteration*) jako mocninnou metodu aplikovanou na matici* $(A - \mu I)^{-1}$*. K jakému číslu bude v obecném případě metoda konvergovat.*
3. *Naprogramujte inverse iteration v MATLABu (doplňte* `inverse_iteration.m`*) pro aproximaci vlastních čísel matice* A *a ověřte odpověď na předchozí otázku numericky s využitím skriptu* `run_inverse_iteration.m`*.*

Poznámka: Opakovaný výpočet $(A-\mu I)^{-1}v_k$ *v MATLABu buď řešte jako* `(A-mu*eye(n))\v`*, nebo jedním LU-rozkladem matice a řešením trojúhelníkových soustav.*