Cvičení 1 - zadání pro studenty

Základy numerické matematiky - NMNM201 Verze z 6. října 2023

1 Opakování

1.1 Vektorová norma

Definice 1 (Vektorová norma). *Norma je funkcionál splňující pro libovolné vektory x, $y \in \mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$ a pro libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ následující podmínky:*

1. $\|x\| \geq 0$, *a* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(pozitivní definitnost),*
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(trojúhelníková nerovnost),*
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *(pozitivní homogenita).*

1.2 Příklady vektorových norem

Nechť $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$. Mezi tři základní vektorové normy patří

jedničková norma	$\|x\|_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$
euklidovská ("dvojková") norma	$\|x\|_2 \equiv \|x\| \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$
maximová norma	$\|x\|_\infty \equiv \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\| .$

Úloha 1. *Pro uvedené normy nakreslete jednotkové koule v $\mathbb{R}^2$, tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$.*

Podle věty o ekvivalenci norem na konečně-dimenzionálním prostoru jsou všechny tyto normy topologicky ekvivalentní, tj. pro libovolné dvě normy $\| \cdot \|_\alpha$ a $\| \cdot \|_\beta$ existují konstanty $c, C \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha, \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Jedná se o teoretický výsledek, pro praktické použití, například měření chyby, jsou konstanty c a C často příliš velké/malé.

Úloha 2. *Ukažte, že platí*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[Hint (geometricky): Začněte s $\mathbb{R}^2$. Pro jaké vektory se normy nejvíce a nejméně liší?]

[Hint (algebraicky): Pracujte s $\|x\|_2^2$.]

1.3 Skalární součin

Definice 2 (Skalární součin). *Skalární součin je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ splňující pro libovolné vektory x, y, $z \in \mathbb{C}^n$ a pro libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{C}$ následující podmínky:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *a* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Každý skalární součin indukuje normu

$$\|x\| \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

pro niž navíc platí Cauchyho–Schwarzova nerovnost

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Vektory x a y jsou *ortogonální* (kolmé), pokud platí $\langle x, y \rangle = 0$.

Definice 3 (Euklidovský skalární součin)**.**

$$\langle x, y \rangle \equiv y^* x = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i x_i, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

1.4 Matice - připomenutí

- matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A = [a_{i,j}]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

- matice *transponovaná* $A^T = [a_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, *hermitovsky sdružená* $A^* = [\overline{a}_{j,i}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nazveme *symetrickou*, platí-li $A = A^T$, a *hermitovskou*, pokud $A = A^*$
- A reálná $\Rightarrow A^T = A^*$
- pro libovolnou čtvercovou matici A platí $\langle Ax, y \rangle = y^* Ax = (A^* y)^* x = \langle x, A^* y \rangle$
- čtvercová matice je *singulární* $\Leftrightarrow \exists x \neq 0$: $Ax = 0$; matice, která není singulární, se nazývá *regulární*
- vektor $v \neq 0$ a skalár λ jsou *vlastním vektorem/číslem* matice A, pokud $Av = \lambda v$
- hermitovskou matici nazveme *pozitivně definitní* (HPD), pokud $\forall x \neq 0$: $x^* Ax > 0$
- matice A je *normální*, pokud splňuje $AA^* = A^* A$, ekvivalentně je to unitárně diagonalizovatelná komplexní matice
- komplexní (reálná) čtvercová matice U typu $n \times n$ je *unitární*, pokud její sloupce/ řádky tvoří ON bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$); ekvivalentně $U^* U = UU^* = I$

1.5 Matice jako lineární zobrazení

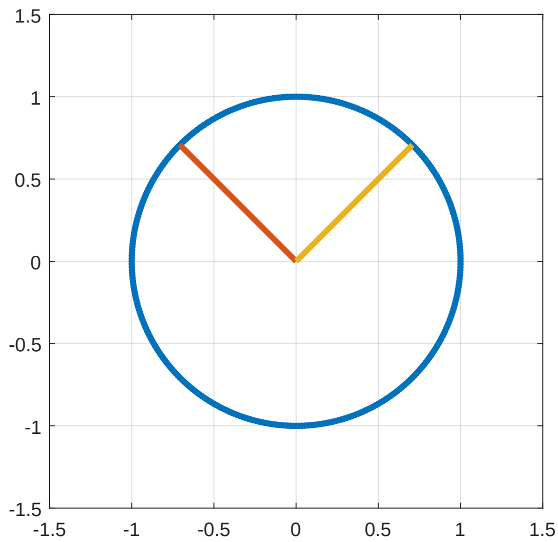
Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ definuje zobrazení z $\mathbb{C}^m$ do $\mathbb{C}^n$, které vektoru $x \in \mathbb{C}^m$ přiřazuje vektor $Ax \in \mathbb{C}^n$,

$$A : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad A : x \longmapsto Ax.$$

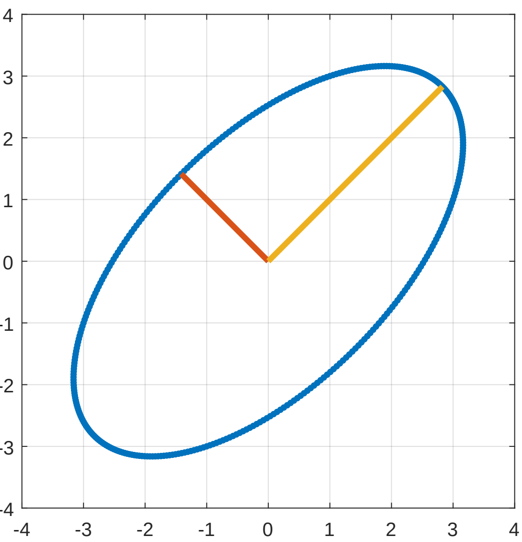
Uvažujme matici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tato matice má vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$ a odpovídající vlastní vektory $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)^T$ a $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T$. Působení matice A na jednotkovou kružnici lze nahlédnout na obrázku 1.



(a) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$



(b) $\{Ax \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

Obrázek 1: Zobrazení jedničkové kružnice pomocí matice A, zvýrazněné vlastní vektory.

1.6 Unitární transformace

Mnoho různých algoritmů na řešení soustav lineárních rovnic, problému nejmenších čtverců či problému výpočtu vlastních čísel je založeno na unitárních transformacích vektoru či matice,

$$x \mapsto Ux, \quad A \mapsto UA, \quad U \text{ unitární.}$$

- Jaké znáte vlastnosti unitárních matic?
- Uveďte některé příklady unitárních matic.

Úloha 3. *Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovávají jedničkovou či maximovou vektorovou normu. Pokud ne, najděte jednoduchý protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.*

2 Maticové normy

V analýze chování různých algoritmů pro řešení soustav lineárních rovnic, problémů nejmenších čtverců, problému vlastních čísel, etc. se často dostaneme do situace, kdy chceme odhadnout velikost nějakého vektoru, např. chyby, a máme jej vyjádřený jako obraz jiného vektoru při lineárním zobrazení, Ax. Potřebovali bychom jedním číslem odhadnout jeho velikost, například takto:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \tag{1}$$

Tedy velikost Ax je nanejvýš velikost x krát nějaké číslo, které je vlastností matice A – nazvěme ho normou matice A.
Pokusme se nyní objevit co nejvíce věcí o normě matice. Co nás tedy zajímá?

2.1 Otázky

- Jak měřit matici jedním číslem?
- Jak lze normu matice definovat?
- Jaké vlastnosti bychom od normy matice očekávali?
- Vymyslíme nějaké speciální případy? Nějaké matice, pro které víme, kolik by měla být norma?

2.2 Definice

Definice 4 (Generovaná norma)**.** *Maticovou normou generovanou vektorovou normou nazýváme funkcionál*

$$\|A\|_\alpha \equiv \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} = \max_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\alpha.$$

Takto definovaný funkcionál je normou ve smyslu definice normy. Z definice také triviálně vyplývá, že

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha.$$

Platí (pro počítání jednotlivých norem)

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \text{(maximum přes sloupcové součty abs. hodnot)}$$

$$\|A\| \equiv \|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\varrho(A^*A)}, \qquad \text{(spektrální norma)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|, \qquad \text{(maximum přes řádkové součty abs. hodnot)}$$

kde σ_1 je největší singulární číslo matice a $\varrho(\cdot)$ označuje spektrální poloměr, tj. $\varrho(B) \equiv \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}(B)\}$.
Příkladem negenerované normy je Frobeniova norma, která je analogií 2-normy pro matice (díváme se na matici jako vektor o $n \times m$ složkách).

Definice 5 (Frobeniova norma)**.**

$$\|A\|_F \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

Poznámka. *Jiné možné zápisy Frobeniovy normy:*

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^{m} \|a_{*j}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|a_{i*}\|^2 = \mathrm{trace}(A^*A),$$

kde a_{*j} značí j-tý sloupec, a_{i*} značí i-tý řádek matice A a $\mathrm{trace}(B) = \sum_{i=1}^{m} b_{ii}$ je tzv. stopa matice $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

2.3 Vlastnosti a doplňující úlohy

Kromě odhadu (1) by bylo velmi užitečné, kdyby maticové normy byly *multiplikativní*, tj.,

$$\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha,$$

Úloha 4. *Proč nelze obecně očekávat rovnost $\|AB\|_\alpha = \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha$ a $\|AB\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$?*

Úloha 5. *Jsou zavedené maticové normy multiplikativní?*

[Hint: Začněte generovanými normami, pro Frobeniovu je to obtížnější otázka.]

Úloha 6. *Pomocí nástrojů z prvního ročníku najděte vyjádření 2-normy matice pro symetrické pozitivně definitní matice.*

[Hint: Použijte geometrickou představu matice jako lineární zobrazení.]

Úloha 7. *Je zřejmé, že obecně $\|A\|_1 \neq \|A^*\|_1$ a $\|A\|_\infty \neq \|A^*\|_\infty$. Dokažte, že pro $\|A\|_2$ však platí $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.*

2.4 Vlastnosti norem vzhledem k unitárním transformacím

Úloha 8 (Unitární invariance norem)**.** *Ukažte, že pro unitární matici* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *a libovolnou matici* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *platí*

$$\begin{aligned} \|U\| &= 1, \\ \|UA\| &= \|A\|, \\ \textit{(Navíc)} \quad \|UA\|_F &= \|A\|_F. \end{aligned}$$

[Hint: Může vám pomoci singulární rozklad matice A.]

[Hint: Spektrální i Frobeniova norma jsou multiplikativní (viz úloha 5), tedy

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad \|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F. \quad]$$

Úloha 9. *Rozmyslete si, zda unitární transformace zachovává jedničkovou či maximovou maticovou normu. Pokud ne, najděte protipříklad. Pokud ano, zkuste zdůvodnit.*