

# Domácí úkoly

May 9, 2024

Odevzdáním těchto úkolů můžete sbírat body za aktivitu na cvičení. Nemusíte odevzdat všechny (ale můžete a v tom případě všechny opravím), počet odevzdaných úkolů je na Vás, ale maximální počet bodů, který lze dohromady dosáhnout je 7.

## 1 Fourierovy řady

### [3b] Příklad 1:

Sečtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

pomocí aplikace výsledků teorie trigonometrických řad.

*Návod:* Nalezněte rozvoj funkcí  $f(x) = x$  a  $f(x) = x^2$  zúžených na  $(-\pi, \pi)$ . Vyšetřete konvergenci příslušných řad. Pro tyto řady aplikujte Parsevalovu rovnost.

### [3b] Příklad 2:

Nechť  $f$  je lichá,  $2\pi$ -periodická funkce, nechť

$$f(x) = \cos(x), \quad x \in (0, \pi).$$

1. Najděte Fourierovy koeficienty.
2. Čemu se rovná součet příslušné Fourierovy řady? Nakreslete graf; podobně odůvodněte.
3. Napište Parsevalovu rovnost (nejprve obecně a potom vyčíslete její části v tomto konkrétním případě).
4. Napište vzoreček pro integrování Fourierovy řady člen po členu (nejprve obecně; pak vyčíslete podrobně jednotlivé členy - omezte se na  $x \in [-\pi, \pi]$ ).

## 2 Integrace pomocí reziduovy věty

[3b] **Příklad 3:** Vypočítejte pomocí reziduové věty

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(x^2 + 9)^2} dx.$$

- použitá pravidla pro výpočet rezidua
- limitní přechody u jednotlivých částí křivkových integrálů

[3b] **Příklad 4:** Vypočítejte pomocí reziduové věty

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin^2 x}{x^6 + 10x^4 + 9x^2} dx.$$

Komentujte podrobně:

- použitá pravidla pro výpočet rezidua
- limitní přechody u jednotlivých částí křivkových integrálů

[3b] **Příklad 5:** Nalezněte funkci  $F(z)$  tak, aby integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3 + \cos 2x} dx$$

byl roven integrálu  $F$  podél (kladně orientované) jednotkové kružnice v komplexní rovině.

- Najděte singularity  $F$  - jakého jsou typu?
- Vyčíslete daný integrál pomocí reziduové věty.

## 3 Singularity a Laurentův rozvoj

[3b] **Příklad 6:** Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z^2}{(\exp z - 1)^2}.$$

- v bodě  $z_0 = 0$  určete: typ singularity, hodnotu rezidua a alespoň tři nenulové členy příslušného Laurentova rozvoje.
- Najděte všechny nenulové singularity funkce  $f$ . O jaký typ singularity se jedná? Naznačte, jak byste počítali příslušné reziduum (napište vzoreček pro konkrétní případ).

[2b] **Příklad 7:** Je dána funkce

$$f(z) = z \cos z - \exp z \sin z.$$

Jaký typ singularity má funkce  $1/f$  v bodě 0? Najděte tři nenulové členy Laurentova rozvoje.

## 4 Distribuce

[2b] **Příklad 8:** Necht  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je hladká funkce, která je nulová v bodech  $a_1 \in \mathbb{R}$  a  $a_2 \in \mathbb{R}$ . Dokažte že distributivní řešení rovnice

$$g(x)T = 0$$

je  $T = c_1\delta_{a_1} + c_2\delta_{a_2}$ , kde  $c_1, c_2$  jsou konstanty.

[2b] **Příklad 9:** Je dána rovnice

$$u'' = -u$$

ve smyslu distribucí. Nalezněte její řešení formální aplikací Fourierovy transformace za pomoci minulého příkladu.