

Věta 11.4 ukazuje, že skládání homomorfismů odpovídá násobení jejich matic (báze u „prostředního“ prostoru musí být u obou homomorfismů stejná). Z této věty vyplývá mimo jiné to, že přiřazení, které endomorfismům přiřazuje jejich matice, je homomorfismem vzhledem ke *skládání* homomorfismů/násobení matic. Jejimi jednoduchými důsledky jsou věty 11.5, 11.8 a 11.11.

Věta 11.11 ukazuje, jak ze znalosti matice homomorfismu vzhledem k nějakým bázím získáme matici homomorfismu vzhledem k jiným bázím. Tento výsledek můžeme využít i k tomu, že matici homomorfismu utvoříme nikoli podle definice (11.1), ale trochu jinak: například sestavíme matici homomorfismu vzhledem ke kanonickým bázím (to je jednoduché), vynásobíme ji příslušnými maticemi přechodu a získáme tak matici vzhledem k zadaným bázím. V řadě případů si tak ulehčíme práci. To je ukázáno v příkladu 11.12.

Maticová reprezentace endomorfismů a automorfismů.

Ve **větě 11.14**, část (ii), je řečeno, že grupa $\text{Aut } V$ je izomorfní s grupou $\text{GL}(n)$, a že izomorfismus těchto *grup* dostaneme *zúžením* izomorfismu *lineárních algeber* $\text{End } V$ a $T^{n \times n}$, který je uveden v části (i).

V první řadě si uvědomme, že množina všech automorfismů prostoru V je podmnožinou množiny všech endomorfismů prostoru V . Přitom je množina $\text{End } V$ *lineární algebrou* (sčítání endomorfismů, skládání endomorfismů a násobení endomorfismu skalárem), zatímco $\text{Aut } V$ je pouze *grupou* (vzhledem ke skládání automorfismů; pozor: součet automorfismů a násobek automorfismu nemusí být automorfismem, nelze tedy na množině $\text{Aut } V$ uvažovat operace sčítání automorfismů a násobek automorfismu). $\text{Aut } V$ je *podgrupou* lineární algebry $\text{End } V$.

Obdobně je to s maticemi. Čtvercové matice jsou *lineární algebrou* (sčítání a násobení matic a násobení matice skalárem), zatímco její podmnožina všech invertibilních matic je pouze *grupou* (vzhledem k násobení matic; pozor: součet invertibilních matic nemusí být invertibilní matice, násobek invertibilní matice nemusí být invertibilní, nelze tedy na množině $\text{GL}(n)$ uvažovat operace sčítání matic a násobek matice). $\text{GL}(n)$ je *podgrupou* lineární algebry $T^{n \times n}$.

Zvolíme-li v prostoru V nějakou bázi M a přiřazujeme-li endomorfismům jejich matice vzhledem k bázi M (viz definice 11.1 a věta 11.2), získáváme izomorfismus ϕ lineární algebry $\text{Aut } V$ na lineární algebru $T^{n \times n}$. Automor-

fismům prostoru V při izomorfismu ϕ odpovídají invertibilní matice a naopak (viz věta 11.5). Izomorfismus grupy $\text{Aut } V$ na grupu $\text{GL}(n)$ je tedy zúžením izomorfismu ϕ . Zobrazení $\phi: \text{End } V \rightarrow T^{n \times n}$ je izomorfismem lineárních algeber, jeho zúžení (tj. omezení na podmnožinu $\text{Aut } V$) je izomorfismem grupy $\text{Aut } V$ na grupu $\text{GL}(n)$.